EDIZIONE NAZIONALE

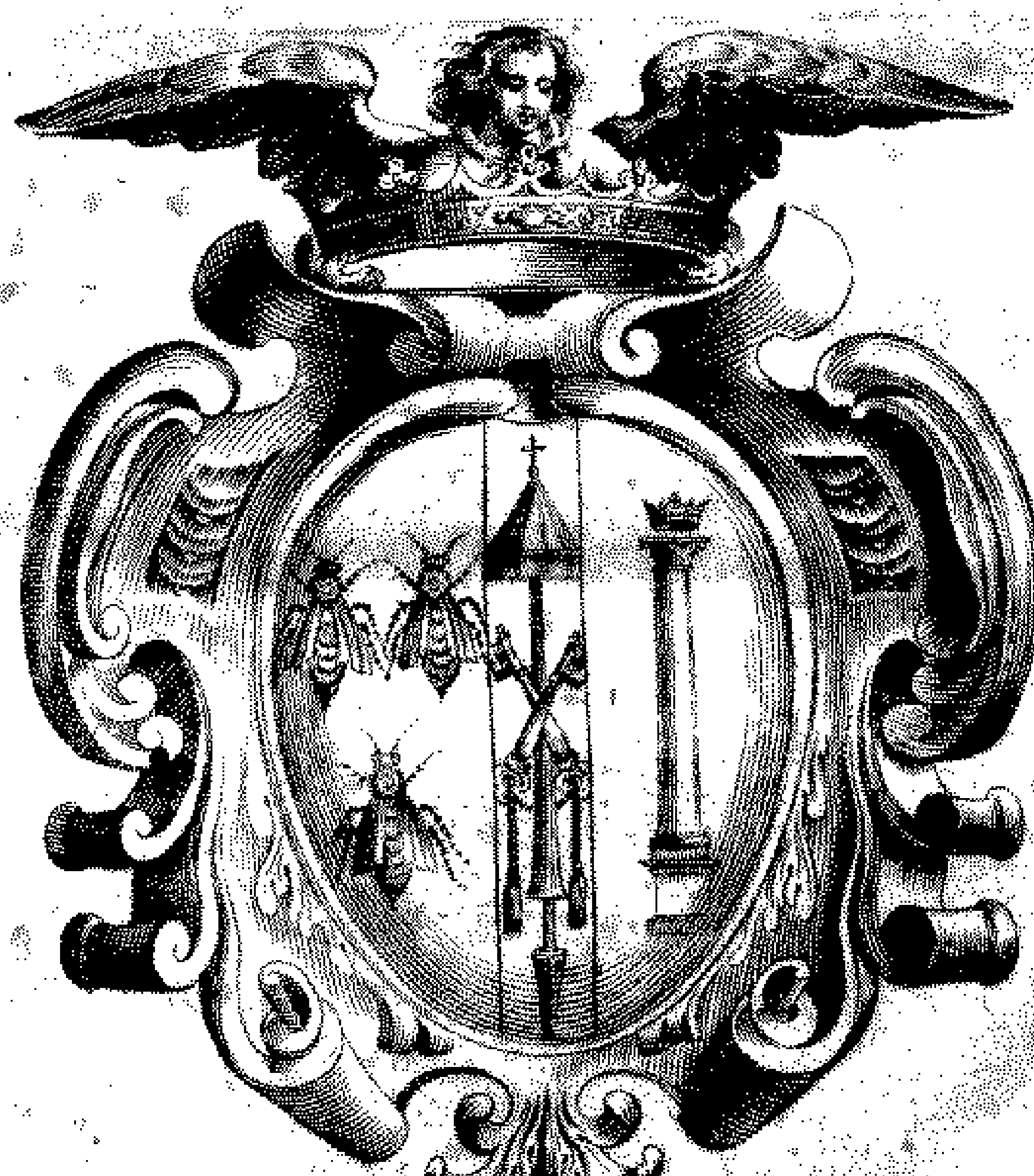
MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

Comitato scientifico:

MARINI GHETALDI
PATRITII RAGVSINI
MATHEMATICI PRAESTANTISSIMI.

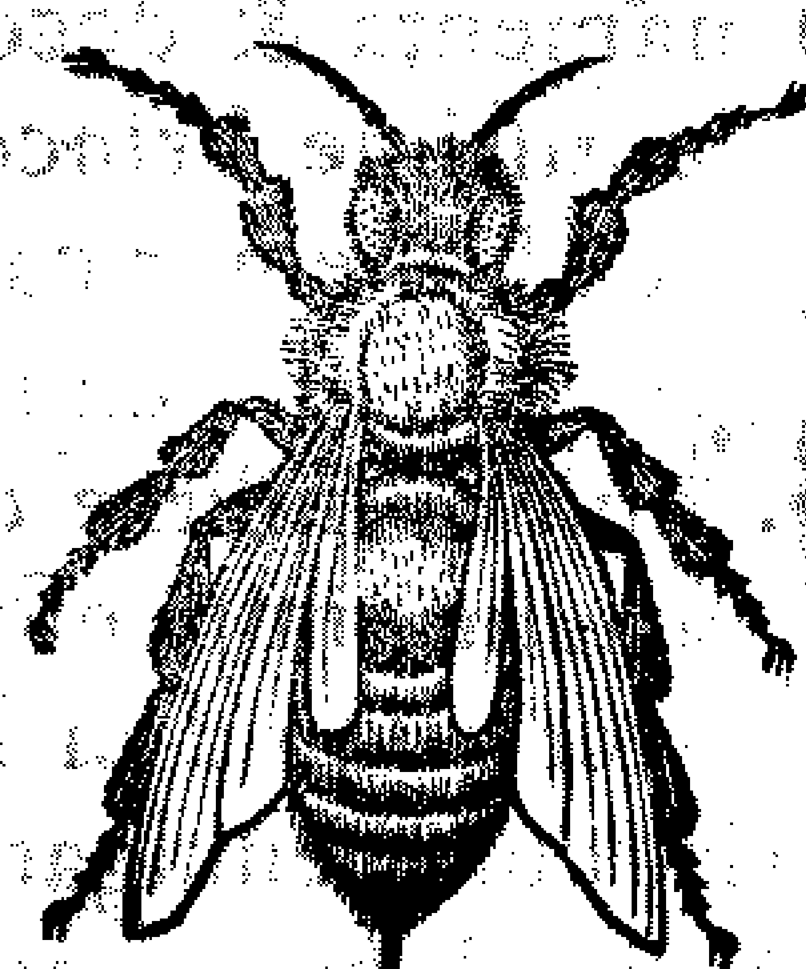
DE RESOLVTIONE,
& Compositione Mathematica
LIBRI QVINQVE.
Opus Posthumum.



ROMAE,
Ex Typographia Reuerendæ Cameræ Apostolicæ.
M. DC. XXX.

Superiorum Permissu, & Priuilegio.

Mathematicus; cuius opera præclara ne cum ipſo cecidiſse videantur Authore, iuſsis cauet ſuis & typis meis Eminentiſsimus Cardinalis Barberinus frater tuus: qui magnorum monumenta virorum iacere in tenebris, occulique ſepulcro non patitur. Facit ipſe pro ſua in doctos homines pietate, vt eos ab interitu vindicet qui laboribus ac vigilijs plurimis aduerſus mortalitatem vincentem, & conterentem omnia ſe communire non dubitarunt: facit pro ſua in me beneuolentia, vt opera potiſſimum mea eorumdem doctorum hominum immortalitati conſultum velit. Erit nunc tuæ benignitatis, humaniſsime Princeps, excipere à me perlibenter hoc munus, quod ex animi mei ſententia, ac ſimpliciter offero, ratus, tibi diſplicere non poſſe officium meum quod ceteris iam Barberinæ familiæ Principibus eſt probatum. Vale.



INDEX PROPOSITIONVM, ET PROBLEMATVM LIBRI I.

L I-

LIBRI SECVNDI.

men-

LIBRI TERTII.

LIBRI QVARTI.

Lem-

LIBRI QVINTI.

cum

F I N I S.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, & Compositione Mathematica.

LIBER PRIMVS.

A OMNES Mathematicæ probationes vel à concessis ad quæsita, vel à quæsitis ad concessa progrediuntur. Quæ à concessis progrediuntur ad quæsita, compositiones appellantur. Compositio enim est assumptio concessi per consequentia ad quæsiti finem, & compræhensionem. quæ vero à quæsitis progrediuntur ad concessa duplices sunt; vel enim concessa ponunt, vel destruunt: quæ ponunt concessa, resolutiones vocantur: Est enim Resolutio assumptio quæsiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Nam in resolutione id quod quæritur, vt iam exi-
B stens, & vt verum ponentes, per ea, quæ deinceps consequuntur, procedimus ad aliquod concessum: quo opere quæsitam conclusionem, in proprias causas, per quas demonstratur reducimus: atque his resolutionibus compositiones opponuntur. fieri enim potest, vt à concesso illo, per eadem resolutionis vestigia ad quæsitum reuertamur. Quæ vero destruunt concessa, deductiones ad impossibile nuncupamus. Deductio enim ad impossibile est assumptio eius quod quæsito contradicit tanquam concessi per consequẽtia, ad id, quod vero concesso opponitur. nam in deductione ad impossibile sumimus id quod quæsito contradicit, idq; supponentes progredimur, donec in aliquod absurdum incidamus, per quod suppositione destructa confirmetur id, quod à prin-
C cipio quærebatur. Ex quibus patet Resolutionem à Deductione ad impossibile ratiocinatione tantum differre; nam vtraque ab incognito ad cognitum eodem progressionis ordine procedit: sed Resolutio desinens in verum, concludit verum esse & quod supponitur: Deductio vero ad impossibile, desinens in falsum, falsum esse & quod supponitur arguit, & consequenter quæsitum verum esse.

Duplex autem est resolutionis genus alterum quidem ad Theoremata pertinet, eiusq; finis in sola veritatis inuestigatione consistit. alterum vero ad Pro-

 blemata,

blemata, cuius ſcopus eſt rationem conſtructionis, atque demonſtrationis in- A
ueſtigare: propoſita enim Problemata conſtruere docet, viamq; ad conſtru-
ctionis demonſtrationem oſtendit. ſed omnia ferè Theoremata, & Problema-
ta, quæ ſub Algebram cadunt faciliimè reſoluuntur, ac per reſolutionis veſti-
gia componuntur: non quidem vulgaris Algebræ beneficio; quæ reſolutionis
veſtigia omnino confundit; ſed illius, cuius auctor eſt Franciſcus Vieta, vir
certè de rebus Mathematicis optimè meritus; cui non ſolum noſtra, ſed etiã
ſuperior ætas haud ſcio an vllum huius ſcientiæ laude parem, nedum ſuperio-
rem inuenerit. etenim Reſolutio procedens per ſpecies immutabiles, non
autem per numeros mutationi, quacunque operatione tractentur, obnoxios;
ſua veſtigia clara relinquit, per quæ non eſt difficilis ad compoſitionem redi-
tus: compoſitio enim in Problematibus, ſiue per Algebram, ſiue Antiquorũ B
methodo reſolutis, à fine reſolutionis, ad principium per reſolutionis veſtigia
regreditur: in Theorematibus verò quorum veritas per Algebram exploratur,
eodem ordine quo inuenta eſt Theorematis veritas, demonſtratio procedit.
At Theoremata vel Problemata, quæ ſub Algebram non cadunt qualia ſunt
ea, quæ per comparationem angulorum demonſtrantur, reſoluuntur, & com-
ponuntur methodo ab antiquis tradita, cuius exempla extant in libris Archi-
medis, Apollonij, & Pappi, aliorumq; veterum ac recentium. Et quamuis ea
methodo omnia Theoremata, & Problemata reſolui, & componi poſſint; ta-
men ea, quæ ſub Algebram cadunt, plerumque faciliùs ac expeditiùs per Al-
gebram reſoluuntur, ac deinde per reſolutionis veſtigia componuntur. Hæc
omnia exemplis, atque etiam præceptis vbi locus exiget perſpicua fient. Pri- C
mum igitur proponam. Exempla ad inuentionem Theorematum, eorumq;
demonſtrationem pertinentia; deinde ad reſolutionem, & compoſitionem
Problematum: primis enim quatuor Theorematibus in Problematum reſolu-
tionibus & compoſitionibus ſæpe vtemur.

Propoſitio Prima.

Si recta linea ſecetur vtcumque; rectangulum ſub tota, & differentia partium cui plano ad ipſas partes relato æquale ſit inueſtigare.

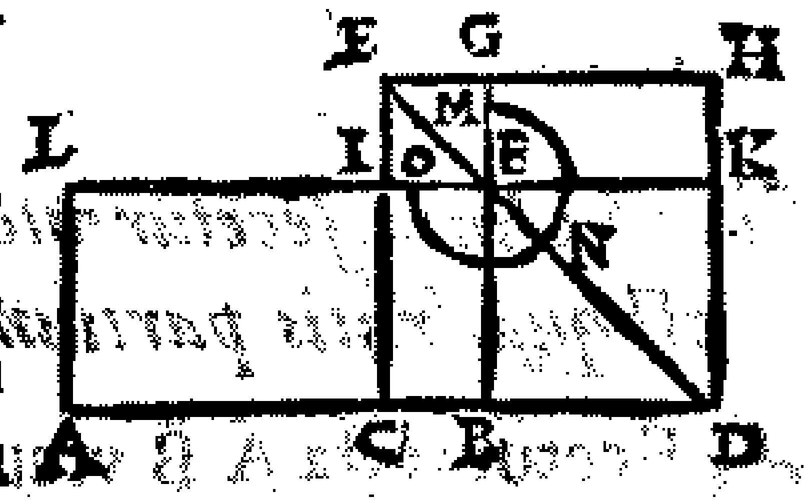
SEcetur recta linea in duas partes, quarum A ſit maior, B, minor. Oportet inueſtigare cui plano ad ipſas partes relato æquale ſit rectangulum ſub A + B, & A − B. Ducatur A + B in A − B, fit A Q − B Q. huic igitur plano æquale eſt rectangulum ſub tota & differentia partium; quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc formatur

D

Theorema I.

Si recta linea ſecetur vtcumque, rectangulum ſub tota, & differentia partium, æquale eſt differentia quadratorum partium.

Sece-



A SEcetur recta linea A B vtcunque in C, & producatur in D, vt sit C D æqualis A C, ergo differentia partium A C, C B erit B D. Dico rectangulum A B D æquale esse differentiæ quadratorum A C, C B. Describatur enim super C D quadratum C H, & ducatur diameter D E, quam B G parallela rectæ C E secet in F: deinde per F ducatur ipsi A B parallela K F L. Similiter ducatur & ipsi B K parallela A L. Quoniam igitur rectangulum A I, æquale est rectangulo B H, sunt enim A C, D H æquales, & æquales C I, B D. Addito igitur communi rectangulo B I, rectangulũ A F æquale erit rectangulis B H, B I, hoc est gnomoni M N O per quem differunt quadrata C H, I G.

B Rectangulum igitur A B æquale est differentiæ quadratorum C H, I G quod erat ostendendum.

Idem Theorema posset quoque ita enunciari:

Si recta linea secetur vtcumque, rectangulum sub tota, & differentia partium vna cum quadrato partis minoris, æquale est quadrato partis maioris.

OStensum est enim rectangulum A F æquari gnomoni M N O, addito communi quadrato I G, rectangulum A F, vnà cum quadrato I G æquabitur toti quadrato C H.

C Itaque Theorema hoc idem est, quod Theorema quintum, vel sextum libri secundi elementorum. Nam in quinto Theoremate dimidia illa recta intelligatur pars maior, intermedia vero sectionum, pars minor, reliqua autem differentia partium. In sexto autem Theoremate dimidia illa recta intelligatur pars minor, altera vero dimidia cum adiecta, pars maior, ipsa autem adiecta, differentia partium. His ita acceptis manifestum est vnum, eundemq; sensum contineri in hac nostra propositione, atque in illis duabus Euclidis.

Propositio II.

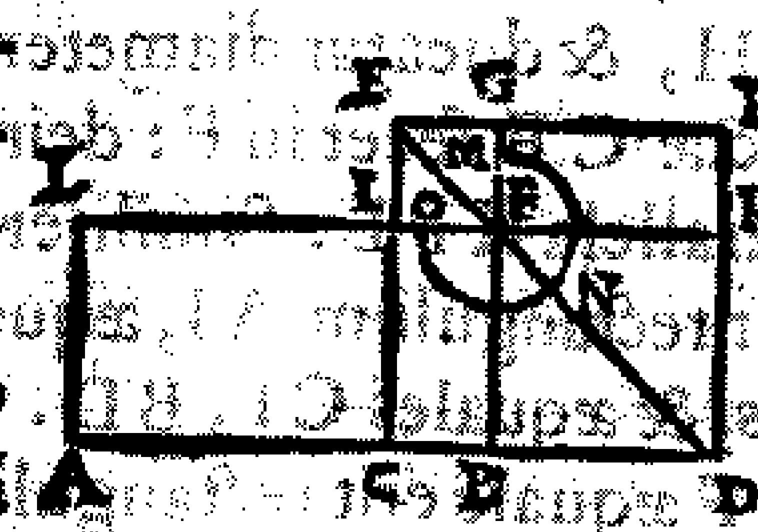
Si recta linea secetur vtcumque, quadratum differentiæ partium quibus

D *planis ad ipsas partes relatis æquale sit inuestigare.*

SIt recta linea secta in duas partes A, B quarum A sit maior; ergo earum differentia erit A—B. oportet inuestigare quibus planis ad ipsas partes relatis æquale sit quadratum ex A—B. Ducatur A—B in se: productum erit A Q + B Q—B in A 2. Atque hæc sunt ea plana quibus æquale est quadratum differentiæ partium: quare inuentum est quod quærebatur. Hinc formatur.

Theorema II.

Si recta linea secetur vtcumque, quadratum differentiæ partium, æquale est quadratis partium minus duplo sub partibus rectangulo.



Secetur recta A B vtcumque in C, eaq; producatur in D, vt sit C D æqualis A C: differentia igitur partium A C, C B, erit B D. Dico quadratum B D æquale esse quadratis A C, C B, minus rectangulo A C B bis. Describatur enim super C D quadratum C H, in quo agatur diameter D E, quã recta B G, parallela ipsi C E, vel D H, secet in puncto F, per quod agatur ipsi C D parallela I F K. sunt igitur B K, I G quadrata rectarum B D, C B, & quadratum B K vnà cum rectangulis C H, I H, æquale est quadratis C H, I G, demptis vtrimque rectangulis C G, I H, reliquum quadratum B K æquale erit quadratis C H, I G, minus rectangulis C G, I H: hoc est æquale erit quadratis rectarum A C, C B, minus rectangulo A C B bis: quod erat ostendendum.

Theorema hoc, quemadmodum & præcedens, demonstrantur ex ipsa constructione, quoniam vnico tantum actu resoluuntur, nullo resolutionis progressu; in primo enim Theoremate ex ductu A + B in A — B, in secundo autem ex ductu A -- B in se, veritas innotuit.

Idem Theorema potest quoque ita proponi.

Si recta linea secetur vtcumque, quadrata partium simul æqualia sunt quadrato differentiæ partium, vnà cum duplo sub partibus rectangulo.

Itaque Theorema hoc est vnum, idemq; cum Theoremate septimo libri secundi Elementorum; nam in eo Theoremate tota illa recta intelligatur pars maior, alterum autem segmentorum, pars minor, reliquum vero, differentia partium: quibus sic acceptis, manifestum est vnum, idemq; propositum esse vtriusque Theorematis.

Propositio III.

Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium, cui plano ad ipsas partes relato æquale sit inuestigare.

Sit recta linea secta in duas partes A, B, quarum A sit maior, ergo differentia earum erit A — B. Oportet inuestigare, cui plano æquale sit quadratum ex A + B minus quadrato ex A — B. Fiat quadratum ex A + B id, erit

$$A\,Q + B\,Q + B \text{ in } A\,2.$$

ab eoq; auferatur quadratum ex A — B quod est

$$A\,Q + B\,Q - B \text{ in } A\,2.$$

A Remanebit B in A 4. Huic igitur plano æquale est quadratum totius rectæ, minus quadrato differentiæ partium: Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theorema III.

Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium æquale est quadruplo sub partibus rectangulo.

Sit recta A D secta vtcumque in B, & rectæ D B, quæ sit minor pars, fiat æqualis B C; ergo differentia partium A B, B D, erit A C. Dico qua-
B dratum A D, minus quadrato A C, æquale esse quadruplo rectanguli A B D. Quoniam enim quadratum A D æquale est quadratis A B, B D vnà cum rectangulo A B D bis; quadratum autem A C æquale est eisdem quadratis A B, B D, minus rectangulo A B D bis, si igitur à quadratis A B, B D, & rectangulo A B D bis auferantur quadrata A B, B D, minus rectangulo A B D bis, remanebit rectangulum A B D quater. Quadratum igitur totius rectæ, minus quadrato differentiæ partium, æquale est quadruplo rectangulo sub partibus, quod erat ostendendum.

Idem Theorema potuit quoque ita enunciari.

Si recta linea secetur vtcumque, quadruplum rectangulum sub partibus,
C *vnà cum quadrato differentiæ partium æquale est totius lineæ quadrato.*

Cum enim ostensum sit quadratum totius, minus quadrato differentiæ partium, æquari quadruplo rectangulo sub partibus, si vtrobique addatur quadratum differentiæ partium, quadratum totius æquale erit quadruplo rectangulo sub partibus, vnà cum quadrato differentiæ partium.

Itaque Theorema hoc idem est quod Theorema octauum libri 2. Euclidis in eo enim Theoremate tota illa recta intelligatur pars maior, alterum autem segmentorum, pars minor, reliquum vero, differentia partium. quibus sic acceptis, manifestum est vnum, idemq; propositum esse ꝯtriusque Theorematis

D

Propositio IIII.

Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius vnà cum quadrato differentiæ partium, quibus planis ad ipsas partes relatis, æquale sit inuenire.

Secetur recta linea in duas partes A, B, quarum A sit maior, ergo differentia partiũ erit A − B: Oportet inuestigare, quibus planis æquale sit quadratum ex A + B, vnà cum quadrato ex A − B. Fiat quadratum ex A + B id erit

A Q + B Q + B in A 2

Similiter fiat quadratum ex A—B id erit A Q ✢ B Q—B in A 2. Horum quadratorum aggregatum est A Q 2 ✢ B Q 2. Atque his planis æqualia sunt quadrata, totius videlicet, & differentiæ partium. quare inuentum est quod quærebatur. Hinc A

Theorema IV.

Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius vnà cum quadrato differentiæ partium, dupla sunt quadratorum partium.

SEcetur recta A B vtcumque in C, & à maiori parte, quæ sit A C, auferatur C D æqualis C B: ergo differentia partium A C, C B erit A D. Dico quadrata A B, A D dupla esse quadratorum A C, C B. Quoniam enim quadratum A B æquale est* quadratis A C, C B, vnà cum rectangulo A C B bis; quadratum autem A D æquale* quadratis A C, C B, minus rectangulo A C B bis, ideo quadrata A B, A D æqualia sunt quadratis A C, C B bis. hoc est dupla sunt quadratorum A C, C B, quod erat ostendendum. In hoc Theoremate idem ostenditur, quod in Theorematibus nono, & decimo libri secundi Elementorum licet in alia forma sit propositum. Nam in nono Theoremate, dimidia illa recta, intelligatur pars maior, intermedia verò sectionum, pars minor, reliqua autem, differentia partium. B

4 secũdi

Theor. 2

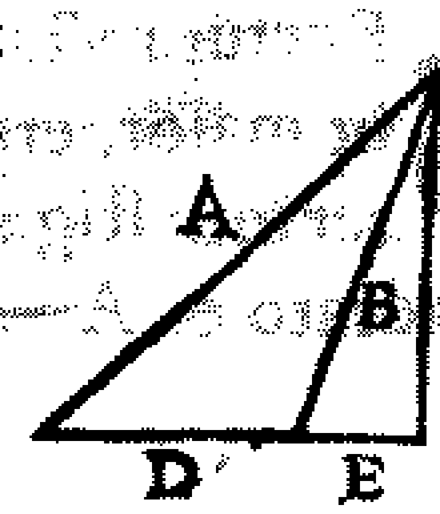
In decimo autem Theoremate dimidia illa recta, intelligatur pars minor, altera vero dimidia cum adiuncta, pars maior, ipsa autem adiuncta, differentia partium. quibus sic acceptis, manifestum est huius nostri Theorematis idẽ esse propositum, atque dictorum Theorematum noni & decimi. C

Quatuor præcedentia Theoremata ea ratione, qua proposite sunt, nõ paruo vsui erunt in resolutionibus, & compositionibus; nam vt in resolutionibus plana (quibus æquatur quadratum differentiæ partium vel rectangulum sub differentia partium, & aggregato) cum alijs planis sæpe comparantur; sic rursus in compositionibus, quæ per filium resolutionis progrediuntur, aut regrediuntur; eadem plana pro quadrato differentiæ partium, seu rectangulo sub differentia partiũ, & aggregato, cum ijsdem alijs planis, cõparentur necesse est. D

Propositio V.

In obtusiangulis triangulis, quadratum lateris angulum obtusum subtendentis, quanto maius sit quadratis reliquorum laterum inuenire.

SIt triangulum cuius latera A B D & latus A subtendat angulum obtusum. Oportet inuenire quanto sit maius quadratum lateris A quadratis laterum B & D. Ab angulo verticis cadat in D, basim continuatam perpendicularis G, sitq; continuatio E: quadratum igitur lateris A æquale



A æquale* erit quadratis à perpendiculari, & à base producta vsque ad perpendicularem, hoc est 47 primi

$$A\,Q \text{ æquale erit } G\,Q + D\,Q + E\,Q + D \text{ in } E\,2. \text{ sed}$$

$$G\,Q + E\,Q \text{ æquale* est } B\,Q. \text{ ergo}$$ 47 primi

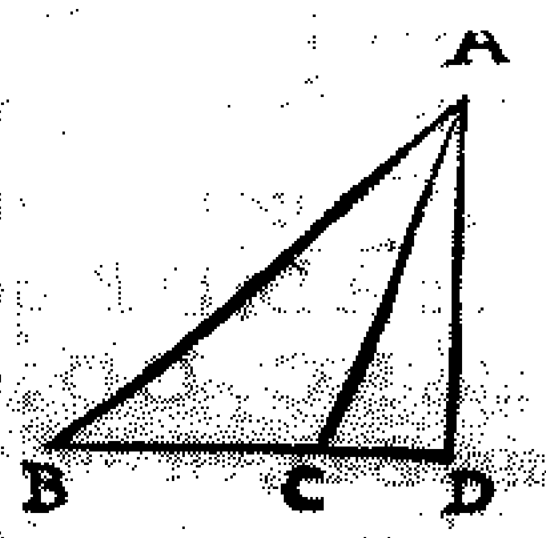
$$A\,Q \text{ æquabitur } B\,Q + D\,Q + D \text{ in } E\,2$$

Quadratum igitur lateris A maius est, quàm quadrata laterum B, & D rectãgulo D in E 2. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc formatur.

Theorema V.

In obtusiangulis triangulis, quadratum lateris angulum obtusum subtendentis, maius est, quàm quadrata reliquorum laterum, rectangulo cõprehenso bis ab vno reliquorum laterum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & à linea, quæ inter perpendicularem, & angulum obtusum interijcitur.

B



SIt obtusiangulum triangulum A B C, obtusum angulum habens A C B, & ducatur à puncto A ad B C productam, perpendicularis A D. Dico quadratum A B, maius esse, quàm quadrata A C, C B rectangulo B C D bis; quoniam enim quadratum A B æquale* est quadratis A D, D B; quadratum autem D B æquale* quadratis D C, C B, vnà cum rectangulo B C D bis; erit quadratum A B æquale quadratis A D, D C, C B vnà cum rectangulo B C D bis. sed quadrata A D, D C æqualia* sunt quadrato A C, ergo quadratum A B, æquale erit quadratis A C, C B vnà cum rectangulo B C D bis; itaque quadratum A B maius est, quàm quadratum A C, C B, rectangulo B C D bis. quod erat ostendendum.

47 primi

4 secũdi

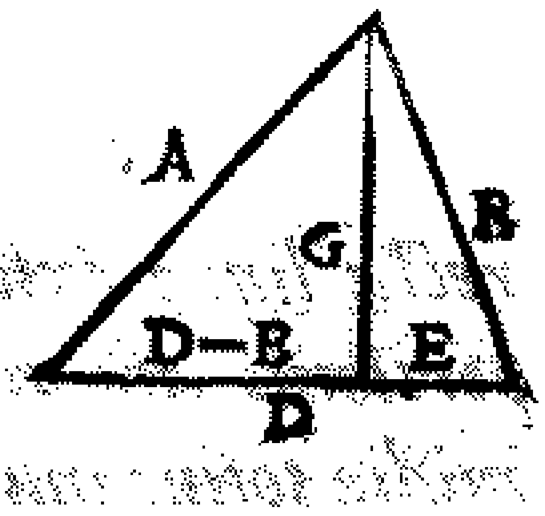
C

47 primi

Propositio VI.

In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum acutum subtendentis, quanto minus sit quadratis reliquorum laterum, inuenire.

D



SIt triangulum cuius latera A B D & latus A subtendat angulum acutum. Oportet inuenire quanto minus sit quadratum lateris A quadratis laterum B & D. Cadat ab angulo verticis in basim D, perpendicularis G, secans ipsam basim in duas partes, quarum illa, quæ est inter perpendicularem, & angulum acutũ sit E; ergo altera pars erit D—E.

Et quoniam A Q æquale* est quadratis ex G & D—E, ideo 47 primi

$$A\,Q \text{ æquabitur } G\,Q + D\,Q + E\,Q - D \text{ in } E\,2,$$

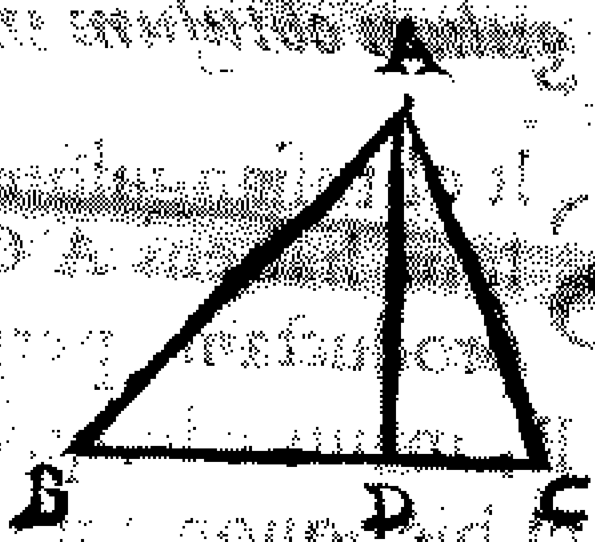
Et addito vtrique parti D in E 2

A Q

47 primi A Q ✠ D in E 2, æquabitur G Q ✠ D Q ✠ E Q, sed A
G Q ✠ E Q æquale* est B Q, ergo
A Q ✠ D in E 2 æquabitur D Q ✠ B Q.
Quadratum igitur lateris A, minus est, quàm quadrata laterum D, & B rectangulo D in E 2. Hinc

Theorema VI.

In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum rectum subtendentis, minus est, quàm quadrata reliquorum laterum, rectangulo cōprahenso bis, ab vno reliquorum laterum, in quod perpendicularis cadit, & à portione ipsius lateris, quæ inter perpendicularem, & angulum acutum interijcitur. B



SIt acuti angulum triangulum A B C, acutum habens angulum A C B, & ducatur à puncto A ad B C, perpendicularis A D. Dico quadratum A B, minus esse, quam quadrata A C, C B rectangulo B C D bis. Quoniam enim quadratum A B æquale* est quadratis A D, D B, quadratum autem D B æquale* est quadratis B C, C D, minus rectangulo B C D bis; recta enim B D, est differentia inter B C, C D: ergo quadratum A B æquale erit quadratis A D, B C, D C, minus rectangulo B C D bis. addatur vtrobique rectangulum B C D bis, ergo quadratum A B vnà cum rectangulo B C D bis, æquale erit quadratis A D, B C, D C. sed quadrata A D, D C æqualia* sunt quadrato A C, ergo quadratum A B vnà cum rectangulo B C D bis, æquale erit quadratis B C, C A. Itaque quadratum A B minus, est quam quadrata B C, C A rectangulo B C D bis. quod erat ostendendum. C

47 primi; Theor. 2; 47 prim

In principio libri tertij decimi Elementorum extant in scholijs nonnulla exempla ad Resolutionem, & Compositionem Theorematum pertinentia; ibi enim quinque Theoremata resoluuntur, & componuntur. Ego quoque eorundem Theorematum veritatem alia methodo inquiram; peritus autem Geometra in inquirendo huiusmodi Theorematum veritate, poterit ea methodo vti quæ facilior videatur. D

Propositio VII.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur; quadratum maioris portionis assumentis dimidium totius, quanto maius sit quadrato dimidia totius inuestigare.

SIt recta linea B 2 extrema, ac media, ratione secta, cuius portio maior sit D ergo portio

minor

A minor erit B 2--D; dimidia autem totius est B, itaque composita ex maiore portione, & dimidia totius, erit D + B, Oportet inuestigare, quanto maius sit quadratum ex D + B, quadrato ex B; posuimus eam sectam extrema, ac media ratione, esse B 2 non autẽ B simplicem; sic enim fractiones vitabũtur.

Quoniam igitur secta est B 2 extrema, ac media ratione, rectangulum sub tota, & portione minori, æquale erit quadrato portionis maioris. hoc est

BQ 4—B in D 2 æquabitur DQ.

Quadratum autem ex D + B, est D Q + B Q + D in B 2. si igitur dematur D Q, & in locum eius subrogetur B Q 4--B in D 2, cui ostensum est æquari D Q, prodibit B Q. S, idq; æquabitur quadrato ex D + B; atque adeo quadratum ex D + B quintuplum erit quadrati ex B. Quare inuentum est

B quod quærebatur. Hinc ordinatur

Theorema VII.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, quadratum maioris portionis assumentis dimidiam totius, quintuplum est quadrati dimidiæ totius.

SEcetur A B extrema, ac media ratione in C, sitq; maior portio A C, eaq; producatur in D, vt sit A D æqualis dimidiæ A B. Dico quadratum ex D C quintuplum esse quadrati ex D A. Quoniam enim secta est A B extrema, ac media ratione

C in C, quadratum A C æquale erit rectangulo A B C, hoc est quadrato A B, minus rectangulo B A C; seu quod idem est, quadrato D A, quater minus rectangulo D A C bis, est enim A B dupla ipsius A D. Et quoniam quadratum D C æquale *est quadratis D A, A C vnà cum rectangulo D A C bis: si 4 secũdi dematur quadratum A C, & in locum eius subrogetur, ipsi æquale quadratũ D A, quater minus rectangulo D A C bis, itidem manebit æqualitas, hoc est quadratum D C æquale erit quadrato D A quinquies. Itaque quadratum D C quintuplum est quadrati D A, quod erat ostendendum.

Propositio VIII.

D *Si recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis, extrema ac media ratione secta. quæritur an maior portio sectæ sit reliqua pars eius quæ à principio rectæ lineæ.*

REcta linea constans ex partibus B D quintuplum possit partis B, cuius dupla est B 2; ipsa igitur B 2 secetur extrema, ac media ratione. Oportet inuestigare an maior portio sectæ sit D, reliqua videlicet pars eius, quæ à principio rectæ lineæ. Quoniam igitur vna pars ipsius B 2, est D reliqua pars erit B 2—D, demonstrabimus aũt infra ipsam B 2, maiorem esse, quam D. Et cum quadratũ ex B + D ponatur quintuplũ quadrati ex B.

BQ

B Q + D Q + B in D 2, æquabitur B Q 5.

Auferatur vtrinque B Q, ergo

D Q + in D 2 æquabitur B Q 4.

Auferatur quoque B in D 2, vt D Q solum remaneat, cum recta D comparanda sit cũ portione maiori ipsius B 2 sectæ, extrema ac media ratione, ergo

D Q æquabitur B Q 4 — B in D 2

Seu quod idem est

D Q æquabitur B 2 — D in B 2.

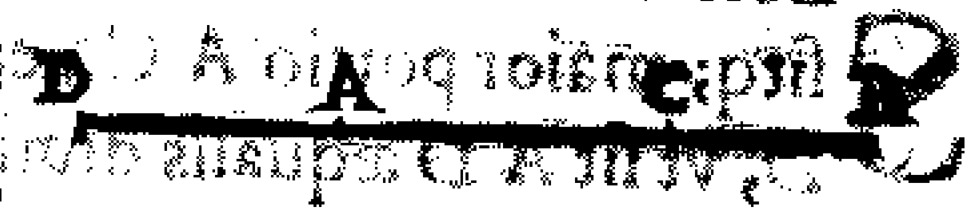
Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

B 2 — D   D   B 2.

Itaque B 2 secta est extrema, ac media ratione, & maior portio est D; cum sit ipsa D media proportionalis inter portionem B 2 — D, & totam B 2. quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theorema VIII.

Si recta linea partis ipsius quintuplum possit. Dupla dicta partis extrema ac media ratione secta, maior portio, reliqua pars est eius quæ à principio recta linea.



Sit quadratum rectæ A B quintuplum quadrati partis B C, & ipsius B C dupla sit C D; post autem ostendemus B C duplam maiorem esse reliqua parte C A. Dico si C D extrema ac media ratione secetur, C A esse portionem maiorem.
4 secũdi Quoniam enim quadratum A B, quod * constat quadratis A C, C B, & rectangulo A C B bis, ponitur quintuplum quadrati B C, quadrata A C, C B vnà cum rectangulo A C B bis, æqualia erunt quadrato B C quinquies; dempto vtrinque quadrato B C, relinquetur quadratum A C, vnà cum rectangulo A C B bis æquale quadrato B C quater, hoc est relinquetur quadratum A C vnà cum rectangulo D C A æquale quadrato C D; ponitur enim C D dupla ipsius B C: auferatur quoque vtrinque rectangulum D C A, ergo quadratum A C, æquale erit quadrato C D, minus rectangulo D C A; hoc est æquale
16 sexti erit rectangulo C D A; quare * vt D A ad A C ita erit A C ad C D. Secta est igitur recta C D extrema, ac media ratione, & maior portio est C A, quod erat ostendendum.

At vero B C duplam maiorem esse, quam C A sic demonstrabitur.

Sit enim si fieri potest B C dupla non maior quàm C A, ergo quadratum A C non erit minus quadruplo quadrati C B, & consequenter quadrata A C, C B non erunt minora quintuplo quadrati C B, sed ponitur quadratum A B quintuplum quadrati C B, ergo quadrata A C, C B, non erunt minora qua-
4 secũdi drato A B: quod est absurdum; quadratum enim A B æquale * est quadratis A C, C B vnà cum rectangulo A C B bis. Dupla igitur B C maior est, quàm C A quod erat ostendendum.

Propo-

Propositio IX.

Si recta linea secetur extrema, ac media ratione, quadratum minoris portionis assumentis dimidiam maioris portionis. quanto maius sit quadrato dimidiæ maioris portionis, inuestigare.

SEcetur recta extrema, ac media ratione cuius portio maior sit B 2, portio minor D. Quæritur quanto maius sit quadratum ex D + B quadrato ex B. Quoniam igitur ex natura huiusmodi sectionis rectangulum sub tota, & portione minore æquale est quadrato portionis maioris, ideo

D in B 2 + D Q æquabitur B Q 4

Quadratum autem ex D + B constat ex

D Q + B Q + D in B 2

cui quadrato si demantur D in B 2, & D Q. & in locum eorum subrogetur æquus valor, nempe B Q 4; fit B Q 5 pro valore eiusdem quadrati ex D + B. Itaque quadratum ex D + B quintuplum erit quadrati ex B. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theorema IX.

Si recta linea secetur extrema, ac media ratione, portio minor assumens dimidiam maioris portionis, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris portionis describitur quadrati.

SEcetur A B extrema, ac media, ratione: in C cuius portio maior A C, secetur bifariam in D. Dico quadratum B D quintuplum esse quadrati D C. Quoniam enim ex huiusmodi sectione rectangulum A B C, æquale est quadrato A C ipsi autem rectangulo A B C, æquale est quadratum C B vna cum rectangulo A C B, hoc est vna cum rectangulo D C B bis, & quadratum A C quadruplum est quadrati D C, ergo quadratum C B vnà cum rectangulo D C B bis, æqualia erunt quadrato D C quater. Et quoniã quadratum D B æquale* est quadratis D C, C B vnà cum rectangulo D C B bis, 4 secũdi
demptis quadrato C B, & rectangulo D C B bis, & in locum eorum subrogato quadrato D C quater, cui ea æqualia sunt, rursus manebit æqualitas, népe quadratum D B, æquale erit quadrato D C quinquies. Itaque quadratum A B quintuplum erit quadrati D C. Quare constat propositum.

Propositio X.

Si recta linea secetur extrema, ac media ratione: quadrata totius & portionis minoris simul, quanto sint maiora quadrato portionis maioris, inuestigare.

Secetur

SEcetur recta B extrema, ac media, ratione, sitq; minor portio D ergo maior erit B—D. Quæritur quanto maiora sint quadrata ex B & D quadrato ex B—D. Quoniam igitur ratione sectionis, quadratum portionis maioris æquale est rectangulo sub tota & portione minori

B Q + D Q—B in D 2 æquabitur B in D.

Addatur vtrobique B in D 2 vt B Q & D Q vna ex parte existant, cum sint comparanda cum quadrato portionis maioris, ergo

B Q + D Q æquabitur B in D 3.

Quadrata igitur ex B & D simul, tripla sunt quadrati portionis maioris. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theorema X.

Si recta linea secetur extrema, ac media ratione; quadrata totius, & portionis minoris simul, tripla sunt quadrati portionis maioris.

SEcetur recta A B in C extrema, ac media ratione, sitq portio maior A C, & portio minor C B. Dico quadrata A B, B C simul, tripla esse quadrati A C. Quoniam enim ex vi sectionis quadratum A C æquale est re-
Theor. 2 ctangulo A B C, & æquale quoque quadratis A B, B C, minus duplo rectanguli A B C, recta enim A C differentia est rectarum A B, B C, ergo quadrata A B, B C, minus duplo rectanguli A B C, æqualia erunt rectangulo A B C; addatur vtrique parti duplum rectangulum A B C, ergo quadrata A B, B C æqualia erunt triplo rectangulo A B C hoc est triplo quadrati A C quod erat ostendendum.

Propositio XI.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturq; ipsi æqualis maiori portioni. Quæritur an tota linea sit extrema, ac media ratione secta, ita vt maior portio sit ea quæ à principio posita est recta linea.

SIt recta linea B secta extrema, ac media ratione, sitq; maior portio A, ergo portio minor erit B—A: ipsi autem B adijciatur recta æqualis maiori portioni, ea erit A. Oportet inuestigare an tota B + A sit secta extrema, ac media, ratione, ita vt maior portio sit B. Quoniam igitur ex natura sectionis est

vt B ad A ita A ad B—A

Erit conuertendo vt A ad B ita B—A ad A

Et componendo vt A + B ad B ita B ad A.

Secta est igitur B A extrema, ac media ratione, & portio maior est B, quæ à principio posita est. Itaque inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theo-

A

Theorema XII.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adjiciatur que ipsi æqualis maiori portioni, erit tota linea extrema, ac media, ratione, secta et maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea.

SIt recta linea A B, quæ secetur extrema, ac media, ratione, in C & sit portio maior C B, cui æqualis ponatur B D. Dico rectam lineam A D extrema, ac media, ratione, secari in puncto B, & maiorem portionem esse A B, quæ à principio posita est. Quoniam enim ratione se-
B ctionis est, vt A B ad B C, ita B C ad C A, erit conuertendo, vt B C, hoc est B D, ad B A, ita A C ad C B; & componendo, vt D A ad A B, ita A B ad B C; hoc est ad B D. Secta est igitur A D extrema, ac media, ratione, in B, & maior portio est A B. quod erat ostendendum.

Problema Primum.

Datam rectam lineam secare, ita vt maior pars minorem dato excessu superet. Oportet autem datum excessum minorem esse data secanda.

I Resolutio.

C SIt data recta linea B secanda in duas partes, quarum maior superet minorē excessu æquali datæ rectæ lineæ D.

Factum iam sit & pars minor esto A, maior igitur erit A + D, vnde tota erit A 2 + D sed eadem data est B, ergo B æquabitur A 2 + D. auferatur vtrinque D, vt magnitudines datæ ex vna parte existant, ea vero de qua quæritur ex altera, ergo

B − D æquabitur A 2

Vnde.

Porisma.

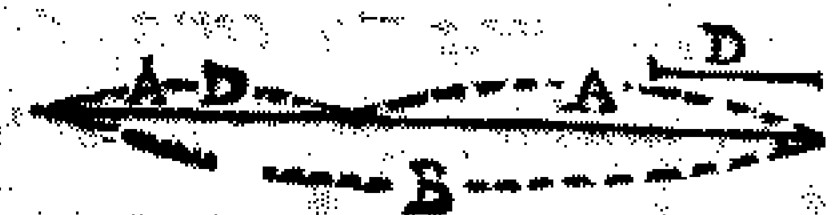
D Recta data minus excessu dato, æqualis est duplo partis minoris. Datur ergo minor pars quæsita.

Compositio.

SIt dacta recta linea A B, quam oportet secare vt pars maior superet minorem excessu æquali datæ rectæ lineæ D, à recta A B auferatur B C æqualis ipsi D, reliqua vero C A secetur bifariam in E, erit igitur A E minor pars, E B maior; hæc enim superat illam excessu C B, æquali ipsi D, quare factum est quod oportebat.

Alia Resolutio. A

PArs maior estò A, minor igitur erit A — D, tota ideo erit A 2 — D, sed eadem data est B ergo



B æquabitur A 2 — D

Addatur vtrobique D, vt quæsita magnitudo à datis separetur. ergo

B + D æquabitur A 2.

Hinc

Porisma.

Recta data plus excessu dato æqualis est, duplo partis maioris. B
Datur ergo maior pars quæsita.

Compositio.

SIt data recta linea secunda vt petitur A B, datus autem excessus D. Producatur A B in C, vt B C sit æqualis D, & tota A C secetur bifariam in E;

erit A E pars maior, E B pars minor, recta enim E C, hoc est A E, superat E B, excessu B C æquali ipsi D. Factum est igitur quod oportebat.

Corollarium I.

EX demonstratis manifestum est, rectam lineam, quæ in duas partes diuiditur, auctam excessu partium, æqualem esse parti maiori duplæ, diminutam vero, duplæ minori. C

In posteriori enim demonstratione rectæ A B sectæ in E adiecta est B C differentia partium A E E B, & fit A G dupla partis maioris A E.

In priori vero demonstratione rectæ A B, quæ secta est in E, ablata est C B differentia partium A E E B, & relinquitur A C dupla partis minoris A E.

Corollarium II.

PEr consequens hoc etiam verum est, dimidia lineæ rectæ in duas partes diuisæ, aucta dimidio excessu partium, æqualis est parti maiori, diminuta minori. D

Posui corollaria hæc, quoniam frequens est eorum vsus in resolutionibus, præsertim in constituendis partibus ex aggregato partium, & differentia.

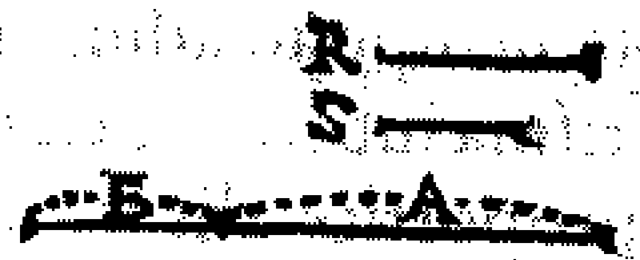
Problema II.

Data recta linea, alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, datam teneat rationem. Oportet autem datam rationem esse maioris ad minus.

Reso-

A

Resolutio.



Sit data recta linea B, cui oportet alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, sit vt R ad S, quarum R sit maior.

Factum iam sit & adiuncta de qua quæritur esto A, ergo data cum adiuncta erit B + A, & erit

vt R ad S ita B + A ad A.

In hac propositione duo tantum dantur termini, primus nempe, & secundus, vt necesse est dari quoque tertium, nam nisi sint cogniti tres propositionis termini, quartus, hoc est quæsita magnitudo, non innotescet. igitur vt
B tertius quoque detur terminus, qui constat ex B & A magnitudinibus, data scilicet, & quæsita, liberandus est à quæsita, ita tamen vt quatuor illi termini proportionales existant. liberabitur autem in hoc casu, auferendo consequẽtes ab antecedentibus, hoc est per diuisionem rationis argumentando, nam cum sit

vt R ad S ita B + A ad A

erit diuidendo vt R — S ad S, ita B ad A.

Dantur ergo tres proportionalium termini, itaque dabitur, & quartus, hoc est adiuncta, de qua quæritur.

C

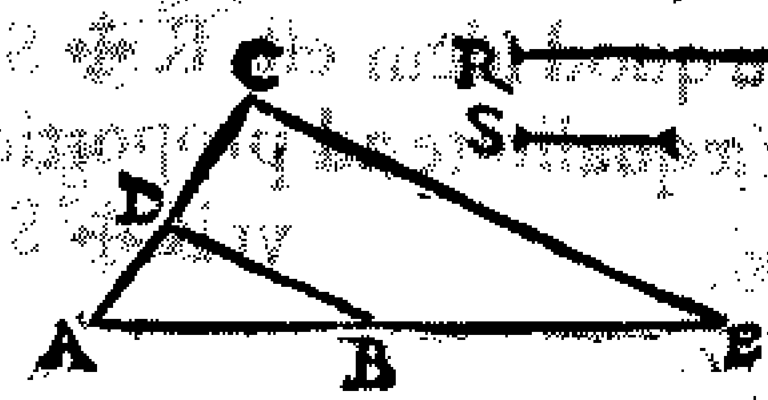
Porisma.

Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum minorem, ita est data ad adiunctam.

Scholium.

Sæpe autem contingit, non vnum tantùm, sed plures proportionis terminos constare ex datis magnitudinibus & ea de qua quæritur, vel eius gradu, nec rationem apparere, qua datæ magnitudines à quæsita separari possint, seruata proportione quacunque, ideo eo casu resoluenda est ad æqualitatem proportio & procedendum æqualibus æqualia addendo, vel subducendo vel æqualia per æqualia multiplicando, aut diuidendo, donec facta omni-
D no sub magnitudinibus datis ex vna æquationis parte existant, cætera vero ex altera. Hæc autem exemplis suo loco fient illustriora.

Compositio.



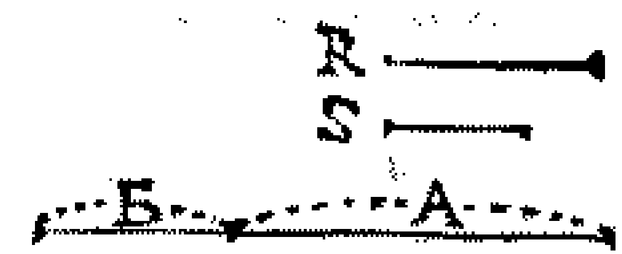
Sit data recta linea A B cui oportet alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta ad adiunctam sit, vt R ad S maior ad minorem. Ponatur A C æqualis R, ita vt cum A B constituat angulum quemcunque, & ab A C abscindatur C D æqualis S, & iungatur D B, eiq; parals sexti lela agatur C E secans A B productam in E. Erit * igitur vt A D ad D C differentia videlicet terminorum R & S ad terminum minorem, ita A B ad B E, data nempe ad adiunctam. Itaque continuata est A B in E, quemadmodum ad risma iubet, hoc est datis tribus rectis lineis A D D C A B, inuēta est quarta proportionalis B E. Nunc autem ostendendum est, vt R ad S ita esse A E ad B E. Quoniam igitur est vt A D ad D C, ita A B ad B E, erit componendo vt A C ad D C, hoc est vt R ad S, ita A E ad B E cum enim in Resolutione per diuisionem rationis argumentatus fueris, in compositione per compositionem rationis argumentaberis & è contra. Continuata est igitur A B in E, vt A E ad B E rationem habeat vt R ad S quod erat faciendum. A

Problema III. B

Data recta linea, alteram rectam adiungere, vt differentia data & adiuncta ad aggregatum earundem rationem habeat datam. Oportet autem datam rtaionem esse minoris ad maius.

Hoc Problema duos casus habet; aut enim data superabit adiunctam, aut adiuncta datam. primum data superet adiunctam.

Resolutio primi casus.



Sit data recta linea B, cui oportet alteram rectam adiungere vt excessus quo data superat adiunctam ad aggregatum earundem, rationem habeat, vt R ad S, quæ ratio sit minoris ad maius. C

Sit iam factum & adiuncta de qua quæritur esto A, ergo excessus quo data superat adiunctam, erit B — A, aggregatum verò earundem B + A & erit

vt R ad S, ita B — A ad B + A.

Quoniam igitur in hac proportione plures termini, non vnus tantum constant, ex datis magnitudinibus, & ea de qua quæritur neque in promptu est quomodo datæ magnitudines à quæsita separari possint, seruata proportione quacunque; idcirco resoluenda est proportio ad æqualitatem, vt factum sub extremis proportionalium terminis, æquale sit facto sub medijs ea igitur resoluta.

R in B + R in A æquabitur S in B — S in A D

Addito vtrique parti S in A

R in B + R in A + S in A æquabitur S in B

Et ablato vtrinque R in B.

R in A + S in A æquabitur S in B — R in B,

Seu quod idem est, R + S in A æquabitur S — R in B

Et æqualitate ad proportionem reuocata, erit

vt R + S ad S — R ita B ad A

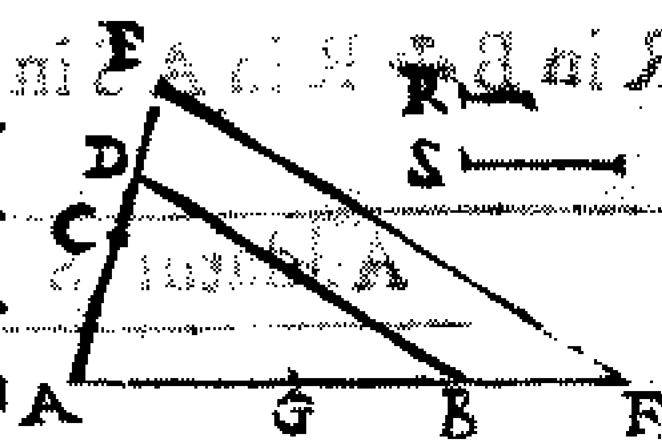
Hinc

A Hinc

Porisma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita est data ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Compositio primi casus.



SIt data recta linea A B, data autem ratio R ad S minoris ad maius. Oportet ipsi A B alteram rectam adiungere, vt excessus quo data superat adiunctam, ad aggregatum earundem sit, vt R ad S. Po-
B natur A C æqualis S constituens cum A B angulum quemcunque eaq; duplicetur in E, & sumatur C D æqualis R. itaq; differentia ipsarum A C, C D, erit D E, aggregatum vero A D. iungatur autem D B, eiq; parallela agatur E F occurrens continuatæ A B in F, erit igitur vt A D ad D E ita A B ad B F, hoc est, vt aggregatum terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita data ad adiunctam, atque adeo factum erit quemadmodum Porisma docet. Nunc autem demostrandum est vt R ad S, ita esse differentiam rectarum A B, B F ad A F, idq; per repetitionem vestigiorum resolutionis ducendo initium à fine, ita fit manifestum. Sumatur B G æqualis B F, ergo differentia rectarum A B, B F erit
C A G. Et quoniam est vt A D ad D E ita A B ad B F, resoluta ad æqualitate proportione, rectangulum sub extremis A D, B F æquale erit rectangulo sub medijs D E, A B. nam cum in fine resolutionis æqualitas ad proportionem sit reuocata; in principio demonstrationis proportio ad æqualitatem, resoluenda est, quod enim postremum est in resolutione, id in compositione primum esse debet. Cum igitur rectangulum A D, B F quod constat rectangulis A C, B F C D, B F, æquale sit rectangulo D E, A B, cui æquatur rectangulum C E, A B minus rectangulo C D, A B, erit rectangulum A C, B F vnà cum rectangulo C D, B F æquale rectangulo C E, A B, minus rectangulo C D, A B. addatur vtrique parti rectangulum C D, A B, quia in resolutione detractum fuit, ergo rectangulum A C, B F vnà cum rectangulis C D
D B F, C D, A B, æquale erit rectangulo C E, A B; hoc est rectangulo C A B, sunt enim æquales A C, C E. auferatur vtrinque rectangulum A C, B F, additum enim fuit in resolutione; ergo rectangulum C D, B F vnà cum rectangulo C D, A B, hoc est rectangulum C D, A F, æquabitur rectangulo C A B, minus rectangulo A C, B F, hoc est æquabitur rectangulo C A G, & reuocata ad proportionem æqualitate, cum in resolutione proportio ad æqualitatem sit resoluta, erit vt D C ad C A, hoc est vt R ad S, ita A G ad A F. Datæ igitur A B adiecta est B F, quarum differentia ad aggregatum rationem habet vt R ad S. quod erat faciendum.

A

Conspectus Resolutionis & Compositionis.

Principium Resolutionis	*Finis Compositionis*
R S B — A B ✠ A	hoc est R S AG AF DC CA
ad æqualitatem	ad proportionem
R in B ✠ R in A S in B — S in A	hoc est VCDAF ✠ VCDAB VCDBF | hoc est VCAG — VACBF VCAB
Addatur S in A	auferatur VACBF
R in B ✠ R in A ✠ S in A | S in B	✠ VCDAB ✠ VCDBF VACBF | hoc est VCAB VCEAB
auferatur R in B	addatur VCDAB
R in A ✠ S in A S in B — R in B seu R ✠ S in A | S — R in B.	✠ VCDBF hoc est VACBF VADBF | — VCDAB hoc est VCEAB VDEAB
ad proportionem	ad æqualitatem
R ✠ S S — R B A	AD DE AB BF
Finis Resolutionis	*Principium Compositionis*

B

C

Scholium.

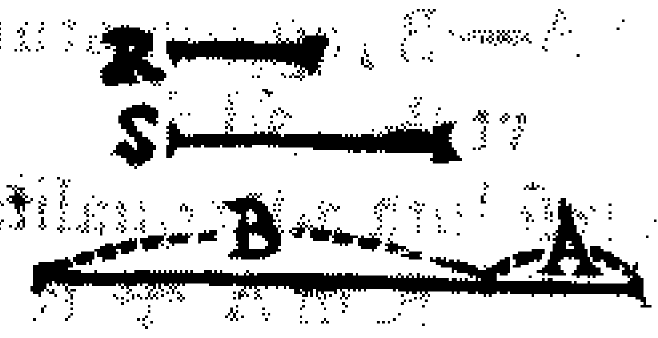
Satis est per repetitionem vestigiorum Resolutionis inuenisse demonstrationem, neque ad eam explicandam necesse est omnino Resolutionis vestigia sequi; potest enim ipsa demonstratio, cognitis iam medijs alia quoque via aliquando clariore, atque adeo elegantiore perfici; sed cum de Resolutione, & Compositione mihi agendum sit, vt proposui à gressibus Resolutionis in Compositionibus seu demonstrationibus non recedam; licet ipsas demonstrationes rudes, & incultas prout ex Resolutionibus nascentur exposuero, sic enim apertius patebit quomodo demonstratio per filium Resolutionis procedat. D

Idem autem casus alia quoque via breuiori, ac faciliori poterit, & resolui, & componi sine vllo à proportione ad æqualitatem transitu; quamuis non appareat quomodo magnitudines datæ à quæsita separari possint, seruata proportione quacunque; nam satis est, vt tres proportionis termini constent ex datis magnitudinibus, quod in Casibus similibus commodè fieri potest; quartus autem terminus etiam si constet ex dato & quæsito, nihil refert.

Altera

A

Altera Resolutio eiusdem casus.



SIt data recta linea B, & oportet facere quod imperatum est. Factũ iam sit, & adiuncta de qua quæritur estò A. Excessus igitur quo data superat adiunctam erit B—A aggregatum vero earundem B + A & erit

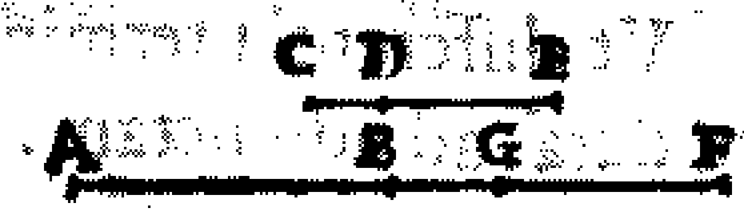
vt R ad S ita B—A ad B + A

Et componendo erit vt R + S ad S ita B 2 ad B + A.

Porisma.

B Vt aggregatum terminorum rationis datæ, ad terminum secundum, ita est data dupla ad compositam ex data, & adiuncta.

Altera Compositio eiusdem casus.



SIt data recta linea A B, cui oporteat alteram rectam adiungere, vt excessus quo data superat adiunctam, ad compositam ex data, & adiuncta sit, vt C D ad D E, quarum C D sit minor. Duplicetur A B in F, & ponantur in directum C D, D E, & fiat vt C E ad E D, ita A F ad aliam, quæ sit A G, ea maior erit, quam A B dimidia videlicet ipsius A F, quoniam & E D maior est, quàm dimidia C E, ponitur enim C D minor, quàm D E. Itaque factum

C est vt docet Porisma. Rectam autem B G problema efficere, sic demonstrabimus. Quoniam enim vt C E ad E D, ita est A F ad A G, erit diuidendo, vt C D ad D E, ita F G ad G A, cum enim in resolutione factus sit transitus per compositionem rationis, in demonstratione fieri debet per diuisionem rationis, vt dictum est in antecedenti problemate, sed F G est excessus, quo B F, vel A B superat ipsam B G, ergo vt C D ad D E, ita erit excessus, quo A B superat B G, ad compositam ex A B, B G, data videlicet, & adiuncta. Quare factum est quod oportebat.

Conspectus Resolutionis, & Compositionis.

D *Initium Resolutionis* *Finis Compositionis*

	R	S	B—A	B + A	diuidendo	CD	DE	FG	GA
componendo	R + S	S	B 2	B + A		CE	ED	AF	AG

Finis Resolutionis *Initium Compositionis*

Resolutio secundi casus.

SIt data recta linea B, ratio autem, vt R ad S minoris ad maius. Oportet ipsi B alteram rectam adiungere, vt excessus quo adiuncta su-

perat

perat datam, ad aggregatum earundem sit, vt R ad S. A

Sit factum, & adiuncta esto A, excessus igitur, quo adiuncta superat datam, erit A — B, aggregatum vero earundem A + B, & erit

vt R ad S, ita A — B ad A + B.

Et resoluta ad æqualitatem proportione

R in A + R in B æquabitur S in A — S in B

addito vtrique parti S in B

R in A + R in B + S in B æquabitur S in A.

Et detracto R in A

R in B + S in B æquabitur S in A — R in A.

Seu quod idem est R + S in B æquabitur S — R in A.

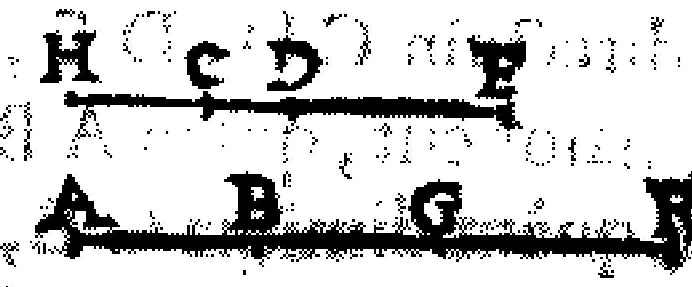
Et æqualitate ad proportionem reuocata, erit B

vt S — R ad R + S ita B ad A.

Porisma.

Vt differentia terminorum rationis datæ, ad aggregatum eorundem, ita est data, ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Compositio secundi casus.



Sit data recta linea A B, cui oporteat alteram rectam apiungere, vt excessus quo adiuncta superat datam ad aggregatum earundem sit, vt C D ad D E, minor nempe ad maiorem. Duplicetur E D in H, & fiat vt H C ad C E, ita A B ad aliam, quæ sit B F, hoc est, vt differentia terminorum rationis datæ, ad aggregatum eorundem, ita data ad adiunctã, sic enim Porisma fieri docet. Nunc autem ostendendum est, rectum B F problema efficere. Sumatur B G æqualis B A, igitur B F superat ipsam A B excessu G F. Et quoniam est vt H C ad C E, ita A B ad B F, rectangulum sub medijs C E, A B, hoc est duo rectangula C D A B, D E A B æqualia erunt rectangulo sub extremis H C, B F, hoc est rectangulo H D, B F, minus rectangulo C D, B F, addito vtrique parti rectangulo C D, B F: demptum enim fuit in Resolutione, ergo rectangula C D B F, C D A B, D E A B, æqualia erunt rectangulo H D B F, hoc est D E B F, & ablato vtrinque rectangulo D E A B, seu D E B G, fuit enim additum in resolutione, rectangula C D B F, C D A B, hoc est rectangulum C D A F, æquabitur rectangulo D E B F, minus rectangulo D E B G. hoc est æquabitur rectangulo D E G F, & æqualitate ad proportionem reuocata, fuit enim in resolutione proportio ad æqualitatem resoluta, erit vt C D ad D E, ita G F ad F A, hoc est ita excessus quo B F adiuncta superat A B datam, ad aggregatum earundem. Datæ igitur A B adiuncta est B F vt faciendum erat.

Conspe-

A

Conspectus Resolutionis & Compositionis.

	Resolutio		Compositio	
	Initium Resolutionis		*Finis Compositionis*	
	R S A — B A + B		CD DE GF FA	
	ad æqualitatem		ad proportionem	
	R in A + R in B	S in A — S in B	hoc est V CD AF + V CD AB V CD BF	hoc est V DE GF — V DE BG V BE BF
	Addatur S in B		auferatur V DE AB seu V DE BG	
B	R in A + R in B + S in B	S in A	+ V DE AB + V CD AB V CD BF	hoc est V DE BF V HD BF
	auferatur R in A		addatur V CD BF	
	R in B + S in B seu quod idem est R + S in B	S in A — R in A S — R in A	+ V DE AB hoc est V CD AB V CE AB	— V CD BF hoc est V HD BF V HC BF
	ad proportionem		ad æqualitatem	
C	S — R R + S B A		HC CE AB BF	
	Finis Resolutionis		*Initium Compositionis*	

Et hic Casus poterit resolui, & componi, etiam si nullus à proportione ad æqualitatem fieret transitus, hac ratione.

Altera Resolutio secundi casus.

Iisdem datis quæratur adiuncta, vt in antecedenti resolutione. erit

vt R ad S ita A — B ad A + B

D Et conuertendo vt S ad R ita A + B ad A — B

Et diuidendo vt S — R ad R ita B 2 ad A — B

Porisma.

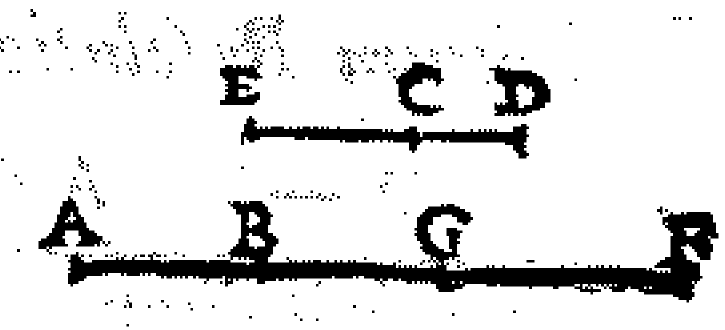
Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum priorem, ita est data dupla ad excessum, quo adiuncta superat datam.

Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Altera Compositio secundi casus.

A

Sit datæ rectæ A B addenda altera recta, vt excessus adiectæ supra datam, ad aggregatum earundem sit, vt C D ad D E. Duplicetur A B in G, & fiat, vt E C ad C D, differentia videlicet terminorum rationis datæ, ad terminum priorem, ita A G ad aliam, quæ sit G F, sic enim Porisma docet. Dico B F Problema efficere. Quoniam enim, vt E C ad C D, ita est A G ad G F, erit componẽdo, vt E D ad D C, ita A F ad F G, & conuertendo, vt C D ad D E, ita G F ad F A. Datæ igitur A B adiecta est B F, cuius excessus G F supra datam A B se habet ad A F, compositam ex data, & adiecta, vt C D ad D E; quod facere oportebat. B



Conspectus Resolutionis, & Compositionis.

Initium Resolutionis	*Finis Compositionis*
R S A — B A + B	C D D E G F F A
conuertendo	conuertendo
S R A + B A — B	E D D C A F F G
diuidendo	componendo
S — R R B_2 A — B	E C C D A G G F
Finis Resolutionis	*Initium Compositionis*

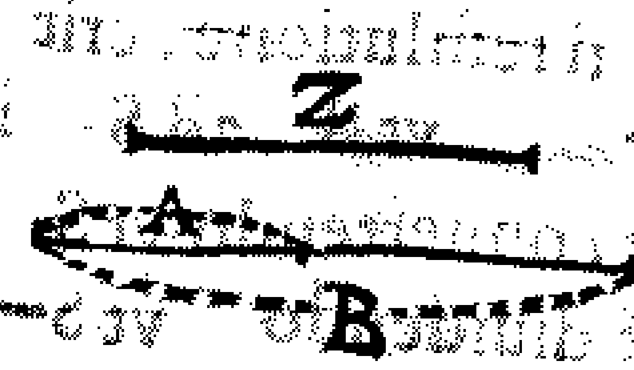
C

Problema IV.

Datam rectam lineam in duas partes diuidere, vt partium quadrata, dato quadrato differant. Oportet autem latus quadrati dati minus esse data secunda.

Resolutio.

Sit data recta linea B secanda in duas partes, vt quadratum partis maioris superet quadratum minoris partis quadrato datæ Z.



Ponatur factum esse, & differentia partium esto A. D

Corol. I. Probl. I. ergo B + A erit* maior pars dupla, & B — A dupla minor, vnde simpla pars maior erit B $\frac{1}{2}$ + A $\frac{1}{2}$, simpla minor B $\frac{1}{2}$ — A $\frac{1}{2}$. Quadratum autem partis maioris est B Q $\frac{1}{4}$ + A Q $\frac{1}{4}$ + B in A $\frac{1}{2}$, quadratum vero partis minoris est B Q $\frac{1}{4}$ + A Q $\frac{1}{4}$ — B in A $\frac{1}{2}$. ablato igitur quadrato partis minoris à quadrato partis maioris, residuum erit B in A, idq; æquale est Z Q, differunt enim partium quadrata per quadratum Z datæ. ergo æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt B Z A.

Poris-

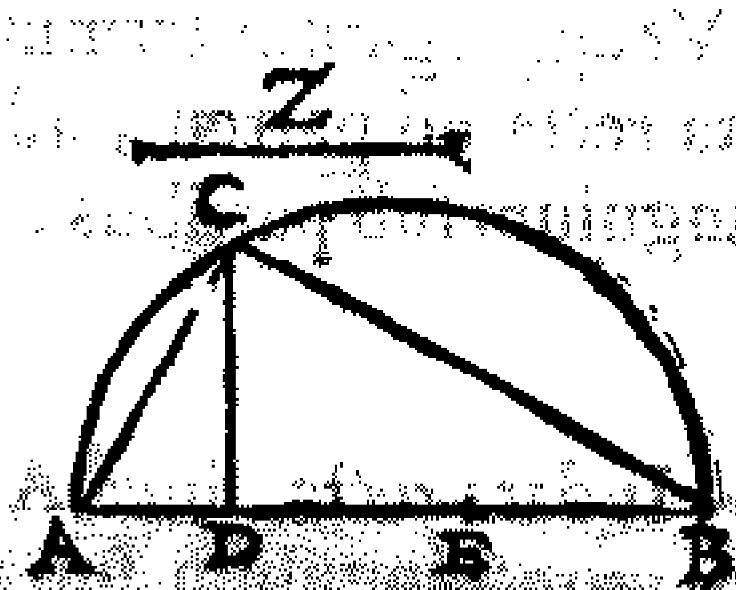
A

Porisma.

Latus quadrati dati medium proportionale est inter datam rectam, quæ secanda proponitur, & differentiam partium eiusdem.

Datur ergo differentia partium quæsita.

Compositio.



SIt data recta linea A B secanda in duæs partes, vt quadratum partis maioris superet quadratũ partis, minoris quadrato datæ Z, quæ minor sit ipsa A B. Describatur in A B semicirculus, in quo
B accomodetur A C æqnalis Z, & à puncto C demittatur in A B perpendicularis G D & secetur D B bifariam in E; differentia igitur partium A E E B erit A D, & ducta C B, angulus A C B in semicirculo rectus erit; quare A C cui æqualis est Z erit media linea proportionalis inter B A A D, itaque secta est A B in E, prout Porisma docet. Nunc ostendendum est differentiam quadratorum A E E B, æquari quadrato Z. Quoniam igitur proportionales sunt B A A C A D, quadratum mediæ A C æquale erit rectangulo B A D, sed rectangulum B A D comprehensum sub tota B A, & A D differentia partium A E E B, æquale est differentiæ quadratorum A E E B, ergo & quadratum A C æquale erit eidem differentiæ quadratorum A E E B. Secta est igitur
C A B in E vt Problema postulat quod faciendum erat.

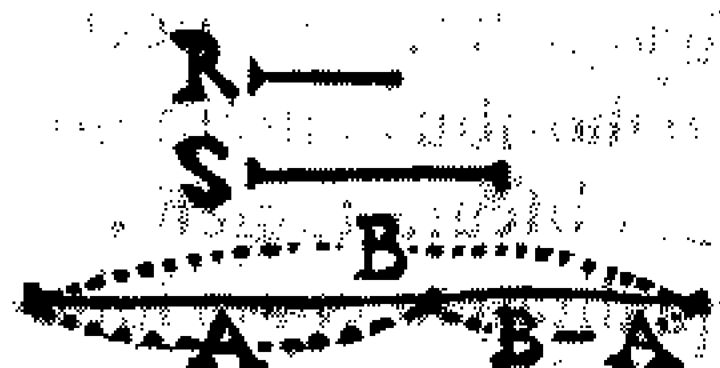
Coroll. prop. 8. sexti

Theor. I

Problema V.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium rationem habeat datam.

Resolutio.



SIt data recta linea B secanda in duas partes, vt rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium sit vt R ad S.

D Sit iam secta, & pars ad cuius quadratum datam rationem habet rectangulum sub partibus esto A, ergo pars altera erit B—A, atque erit

vt R ad S, ita B in A — A Q, ad A Q. hoc est ita rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium.

Quare resoluta ad æqualitatem analogia

R in A Q æquabitur S in B in A — S in A Q

Applicentur omnia ad A vt aliqua magnitudo sit omnino data, cui magnitudines incertæ comparabuntur, ergo

R in A æquabitur S in B — S in A

Addito

Addito vtrique parti S in A, vt cognita ab incognitis separentur. A

R in A ✣ S in A æquabitur S in B.

Seu quod idem est, R ✣ S in A æquabitur S in B,

Et reuocata ad proportionem æqualitate, proportionales erunt

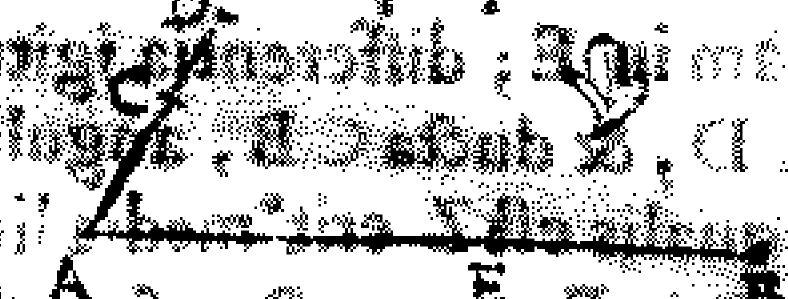
R ✣ S S B A.

Porisma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum secundum, ita est data recta ad partem, ad cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum sub partibus. Datur ergo pars quæsita.

Compositio.

Sit data recta linea A B, quam oportet secare vt rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium rationē habeat vt D C ad C A. B



Coroll. prop. 8. lem. Ponatur D C C A, & fiat vt A D ad A C, ita A B ad aliam quæ sit A E sicuti Porisma iubet, ergo rectangulum D A E sub extremis, hoc est duo rectangula D C A E, & C A E, æqualia erunt rectangulo C A B sub medijs. auferatur vtrinque rectangulum C A E, ergo rectangulum D C A E æquale erit rectangulo C A B, minus rectangulo C A E, hoc est æquale erit rectangulo C A E B. Ducantur omnia plana in A E vt fiant solida, in resolutione enim omnia solida depressa sunt ad plana applicatione eadem A B, ergo solidum sub D C & quadratum A E æquale erit solido sub C A A E E B, & reuocata ad proportionem æqualitate, erit vt D C ad C A, ita rectangulum A E B ad quadratum A E. Secta est igitur A B in E, vt rectangulum A E B ad quadratum A E rationem habeat, vt D C ad C A. quod erat faciendum. C

Scholium.

Plures viæ sunt quibus Problemata resoluuntur; aliæ quidem faciles, quæ sua quasi sponte occurrunt, aliæ vero cum aliquo difficultate inueniuntur. Ex facilioribus autem nonnunquam oriuntur demonstrationes, quæ verissimæ, subobscuræ tamen, ac parùm vsitatæ, qualis est superior demonstratio per æqualitatem etiam solidorum procedens, quibus in planorum Problematū demonstrationibus non est vtendum; iniquum enim quodammodo videtur ad planorum Problematum demonstrationes perficiendas solida cōtrahere, hoc est ea quæ non proprie homogenea sunt demonstrare. Ne igitur in demonstratione plani problematis, solidis vtar, idem Problema aliter resoluam & componam. D

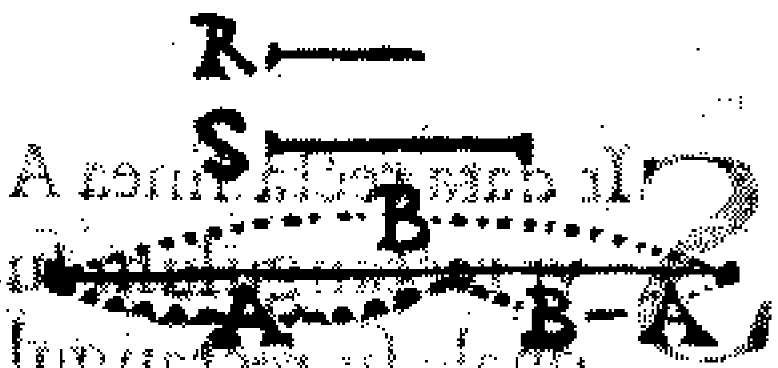
Altera Resolutio eiusdem Problematis.

Sit data recta linea A B, quam oportet secare vt rectangulum sub partibus ad quadratum alterius partis rationem habeat, vt R ad S.

Secta iam sit & pars ad cuius quadratum datam rationē habet rectangulum

A gulum sub partibus esto A, quemadmodum positum est in antecedenti resolutione, ergo altera pars erit B—A. Quoniam igitur est vt R ad S, ita rectangulum sub partibus ad quadratum alterius partis, erit

vt R ad S ita B in A — A Q ad A Q



& componendo erit, vt R + S ad S, ita B in A ad A Q: Sed B in A ad A Q est vt B ad A, sunt enim eiusdem altitudinis rectangulum B in A & A quadratum, cùm sit vtriusque altitudo A; ergo erit

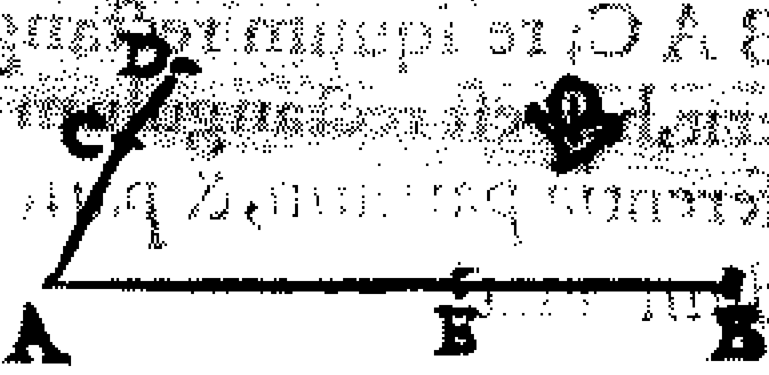
vt R + S ad S, ita B ad A

Porisma.

B Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum secundum, ita est recta data, ad partem ad, cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum sub partibus.

Illud ipsum est, quod per antecedentem resolútionem inueniebatur. Datur ergo pars quæsita.

Altera Compositio eiusdem Problematis.



Sit data recta linea A B, quam oporteat secare, vt rectangulum sub partibus ad quadratum alterius partis rationem habeat, vt D C

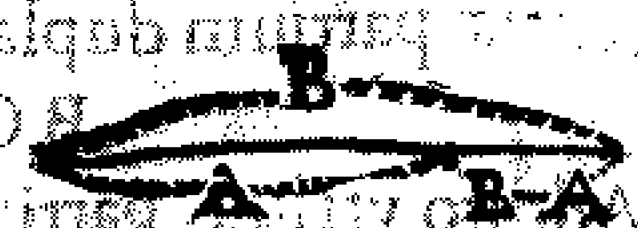
C ad C A. Ponantur in directum A C C D, & fiat, vt A D ad A C, ita A B ad aliam, quæ sit A E, sic fieri Porisma docet, ergo diuidendo erit, vt D C ad C A, ita B E ad E A, ita est rectangulum B E A ad quadratum E A, cùm sint eiusdem altitudinis E A, ergo vt D C ad C A, ita erit rectangulum B E A ad quadratum E A. Secta est igitur A B in E, vt Problema postulat. quod erat faciendũ.

Problema VI.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & parte minore æquale sit rectangulo sub differentia partium, & parte maiore.

D

Resolutio.



Sit B data recta secanda, vt petitur. Ponatur iam factum. & pars maior, de qua quæratur esto A, ergo B— A erit pars minor, harum partium differentia erit A 2 — B; si enim ab A auferatur B — A, remanebit A 2 — B. Quoniam igitur rectangulu m sub tota, & parte minori æquale est rectangulo sub differentia partium, & parte maiori.

B Q — B in A æquabitur A Q 2 — B in A

Addatur vtrobique B in A, ergo

B Q æquabitur A Q 2

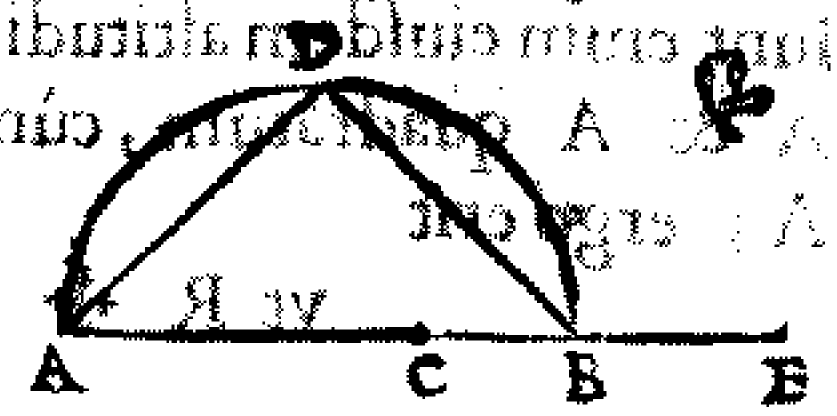
C Po-

Porisma.

Quadratum totius rectæ secandæ duplum est quadrati à maiore parte descripti. Datur ergo maior pars quæsita. A

Compositio.

SIt data recta linea A B, quam oporteat secare, vt rectangulum sub tota, & parte minori æquale sit rectangulo sub differentia partiũ, & parte maiori. Describatur in A B semicircu-lus, cuius circumferentia secetur bifariam in D, &



47. primi connectantur A D, D B. quadrata igitur æqualium A D, D B * æqualia erunt quadrato A B, angulus enim A D B in semicirculo rectus est, vnde quadratum A B duplum erit quadrati A D. Fiat ergo A C æqualis A D, & factũ erit quemadmodum Porisma docet: secta est enim A B in C, vt quadratum ipsius A B duplum sit quadrati A C. Nunc ostendendum est eam sectionem Problema efficere. Producatur enim C B in E, vt sit C E æqualis C A, itaque differentia partium A C, C B erit B E. Et quoniam quadratum A B duplum est quadrati A C; hoc est æquale rectangulo E A C, si auferatur commune rectangulum B A C; reliquum rectangulum A B C, reliquo rectangulo E B, A C, æquale erit, hoc est rectangulum sub tota, & parte minori æquale rectangulo sub differentia partium, & parte maiori. Secta est igitur A B in C, & quod faciendum erat. B

Problema VII.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus comprehensum æquale sit ei, quod à differentia partium, fit quadrato. C

Resolutio.

SIt data recta linea B secanda vt petitur. Ponatur enim recta, & differentia partium esto A, ergo B

Corol. 1. Probl. 1. + A* erit pars maior dupla, & B — A pars minor dupla. Et quoniam rectangulum sub partibus æquale est quadrato differentiæ partium, rectangulum sub partibus duplis æquale erit quadrato differentiæ partium duplæ, hoc est D

$$B\,Q - A\,Q \text{ æquabitur } A\,Q\ 4$$

Addito vtrique parti A Q, vt quæsitum à dato separetur

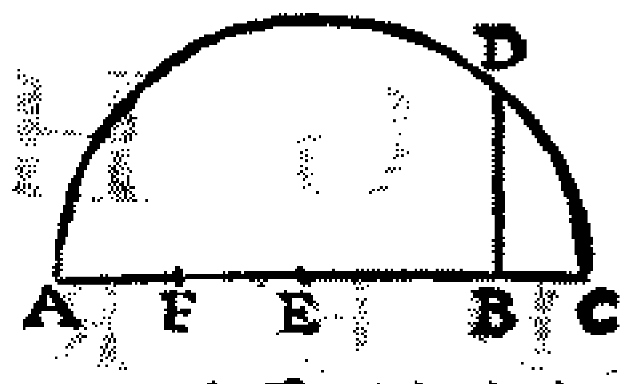
$$B\,Q \text{ æquabitur } A\,Q\ 5$$

Porisma.

Quadratum totius secandæ quintuplum est quadrati differentiæ partium. Datur ergo differentia partium quæsita.

A

Compositio.



SIt data recta linea AB, quã oportet secare, vt rectangulum sub pedibus æquale sit quadrato differẽtiæ partium. Producatur A B in C, vt B C sit æqualis quintæ parti ipsius A B, & in A C describatur semicirculus A D C, & ex B erigatur ad A C perpendicularis B D, cui æqualis fiat B E, & reliqua E A secetur bifariam in F: differẽtia igitur partium A F, F B erit E B, & cũ sit A B quintupla ipsius B C, quadratum A B quintuplum erit rectanguli A B C, hoc est quadrati B D, vel B E. Secta est igitur A B in F, prout Porisma docet. Rectangulũ autẽ A F B sub partibus æquale
B esse quadrato E B differentiæ partium vt Problema requirit, sic demonstrabo. Quoniam enim quadratum A B quintuplum est quadrati B E, seu æquale est quintuplo quadrati B E, ablato vtrinq; quadrato B E, quadratũ A B minus quadrato B E, *æquale est quadruplo rectangulo A F B, cùm sit B E differẽtia ipsarum A F, F B, ergo quadruplum rectangulum A F B æquabitur quadruplo quadrato B E, & consequenter simplum simplo. Secta est igitur A B in F, vt rectangulum A F B sub partibus æquale sit quadrato E B differentiæ partium; quod faciendum erat. Theor. 3.

Si quis voluerit peracta Problematis resolutione Porisma, quod ex ipsa resolutione deducitur, in formam Theorematis proponere, ac demonstrare; demonstratio fiet per repetitionem vestigiorũ resolutionis, directo ordine non retro-
C grado. Plurimis autem Problematibus potest satisfieri demonstratione Porismatis tantum, præcipuè quando Problema numero explicandum est, exemplũ subijciam quo sit res dilucidior. Itaque Porisma proximè præcedens proponetur in formam Theorematis, & demonstrabitur hac ratione.

Theorema.

Si recta linea secetur, ita vt rectangulum sub partibus comprehensum æquale sit ei, quod à differentia partium fit quadrato, quadratum totius rectæ quintuplum erit quadrati differentiæ partium.

SEcta sit recta A B in F, ita vt rectangulum A F B
D æquale sit quadrato differẽtiæ partium A F, F B.
Dico quadratum A B quintuplum esse quadrati differẽtiæ ipsarum partium A F, F B: à maiori enim parte, quæ sit F B auferatur F E æqualis F A, reliqua E B erit differentia partium A F, F B. Et quoniam rectangulum A F B ponitur æquale quadrato E B, quadruplum rectãgulum A F B quadruplo quadrato E B æquale erit, sed quadruplum rectangulum A F B *æquale est quadrato A B, minus quadrato E B, ergo quadratũ A B, minus quadrato E B, æquale erit quadruplo quadrato E B, addito vtriq; parti quadrato E B, quadratum A B æquale erit quintuplo quadrato E B, hoc est quadratũ A B, quintuplum erit quadrati E B. quod erat ostendendum. Theor. 3.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, & Compositione Mathematica.

LIBER SECVNDVS.

INTERDVM accidit fractionem magnitudini integræ æquari, eamq. oportere in sua membra resolui; ita vt equalitas in proportionem transmutetur: id enim plerumq; fieri expedit, ne plena in progressu resolutionis ad solida, vel etiam ad plano-plana ascendant. Nam si fractio plana reducenda esset ad denominationem integram; manente inter partes equalitate, oporteret omnia plana tùm fractionem, tùm quibus equatur ipsa fractio ducere in denominatorem fractionis; quo onere, equalitas quidem non immutaretur, sed plana ad solida, vel ad plano-plana ascenderent, quibus in planorum Problematum resolutionibus, & compositionibus non est vtendum ob rationes in scholio quinti Problematis libri primi allatas. Scire autem oportet, non omnem fractionem posse in sua membra resolui, nisi eam cuius numerator resolubilis est in duas magnitudines, quæ ductu suo efficiunt ipsum numeratorem. Dicendum igitur est quomodo fractio magnitudini integræ æqualis numeratorem habens resolubilem in duas magnitudines, ductu suo ipsum numeratorem efficientes, resoluatur in sua membra, vt æqualitas in proportionem transmutetur.

A

B

Resoluitur dicta fractio in sua membra hac ratione. Denominator fractionis, & magnitudo integra, cui æquatur ipsa fractio, ponantur pro extremis quatuor proportionalium terminis; magnitudines verò, que ductu suo efficiũt numeratorem, ponantur pro medijs, vel contra magnitudines numeratorem efficientes ponantur pro extremis; denominator verò & magnitudo integra pro medijs, seruata hac conditione, vt primus terminus & secundus sint eiusdem generis, quia magnitudines diuersi generis non possunt inter se comparari. Constitui quatuor proportionales terminos quoniam & si tres etiam possunt constitui, medium pro duobus intelligo, is enim bis sumitur, quæ igitur, vt fiat euidentiora, Proponatur $\frac{B\,Q}{D}$ æquari A, & oporteat fractionem $\frac{B\,Q}{D}$ in sua membra resoluere, vt æqualitas in proportionem transmutetur. Fiant extremi termini D & A, medius vero B, eos autem proportionales esse

C

ma-

A manifestum est. nam cum sit vt D ad B, ita B ad $\frac{B\,Q}{D}$, fractio autem $\frac{B\,Q}{D}$ æqualis A, erit, vt D ad B, ita B ad A. factum est igitur, quod imperabatur. Rursus $\frac{B\,C}{A}$ æquetur D Q, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A & D Q, medij vero B, & B Q, eos autem proportionales esse manifestum est, nam cum sit vt A ad B, ita B Q ad $\frac{B\,C}{A}$, & $\frac{B\,C}{A}$ æqualis D Q, erit vt A ad B, ita B Q ad D Q. factum est igitur, quod oportebat.

Deinde $\frac{B \text{ in } D}{A}$ æquetur G, & sit resoluenda fractio, vt dictum est. Fiant extremi termini A & G, medij vero B & D. Quoniam igitur est, vt A ad B, ita D ad $\frac{B \text{ in } D}{A}$, & fractio $\frac{B \text{ in } D}{A}$ æqualis G, erit vt A ad B, ita D ad G.

Vel contra fiant extremi termini B & D, medij vero A & G. Quoniam igitur $\frac{B \text{ in } D}{A}$ ponitur æquari G, ductis omnibus in A, B in D æquabitur G in
B A, & æqualitate ad proportionem reuocata, erit vt B ad G, ita A ad D. fractio igitur $\frac{B \text{ in } D}{A}$, cui æquabatur G, resoluta est in sua membra, & ęqualitas transmutata in proportionem, quod faciendum erat. Item $\frac{B \text{ in } D}{A + G}$ ęquetur F, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A + G & F, medij verò B & D, vel contra fiant extremi B & D, medij vero A + G & F, eos proportionales esse demonstrabimus eadem ratione qua supra.

Amplius $\frac{B \text{ in } D \text{ in } G}{A}$ ęquetur F Q, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A, & F Q, medij vero B, & D in G, vel G, & B in D, vel etiam D & B in G. Quoniam igitur est, vt A ad B, ita D in G ad $\frac{B \text{ in } D \text{ in } G}{A}$ ipsaque fractio ęqualis F Q, erit vt A ad B, ita D in G ad F Q, & reliqua demon-
C strabuntur, vt supra. Similiter si medij termini ponantur pro extremis, extremi vero pro medijs, iidem proportionales erunt.

Item $\frac{B \text{ in } D + G \text{ in } D}{A}$ ęquetur F, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A, & F, medij vero B + G & D, vel contra. Quoniam igitur est, vt A ad B + G, ita D ad $\frac{B \text{ in } D + G \text{ in } D}{A}$ eaque fractio ęqualis est F erit vt A ad B + G ita D ad F. Quare factum est quod imperabatur.

Sed $\frac{B\,Q - D\,Q}{G}$ æquetur A, & oporteat iussum facere. Ponantur pro extremis terminis G & A; pro medijs vero B + D & B — D, vel contra. Quoniam igitur est, vt G ad B + D, ita B — D ad $\frac{B\,Q - D\,Q}{G}$, ipsaque fractio æqualis est A; erit vt G ad B + D, ita B — D ad A. Quare factum est quod oportuit.

Vel $\frac{B\,Q + D\,Q + B \text{ in } D\,2}{A}$ æquetur F, & oporteat facere, quod imperatum est.
D Fiant extremi termini A & F, medius verò B + D, eos autem proportionales esse manifestum est, nam cum sit, vt A ad B + D, ita B + D ad $\frac{B\,Q + D\,Q + B \text{ in } D\,2}{A}$, ipsaque fractio ęqualis sit F, erit vt A ad B + D, ita B + D ad F. Factum est igitur quod oportebat.

Denique $\frac{B\,Q \text{ in } D\,Q}{G\,Q}$ ęquetur A Q, & oporteat facere, quod imperatum est. Fiant extremi termini G Q, & A Q medius vero B in D. Quoniam igitur est, vt G Q ad B in D, ita B in D ad $\frac{B\,Q \text{ in } D\,Q}{G\,Q}$, ipsaque fractio ęqualis est A Q, erit vt G Q ad B in D, ita B in D, ad A Q. factum est igitur quod imperabatur.

Vel fiant extremi termini, vt prius GQ, & AQ, medij verò BQ, & DQ. A
Eadem ratione ostendetur, vt GQ ad BQ, ita esse DQ ad AQ. factum est igitur quod oportebat.

Item $\frac{D \text{ in } GQ}{D - G}$ æquetur BQ, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini D — G, & BQ, medij verò D, & GQ. eadem ratione qua supra ostendetur, vt D — G ad D, ita esse GQ ad BQ.

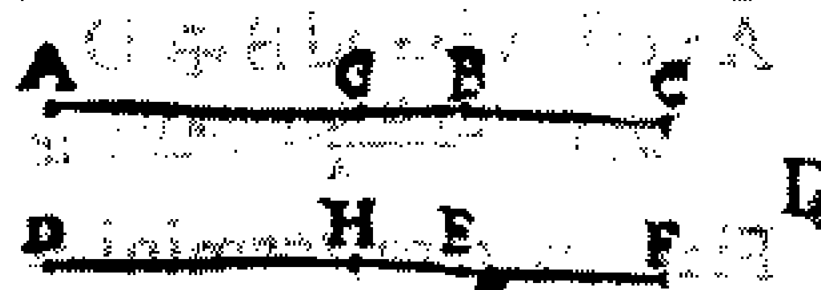
Vel fiant medij termini G, & D in G. Quoniam igitur est, vt D — G ad G, ita D in G ad $\frac{D \text{ in } GQ}{D - G}$ ipsaque fractio æqualis est BQ; erit vt D — G ad G, ita D in G ad BQ. factum est igitur quod oportebat.

Eadem ratione omnes aliæ fractiones, quæ magnitudini integræ æquantur, numeratoremq. habent resolubilem in duas magnitudines, quæ ductu suo efficiunt ipsum numeratorem; poterunt in sua membra resolui, vt æqualitas in B
proportionem transmutetur. Atque hæc quidem de transmutatione æqualitatis in proportionem per resolutionem fractionis sufficiant.

Fractiones autem quarum numerator non est resolubilis, vt dictum est, non possunt in sua membra resolui; poterit tamen æqualitas in proportionē transmutari hac ratione. Denominator fractionis, & magnitudo integra, cui ipsa fractio æquatur, ponantur pro extremis trium proportionalium terminis; latus vero vniuersale numeratoris, ponatur pro medio. Exempli gratia proponatur $\frac{B \text{ in } D + F \text{ in } G}{H}$ æquari A, & oporteat æqualitatem in proportionem transmutare. Ponantur pro extremis terminis H & A; pro medio vero ponatur L. V. B in D + F in G. Eos autem proportionales esse manifestum est; nam cum sit vt H ad L. V. B in D + F in G, ita idem L. V. B in D + F in G ad G
$\frac{B \text{ in } D + F \text{ in } G}{H}$ ipsaque fractio æqualis sit A, erit vt H ad L. V. B in D + F in G, ita idem L. V. B in D + F in G, ad A, factum est igitur quod oportebat.

Theorema I.

Si secentur duæ rectæ lineæ æquales, ita vt rectangulum sub partibus vnius æquale sit rectangulo sub partibus alterius; partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior videlicet maiori, minor minori.



SEcentur duæ rectæ AB, CD æquales in GH, sitq. rectangulum AGB æquale rectangulo CHD. Dico partes AG, GB partibus CH HD æquales esse, maiorem videlicet maiori, minorem minori. Secetur enim vtraque AB, CD bifariam in punctis EF. Quoniam igitur sectæ sunt AB, CD in æqualia & non æqualia, rectangulum AGB vna cum quadrato EG* æquale est quadrato AE. Similiter & rectangulum CHD vna cum quadrato FH* æquale quadrato CF, quæ quidem quadrata AE, CF æqualia sunt cum sint æquales rectæ AE, CF, ergo rectangulum AGB vnà cum quadrato EG æquale erit rectangulo CHD vnà cum quadrato FH; auferantur æqualia rectangula AGB, CHD, ergo reliquum quadratum EG

5 secundi.

5 secundi.

reli-

reliquo quadrato F H æquale erit, vnde & recta E G æqualis rectæ F H, & per additionem, vel subductionem æqualium æqualibus, erit A G æqualis C H, & G B æqualis H D, quod erat ostendendum.

Theorema II.

Si duæ rectæ lineæ æquales sectæ fuerint, atque quadrata partium vnius simul sumpta, æqualia fuerint quadratis partium alterius simul sumptis, partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior maiori, minor minori.

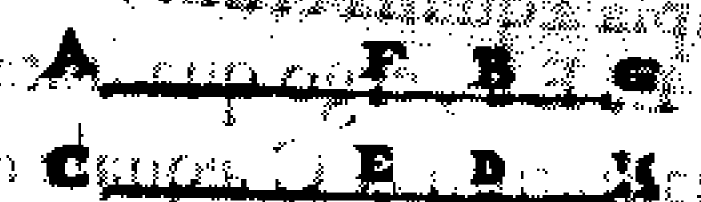
DVæ rectæ A B, C D æquales secentur in punctis G H, & sint quadrata A G, G B æqualia quadratis C H, H D. Dico partes A G, G B partibus C H, H D æquales esse maiorem maiori, minorem minori. Secetur enim vtraque A B, C D bifariam in E F. Quoniam igitur quadrata A G, G B * dupla sunt quadratorum A E, E G, & quadrata C H, H D * dupla quadratorum C F, F H, erunt quadrata A E, E G quadratis C F, F H æqualia; sed quadratum A E æquale est quadrato C F, ergo & reliquum quadratum E G reliquo quadrato F H æquale erit; vnde & recta E G æqualis rectæ F H; quare per additionem æqualium æqualibus, erit & A G æqualis C H, & reliqua G B æqualis reliquæ H D. Quare constat propositum.

9 secundi.
9 secundi.

Theorema III.

Si à duabus rectis lineis abscindantur partes æquales, & rectangulum sub tota, & parte reliqua vnius æquale sit rectangulo sub tota, & reliqua parte alterius; tota toti, & reliqua pars, reliquæ æqualis erit.

A Rectis A B, C D abscindantur partes æquales B E, D F, sitq. rectangulũ B A E æquale rectãgulo D C F. Dico A B, C D æquales esse, & æquales A E, C F. Secentur enim E B, F D bifariam in G H. Quoniã igitur rectangulum B A E ponitur æquale rectangulo D C F, & quadratum E G æquale est quadrato F H, rectangulum B A E vnà cum quadrato E G æquale erit rectangulo D C F vnà cum quadrato F H; sed quoniam sectæ sunt E B, F D bifariam, & ipsis in rectum adiectæ sunt E A, F C, rectangulum B A E vnà cum quadrato E G,* æquale est quadrato A G. similiter, & rectangulum D C F vnà cum quadrato F H * æquale quadrato C H; quadratum igitur A G æquale erit quadrato C H; vnde & recta A G æqualis rectæ C H, & additis æqualibus G B, H D tota A B æqualis erit toti C D, vel ablatis æqualibus E G, F H, reliqua E A, reliquæ F C æqualis erit. quod erat ostendendum.



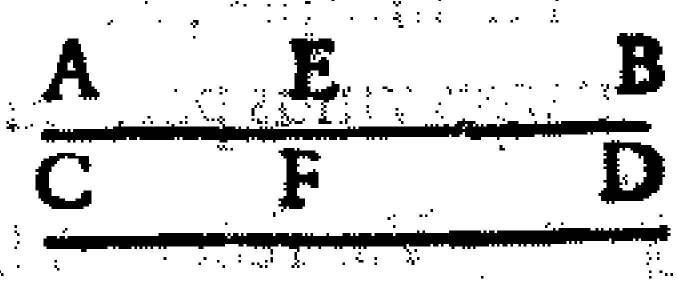
6 secundi.
6 secundi.

Theo-

 A

Theorema IV.

Si à duabus rectis lineis abscindantur partes æquales, & sit reliqua pars primæ ad reliquam secundæ, vt tota secunda ad totam primam; reliquæ quoque partes æquales erunt.



A Rectis A B, C D abscindantur partes æquales B E, D F; sitque A E ad C F, vt C D ad A B. Dico A E, C F æquales esse. Quoniam enim ponitur A E ad C F, vt C D ad A B; re-
16 sexti ctangulum B A E sub extremis* æquale erit rectangulo D C F sub medijs; ponuntur autem & partes E B, F D æquales, ergo ex antecedente Theoremate reliqua pars A E, reliquæ C F æqualis erit. B

Theorema V.

Si duo rectangula fuerint æqualia; fuerint autem & quadrata laterum primi æqualia quadratis laterum secundi. Latera primi lateribus secundi æqualia erunt, maius videlicet maiori, minus minori.

Theorema hoc demonstraui in libro variorum hic quoque eamdem demonstrationem transferam.

Sint æqualia rectangula A B C, D E F, & æqualia quoque quadrata A B, B C simul sumpta quadratis D E, E F simul sumptis. Dico rectas A B, B C rectis D E, E F æquales esse, maiorem videlicet maiori, minorem minori. C

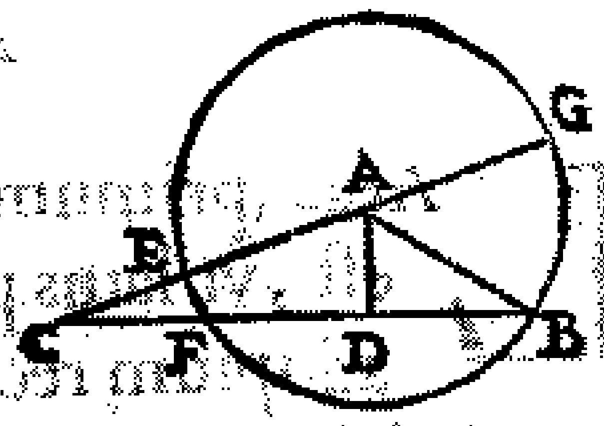
Quoniam enim ponuntur æqualia rectangula A B C, D E F, ea quoque dupla æqualia erunt, sed & quadrata A B, B C ponuntur æqualia quadratis
4 secundi D E, E F, ergo quadrata A B, B C vna cum duplo rectangulo A B C, hoc* est quadratum A C æquale erit quadratis D E, E F vnà cum duplo rectangulo
4 secundi D E F, hoc est* æquale erit quadrato D F; quare, & recta A C æqualis erit, rectæ D F. Secentur autem ipsæ A C, D F bifariam in G, & H. erunt igi-
5 secundi tur A G, D H æquales, & æqualia eorum quadrata, sed quadratum A G* æquale est rectangulo A B C vnà cum quadrato G B, & quadratum D H* æquale rectangulo D E F vnà cum quadrato H E, ergo rectangulum A B C vna cum quadrato G B, æquale erit rectangulo D E F, vna cum quadrato H E, demptis æqualibus rectangulis A B C, D E F, reliquum quadratum G B, reliquo quadrato H E æquale erit, vnde & recta G B æqualis rectæ H E, & per additionem, & subductionem æqualium æqualibus erit A B æqualis D E, & B C æqualis E F, quod erat ostendendum. D

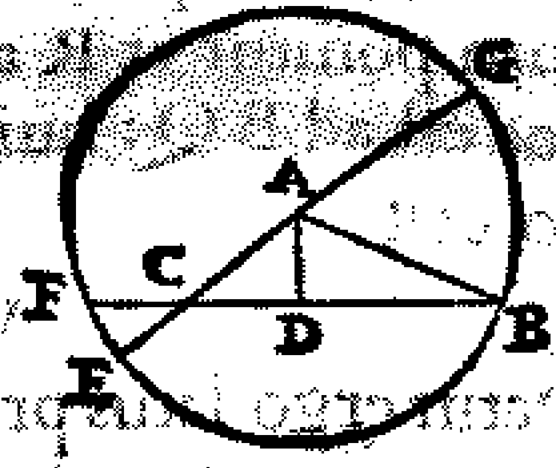
A

Theorema VI.

Rectangulum sub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem, æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base.

SIt triangulum D B C, in quo perpendicularis A D secet basim B C in duo segmenta B D, D C, & cẽtro A interuallo A B vnius crurum describatur circulus secans alterum crus A C etiam productum hinc inde in punctis E G; basim vero B C in F. crurum igitur A B, A C differentia erit C E; aggregatum verò
B G C, differentia autem segmentorum A D, D C erit C F, * sunt enim B D, D F æquales. Dico rectangulum E C G æquale esse rectangulo F C B. hoc manifestum est ex propos. 36. & 35. tertij elementorum. 3. tertii





Theorema VII.

Differentia crurum trianguli se habet ad differentiam segmentorum basis, vt basis ad aggregatum crurum.

REsumatur antecedentis Theorematis figura. Dico E C ad C F esse vt C B ad C G. Quoniam enim rectangulum E C G * æquale est 36. & 35. tertij
C rectangulo F C B, * proportionales erunt E C, C F, C B, C G. 16 sexti
quare constat propositum.

Problema I.

Dato quadrato, æquale rectangulum inuenire, cuius latera datam teneant rationem.

SIt datum B quadratum, cui æquale oporteat rectangulum inuenire habens latera in ratione, vt R ad S. Sit iam inuentum rectangulum illud, eiusque latus primum esto A, ergo latus secundum erit $\frac{S \text{ in } A}{R}$; est enim vt R ad S, ita A latus primum ad latus secundum. At rectangulum sub lateribus
D ponitur æquale B quadrato, ergo

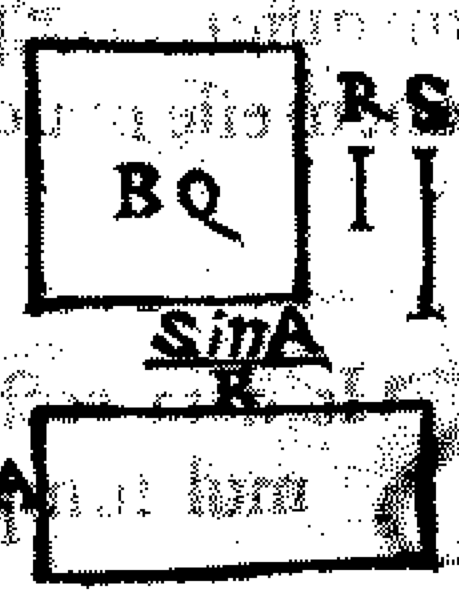
$$\frac{S \text{ in } AQ}{R} \text{ æquabitur } BQ$$

Resoluatur fractio $\frac{S \text{ in } AQ}{R}$ in sua membra, vt æqualitas in proportionem trãsmutetur, quemadmodum in principio huius libri docuimus, ergo proportionales erunt

R S AQ BQ

Et conuertendo proportionales erunt

S R BQ AQ



Po-

I Porisma.

Vt terminus secundus rationis datæ ad terminum primum, ita est quadratum datum ad quadratum lateris primi rectanguli de quo quæritur. Datur ergo latus primum rectanguli quæsiti.

Alia eiusdem Problematis Resolutio.

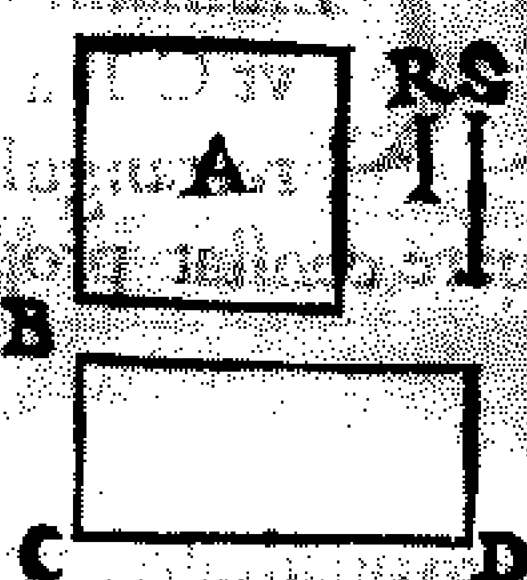
Latus primum rectanguli esto A. Quoniam igitur in omni rectangulo est, vt latus primum ad latus secundum, ita quadratum lateris primi ad ipsum rectangulum; sunt enim eiusdem altitudinis, cum sit vtriusq; altitudo latus primum, latus autem primum rectanguli quæsiti ad latus secundum ponitur vt R ad S; ergo vt R ad S ita erit A Q ad rectangulum quæsitum, hoc est ad B Q: huic enim ponitur æquale rectangulum illud, & conuertendo erit

vt S ad R ita BQ ad AQ.

Datur ergo latus primum rectanguli quæsiti, idq. in eadem ratione atque in antecedenti Resolutione.

Compositio.

Sit dato quadrato A, æquale rectangulum inueniendũ, cuius latera sint, vt R ad S. Fiat vt S ad R, ita quadratum A ad aliud quadratum, cuius latus sit B C, deinde vt R ad S, ita fiat B G ad aliam, quæ sit C D, & ex B C, C D fiat rectangulum B D. Sic fieri docet vtraque resolutio. Demonstratio autem fiet per earum regressum; idem enim est vtriusque resolutionis progressus. Quoniam igitur est vt S ad R, ita quadratum A ad quadratum B C, ex constructione, erit conuertendo, vt R ad S, hoc est vt B C ad C D, ita quadratum B C ad quadratum A; sed vt B C ad C D, ita est quadratum B C ad rectangulum B D, cum sint eiusdem altitudinis B C, ergo rectangulum B D quadrato A æquale erit, atque est B C ad C D, vt R ad S, ex constructione. Inuentum est igitur rectangulum B D, quale inueniendum proponebatur.



Problema II.

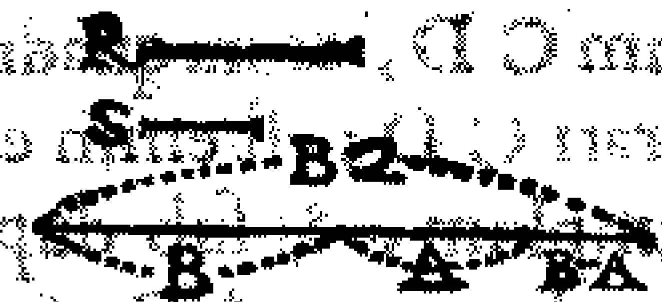
Datam rectam lineam secare, vt partium quadrata simul sumpta, ad quadratum differentiæ partium, rationem habeant datam. Oportet autem datam rationem esse maioris ad minus.

Resolutio.

Sit data recta linea B 2 secanda in duas partes; quarum quadrata simul sumpta, ad quadratum differentiæ partium, rationem habeant

vt

A vt R ad S, maioris nempe ad minus.



Sit iam secta, vt petitur, & dimidia differentia partium esto A, ergo $B + A$ erit pars maior, & $B - A$ pars minor, harum partium quadrata simul sumpta ad quadratum differentiæ partium, rationem habent, vt R ad S, sed quadratum ex $B + A$ est $BQ + AQ + B$ in $A\ 2$; quadratum verò ex $B - A$ est $BQ + AQ - B$ in $A\ 2$. eorum summa est $BQ\ 2 + AQ\ 2$. Quadratum autem totius differentiæ partium est $AQ\ 4$, dimidia enim differentia ponitur A; itaque tota differentia est $A\ 2$, eius quadratum $AQ\ 4$, ergo erit Corol.2.Prob. 1. lib. 2.

$$\text{vt } R \text{ ad } S \quad \text{ita } BQ\ 2 + AQ\ 2, \text{ ad } AQ\ 4$$

B Et duplatis antecedentibus, erit vt $R\ 2$, ad S, ita $BQ\ 4 + AQ\ 4$, ad $AQ\ 4$, & ita $BQ + AQ$ ad AQ.

Est enim eadem ratio simpli ad simplum, quæ quadrupli ad quadruplum. denique diuidendo erit

$$\text{vt } R\ 2 - S \quad \text{ad } S \quad \text{ita } BQ \text{ ad } AQ.$$

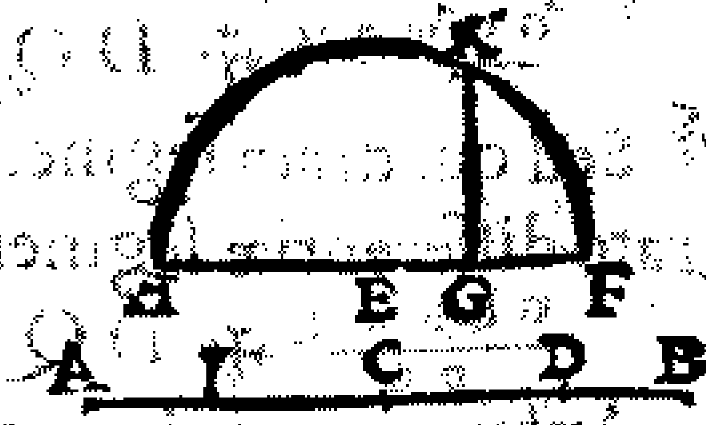
Porisma.

Vt excessus quo primus rationis datæ terminus duplus superat secundum, ad ipsum secundum, ita est quadratum dimidiæ datæ, ad quadratum dimidiæ differentiæ partium.

C Datur ergo dimidia differentia partium, de qua quæritur.

Compositio.

Sit data recta linea A B secanda in duas partes, quarum quadrata simul sumpta, ad quadratum differentiæ partium sint, vt E F ad F G, quarum E F sit maior. Duplicetur F E in H, & in F H describatur semicirculus, in quo erigatur ex G perpendicularis G K, vsque ad circumferentiam: deinde secetur A B bifariam in C, & fiat vt H G ad G K, ita A C ad aliam, quæ sit C D. Secta est igitur A B sicuti Porisma docet. Nam cum sit H G ad G K, vt A C ad C D, erit



D & quadratum H G ad quadratum G K, sicut quadratum A C ad quadratum C D. Sed quadratum H G ad quadratum G K est vt H G ad G F, ergo vt H G ad G F, ita erit quadratum A C ad quadratum C D; quod Porisma requirit. Nunc ostendendum est, quadrata partium A D, D B ad quadratum differentiæ earumdem, rationem habere, vt E F ad F G. id autem ex resolutionis regressu, ita fit manifestum.

Ponatur ipsi C D æqualis C I, & cum sint æquales C B, C A fiunt æquales, & reliquæ B D, A I, vnde differentia partium A D, D B erit I D. Et quoniam ostensum est, vt H G ad G F, ita esse quadratum A C ad quadratum A D, erit componendo, vt H F ad F G, ita quadrata A C, C D ad quadratum

tum

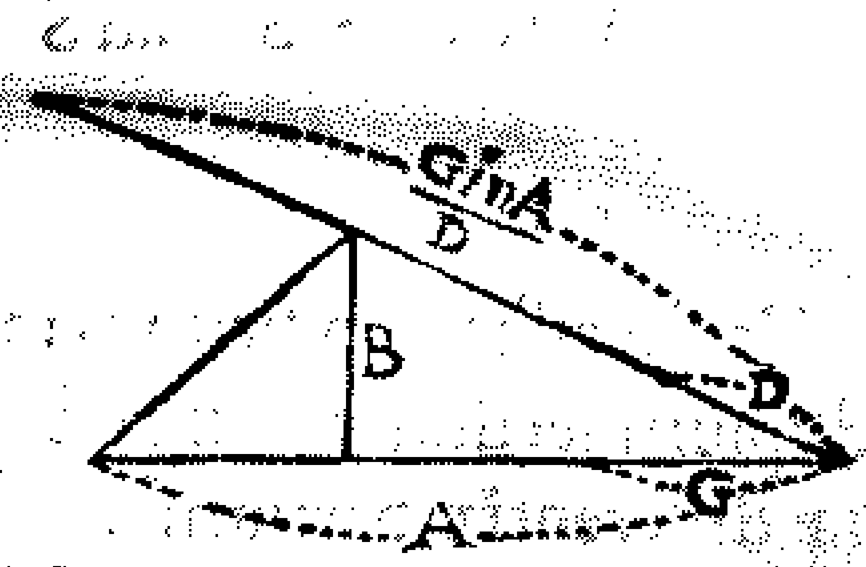
tum C D, & ita quadruplum quadratorum A C, C D ad quadruplum quadrati C D; est enim eadem ratio quadrupli ad quadruplum, quæ simpli ad simplum, & sub duplatis antecedentibus erit, vt E F ad F G, ita duplum quadratorum A C, C D ad quadruplum quadrati C D, hoc est ad quadratum I D; sed cum A B secta sit in æqualia in C, & non æqualia in D, quadrata A D, D B,* dupla sunt quadratorum A C, C D, ergo vt E F ad F G, ita erunt quadrata A D, D B ad quadratum I D. Secta est igitur A B data in D, vt problema postulat, quod erat faciendum. A

9. secundi

Problema I I I.

Data perpendiculari, differentia crurum trianguli, & differentia segmentorum basis. inuenire triangulum. B

Resolutio.



Sit data perpendicularis trianguli B, differentia crurum D, & differentia segmentorum basis G. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur inuentum esse & basis ipsius trianguli esto A. Quoniam igitur est, vt D ad G, ita A ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$, erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ aggregatum crurum, est * enim, vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum. C

Theor. 7. huius

Et quoniam quadratum aggregati crurum vnà cum quadrato differentiæ eorumdem * dupla sunt quadratorum è cruribus, ergo

Theor. 4. primi

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} + DQ$ æquabuntur quadratis crurum bis.

Quadrata autem crurum bis * æqualia sunt quadratis segmentorum bis, plus quadrato perpendicularis quater, ergo

47. primi

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} + DQ$ æquabuntur quadratis segmentorum bis plus BQ 4

Sed quadrata segmentorum bis * æqualia sunt quadrato basis vnà cum quadrato differentiæ segmentorum basis, ergo

Theor. 4. primi

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} + DQ$ æquabuntur $AQ + GQ + BQ\,4$.

Auferantur vtrinque AQ, & DQ, vt cognita ab incognitis separentur, ergo D

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ$ æquabitur $BQ\,4 + GQ - DQ$

Hoc est $\frac{GQ \text{ in } AQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur $BQ\,4 + GQ - DQ$, est enim $\frac{DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ idem quod AQ; nam AQ ductum in DQ, eidemque DQ applicatum nullam excipit alterationem, quoniam quod superefficit ductio, idem resoluit applicatio.

Seu quod idem est $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{D}$ æquabitur $BQ\,4 + GQ - DQ$

Resoluatur fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ in sua membra, ita vt æqualitas in pro-

por-

A portionem transmutetur, vt in principio huius libri docuimus, quo facto proportionalia erunt plana.

GQ − DQ BQ 4. + GQ − DQ DQ AQ

Atque eorum radices proportionales erunt.

L.V.GQ − DQ, L.V.BQ 4. + GQ − DQ, D, A

Porisma.

Vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis trianguli superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum prædicto quadratorum excessu, ita est differentia crurum, ad basim.

B Datur ergo quæsita trianguli basis.

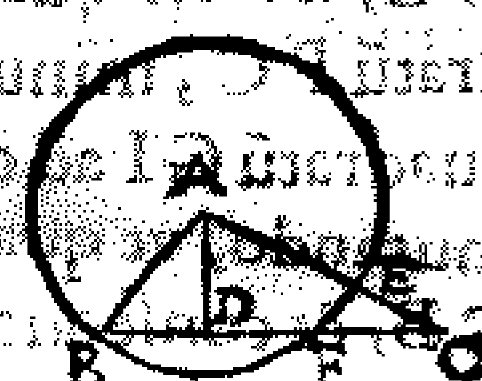
Ex Porismate apparet, differentiam segmentorum basis maiorem esse differentia crurum, eo quod quadratum differentiæ segmentorum maius est quadrato differentiæ crurum.

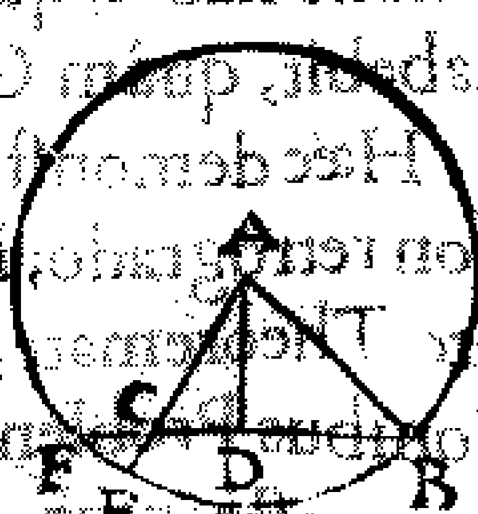
Similiter apparet, priorem rectam in Porismate nominatam ad posteriorem, minorem rationem habere quàm differentiam crurũ ad differentiã segmentorũ basis; Porisma enim indicat, priorem rectam ad posteriorẽ, se habere vt differentia crurum, ad basim. Hæc omnia demonstranda sunt, atq; Problemati præfigendæ determinationes, ne data fortuitò, vel etiam de industria exponantur, ex quibus Problema construi non posset.

C
Lemma I.

Differentia segmentorum basis trianguli maior est quàm differentia crurum.

IN triangulo A B C perpendicularis A D, secet basim in duo segmenta B D, D C, & centro A interuallo A B vnius crurũ describatur circulus secans crus A C, etiam si opus fuerit productũ in E, basim verò B C etiã productam in F; crurum igitur A B, A C differentia erit E C, differentia vero segmentorum B D, D C erit F C, sunt enim B D, D F * æquales. Dico F C maiorem esse quàm E C, nã cùm recta A C transeat per centrũ, basis verò B C secus, recta F C * maior est quàm C E, quod erat ostendendum. 3 tertij



D


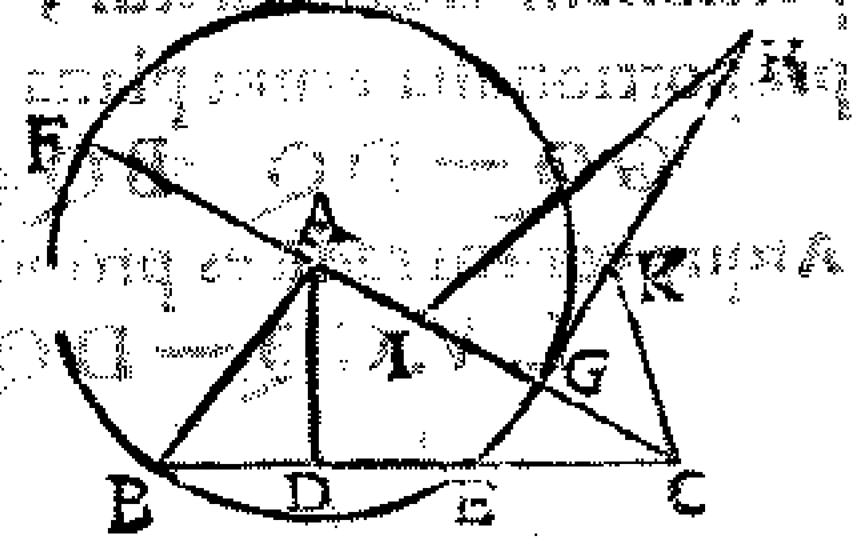
8 tertij & 7 tertij

Lemma II.

IN omni triangulo recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorũ basis superat quadratum differentiæ crurũ, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodẽ quadratorum excessu, minorem rationẽ habet, quàm differentia crurum ad differentiã segmentorum basis.

Esto triangulum A B C, in quo perpendicularis A D: & centro A, interuallo A B cruris minoris, describatur circulus secans basim trianguli in E, crus maius

D ius



ius in G, differentia igitur segmentorum B D, DC erit E C; differentia vero crurum BA, AC erit GC. Deinde ex G erigatur perpendicularis G H, in qua ponatur C K æqualis C E, & sumatur G I æqualis G K, & fiat G H dupla ipsius A D, & iungatur I H. Quadratum igitur C K hoc est CE superat quadratum G C quadrato G K, vel G I, & quadratum I H æquale est quadratis G H, G I: hoc est quadrato perpendicularis dupli, & excessui quadratorum E C, G C. Dico igitur G I ad I H minorem rationẽ habere quam G C ad C E. Producatur enim C A vsq; ad circumferentiã circuli in F. Quoniam igitur quadrata F C, C G * æqualia sunt duplo quadratorum F A, A C, duplum autem quadratorum F A, A C duplum autem quadratorum F A, A C hoc est B A, A C * æquale est duplo quadratorum B D, D C vnà cum quadruplo quadrati A D; ideo quadrata F C, C G, æqualia erunt duplo quadratorum B D, D C vnà cum quadruplo quadrati A D, hoc est vnà cum quadrato H G, sed duplum quadratorum BD, E C * æquale est quadratis B C, C E, ergo quadrata F C, C G æqualia erunt quadratis B C, C E, H G, auferantur vtrinque quadrata B C, C G, ergo quadratũ F C minus quadrato B C æquale erit quadratis H G, C E, minus quadrato C G, sed quadratum C E minus quadrato C G, hoc est quadratum C K, minus quadrato C G. idem valet, quod quadratum G K, vel G I, ergo quadratum F C, minus quadrato C B, æquabitur quadratis H G, G I hoc est quadrato H I.

Theor. 4 primi

47 primi

Theor. 4 primi

Et quoniã est E C, vel C K ad C G, vt C F ad C B, erit & quadratum C K ad quadratum C G, vt quadr. C F ad quadratũ C B; & diuidendo, vt quadratũ C K, minus quadrato C G, hoc est, vt quadratũ G K, vel G I ad quadratum C G, ita erit quadratum F C, minus quadrato C B, ad quadratũ C B; sed quadratũ F C, minus quadrato C B, ostensum est æquale quadrato H I, ergo vt quadratũ G I ad quadratũ G C, ita erit quadratũ H I ad quadratũ C B, & permutando, vt quadratũ G I ad quadratũ I H, ita erit quadratũ G C ad quadratũ C B, & consequenter, vt G I ad I H, ita G C ad C B, sed G C ad C B minorẽ rationẽ habet, quàm eadẽ G C ad C E, ergo & G I ad I H minorẽ rationem habebit, quàm G C ad C E, quod erat ostendendum.

Hæc demonstratio procedit per resolutionis filum, directo tamen ordine, non retrogrado; hic enim non ostenditur constructio Problematis, sed proposito Theoremate, conclusio eius demonstratur; Porismata enim, quæ ex resolutionibus Problematum deducuntur in formam Theorematis proposita, eodem demonstrantur ordine, quo ipsa Problemata resoluuntur; vt memorauimus in Scholio Theorematis, quod Problema septimum primi libri subsequitur.

Demonstratis igitur quæ ad determinationem Problematis pertinent, Problema ita determinandum erit.

A

Determinatio I.

OPortebit, differentiam segmentorum basis maiorem esse differentia crurum.

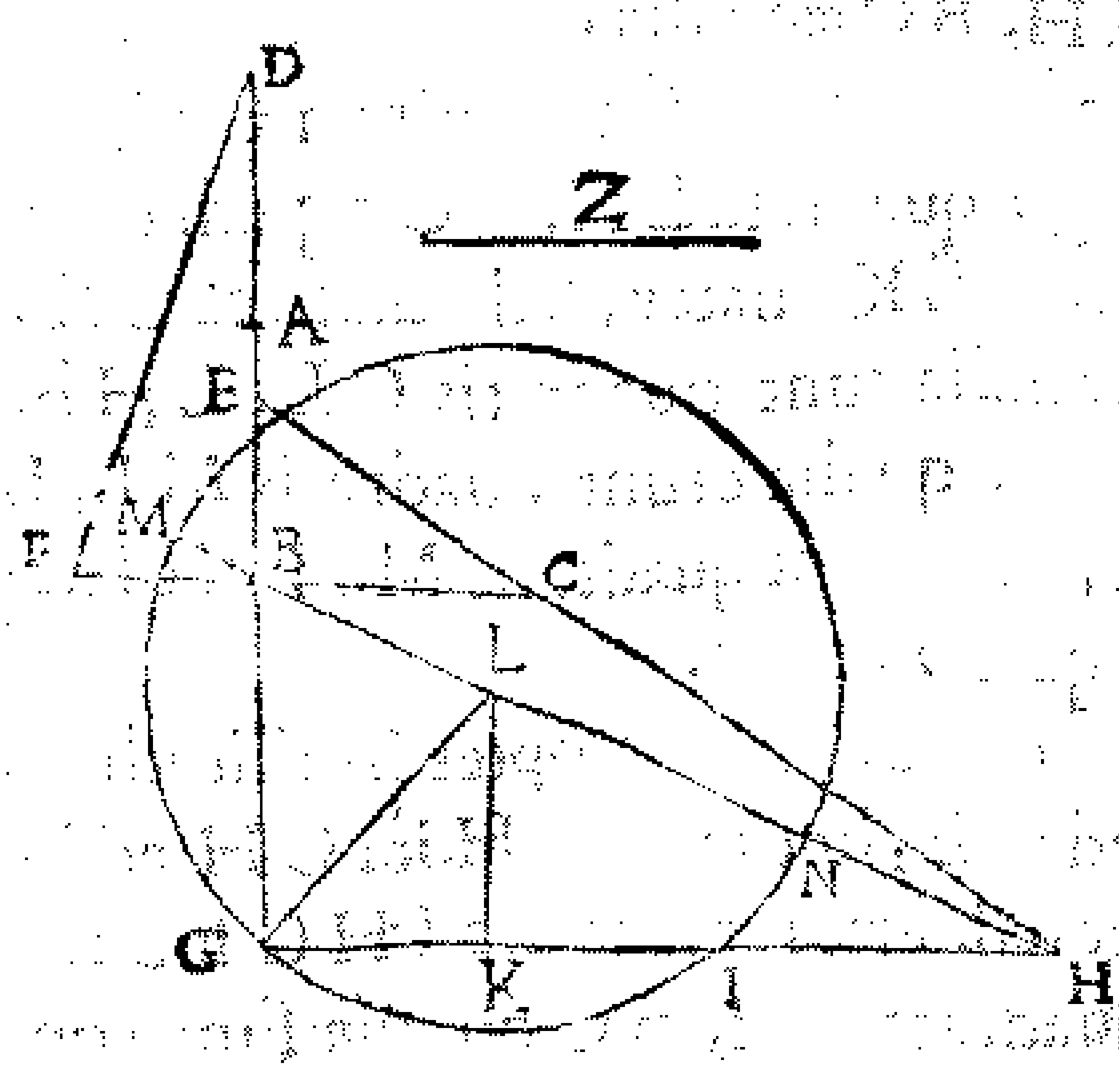
Determinatio II.

OPortebit quoque, rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vna cum eodem quadratorum excessu, minorem ra-
B tionem habere, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis. Sed in simpliciorem formam potest hæc secunda determinatio ita reduci.

Oportebit quoque, duplam perpendicularem maiorem rationem habere ad rectam, cuius quadratum æquale est prædicto quadratorum excessui, quàm eamdem rectam, ad differentiam crurum. Huius autem reductionis demonstratio ita se habet.

Quoniam enim ostensum est, G I ad I H minorem rationem habere, quàm G C ad C E; conuertendo H I ad I G* maiorem rationem habebit, quàm E C ad C G, & consequenter quadratum H I ad quadratum I G, maiorem rationem habebit, quàm quadratum E C ad quadratum C G & diuidendo qua-
C dratum H I, minus quadrato I G hoc est quadratum H G ad quadratum G I maiorē rationem habebit, quàm quadratum E C, minus quadrato C G, hoc est, quàm quadratum C K, minus quadrato C G; seu quod idem est, quàm quadratum I G ad quadratum G C. vnde & recta H G ad rectam G I maiorem habebit rationem, quàm eadem G I ad G C. quare constat determinatio.

Compositio Problematis.



SIt data perpendicularis trianguli A B; differentia crurum B C, & differentia segmentorū basis Z. Oportet inuenire triangulū. Inclinen-
D tur ad rectos angulos A B B C, ipsaque BA duplicetur in D, & in eam etiam si opus fuerit producta ponatur C E æqualis Z. est autē Z maior, quàm B C ex determinatione prima; quadratū igitur E C superat quadratum B C quadrato E B; itaq; recta E B ponenda est pro prima quatuor proportionalium. Sic Porisma iubet. Deinde, producta C B in F, vt sit B F æqualis B E iungatur F D. quadratum igitur F E æquale

le est quadratis B D, B F, hoc est, quadrato perpendicularis duplæ, & quadrato B E, quod est excessus quadratorum E C, B C; itaque recta F D debet fieri secunda quattuor proportionalium tertia B C, & quærenda est quarta. sic habetur ex Porismate. Producatur igitur E B in G, vt sit E G æqualis D F ipsi autem B C parallela agatur G H occurrens E C continuatæ in H. vt igitur E B ad E G, ita erit B C ad G H; atque adeo inuenta est quarta proportionalis G H; ea debet fieri basis trianguli construendi, ex præcepto Porismatis: ab ipsa igitur G H abscindatur H I æqualis Z. est autem Z minor, quàm G H; nam cum sit E B ad E G sicut B C ad G H, E B autem ad E G, ex determinatione minorem rationem habet, quam B C ad Z, ergo & B C
8 quinti ad G H minorem rationem habet quàm eadem B C ad Z, vnde Z* minor est, quàm G H. Denique secetur I G bifariam, & ad rectos angulos in K à recta K L æquali ipsi B A, & iunctis G L, L H constitutum erit triangulum L G H, quemadmodum Porisma docet. est enim vt E B ad E G, ita B C ad G H, hoc est vt recta, cuius quadratum æquale est excessui quadratorum E C, B C ad rectam, cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem excessu quadratorum, ita est differentia crurum ad basim. Nunc ostendendum est, in eo triangulo esse ea quæ requiruntur. A B

Primum perpendicularis L K æqualis est A B ex constructione: deinde I H differentia segmentorum basis G K, K H æqualis Z, pariter ex constructione; superest igitur, vt differentia crurum L G, L H æquetur ipsi B C; id autem repetendo resolutionis vestigia, ita fiet manifestum.

Centro L interuallo L G describatur circulus secans H L continuatam in punctis M N. differentia igitur crurum L G, L H erit H N, & circulus M G N C
3 tertij transibit per I, sunt enim G K, K I* æquales, & L K perpendicularis est ipsi
47 primi G I. Quoniam igitur quadratum E H, minus quadrato H G* æquale est quadrato E G, vel D F, hoc est* quadratis D B, B F, seu quod idem est quadrato L K
47 primi quater, & quadrato B E, hoc* est & quadrato E C minus quadrato B C. additis vtrobique quadratis G H, B C cùm sint dempta in resolutione; quadrata E H, B C æqualia erunt quadrato L K quater vnà cum quadratis G H, & E C,
Theor. 4 primi hoc est & I H, sed quadrata G H, I H* æqualia sunt quadratis G K, K H bis; ergo quadrata E H, B C æqualia erunt quadratis G K, K H bis vnà cum qua-
47 primi drato L K quater, sed quadrata G K, K H bis vnà cum quadrato L K quater* æqualia sunt quadratis G L, L H bis, seu M L, L H bis; ergo quadrata E H, D
Theor. 4 primi B C æqualia erunt quadratis M L, L H bis, quadrata autem M L, L H bis,* æqualia sunt quadratis M H, N H, ergo quadrata E H, B C quadratis M H, N H æqualia erunt.

Et quoniam propter similitudinem triangulorum E C B, E H G est vt B C
36 tertij ad C E, hoc est ad I H, ita G H ad H E, rectangulum sub extremis B C, H E æquale erit rectangulo I H G sub medijs, hoc est* rectangulo M H N, sed & quadrata E H, B C ostensa sunt æqualia quadratis M H, H N ergo M H ipsi
Theor. 5 huius E H* æqualis erit, & N H ipsi B C. quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L G H, &c. quod faciendum erat.

CON-

A

CONSPECTVS RESOLVTIONIS, ET COMPOSITIONIS.

Initium Resolutionis. — **Finis Compositionis.**

	VBC, HE	hoc est VMHN / VIHG
D G A $\frac{G \text{ in } A}{D}$ BC	hoc est $\frac{IH}{CE}$ GH	HE
B Et 9 m. quad. ex $\frac{G \text{ in } A}{D}$ plus quad. ex. D	† 9 BC ergo 9 EH	† 9 NH 9 MH
Theo. 4. pr. * dupla sunt quadratorum à cruribus	† 9 LH 2 sed 9 LG 2	† 9 NH 9 MH Theo. 4. pr.
Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ \dagger DQ}{DQ}$ æqualia erunt quadratis crurum bis	† 9 BC ergo 9 EH	† 9 LH 2 9 GL 2
47 pr. Sed quadrata crurũ bis* æqualia sũt quadratis segmẽtorũ bis vnà cũ quadrato ppẽdicularis quater	† 9 LK 4 † 9 KH 2 sed 9 GK 2	† 9 LH 2 9 GL 2 47 primi
Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ \dagger DQ}{DQ}$ equ. quadratis segmẽtorũ bis plus BQ4	† 9 BC ergo 9 EH	† 9 LK 4 † 9 KH 2 9 GK 2
C Sed quadrata segmẽtorũ bis æqualia sũt quad. Theo. 4. pr. basis plus quad. differentiæ segmentorum	† 9 IH sed 9 GH	† 9 KH 2 9 GK 2 Th. 4. pr.
Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} \dagger DQ$ æqu. AQ † GQ † BQ4	† 9 BC 9 EH	hoc est † 9 IH † 9 EC † 9 GH 9 LK 4
auferatur vtrinque AQ, & DQ		addantur quadrata GH, & BC
Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ — AQ æqu. BQ4 † GQ — DQ		— 9 BC hoc est † 9 EC † 9 EB
hoc ẽ $\frac{GQ \text{ in } AQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ eq. BQ4 † GQ — DQ		seu 9 LK 4
D seu $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æqu. BQ4 † GQ — DQ	— 9 GH 9 EH	† 9 BF hoc est 9 DB 47 primi vel 9 DF 9 EG 47 primi

Resol. frad. GQ — DQ. BQ4 † GQ — DQ, DQ. AQ

L.V. GQ — DQ, L.V. BQ4 † GQ — DQ, DA

Initium Compositionis

Finis Resolutionis.

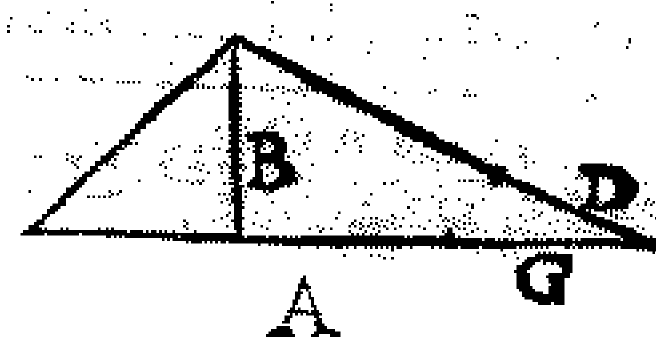
Scholium.

VLtima fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ respondet in compositione quadrato E G, nam cùm sit, vt D Q ad G Q — D Q, ita A Q ad $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$, quod quidem in compositione est, vt quadratum B C ad quadratum E C minus quadrato B C; ita quadratum G H ad quadratum E G; quadratum igitur E G idem est, quod fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$. A

Similiter fractio $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ$ respondet in compositione quadrato E G; nam cùm sit, vt D Q ad G Q, ita A Q ad $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, quod est in compositione, vt quadratum B C ad quadratum E C, ita quadratum G H ad quadratum E H, erit quadratum E H idem quod fractio $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, & consequenter $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ$ respondebit in compositione quadrato E H, minus quadrato G H; hoc est respondebit quadrato E G, quemadmodum & vltima fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$. B

Demonstratio autem sumit initium ab æqualitate quæ est inter fractionem $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ$, & $BQ\,4 \maltese GQ - DQ$, non autem à proportione, inquam per resolutionem fractionis transmutata fuit ipsa æqualitas, desijtque resolutio Problematis; nam cùm in ipsa æqualitate insit, ex vi fractionis proportio, per quam ordinata est Problematis constructio, satis est ab ipsa æqualitate demonstrationem inchoauisse. Alia eiusdem Problematis Resolutio, in qua progressus quidem simplicior est, breuiorq. operatio autem paulo operosior ob multiplicationem fractionis, per magnitudinem integram. C

Sit igitur data perpendicularis trianguli B differentia crurum D, & differentia segmentorum basis G. Oportet inuenire triangulum.



Factum iam sit, & basis ipsius trianguli esto A, ergo A + G * erit duplum segmenti maioris. Et quoniam est, vt D ad G ita A ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$, erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ aggregatum crurũ, & $\frac{G \text{ in } A}{D} \maltese D$ erit * duplum cruris maioris; sed quadratum cruris maioris dupli æquale est quadrato dupli segmenti maioris vnà cum quadrato perpendicularis duplæ; ergo

Corol. 1. Probl. 1. lib. 1.

Corol. 1. Probl. 1. lib. 1.

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} + DQ + G \text{ in } A\,2$ æquabitur $AQ + G$ G in A B 4.

Auferantur vtrinq; G in A 2, & A Q, & D Q, vt cognita ab incognitis separentur, ergo D

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - A$ æquabitur $BQ\,4 \maltese GQ - DQ$

Hoc est $\frac{GQ \text{ in } AQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur $BQ\,4 + CQ - DQ$

Seu $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur $BQ\,4 \maltese G - DQ$.

Et æqualitate in proportionem transmutata per resolutionem fractionis, proportionalia erunt plana

$GQ - DQ,\ BQ\,4 \maltese GQ - DQ,\ DQ,\ AQ.$

Atque eorum radices proportionales erunt

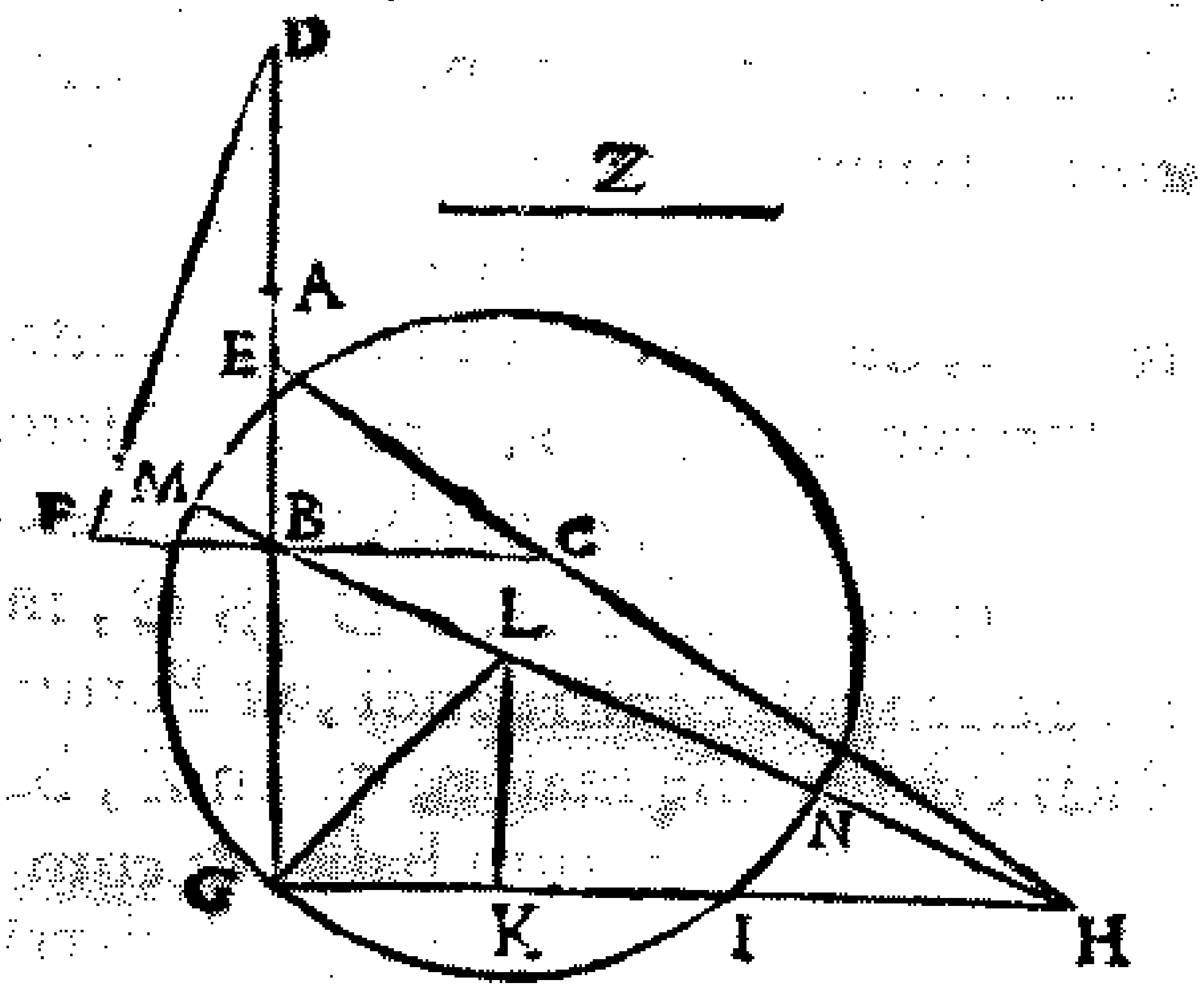
L.V. $GQ - DQ$, L.V. $BQ\,4 \maltese GQ$, DQ, DA,

Ea

A Ea ipsa proportio, quæ per antecedentem resolutionem inueniebatur, vnde idem erit & Porisma, eædemque ex eo determinationes deducentur.

Compositio.

SIt data perpendicularis trianguli A B, differentia crurum B C, & differentia segmentorum basis Z. Oportet inuenire triangulum. Fiat eadem constructio, quæ in antecedenti compositione: trianguli igitur L G H perpẽdicularis L K æqualis est



B A B, ex constructione, & I H differentia segmentorum basis G K, K H æqualis Z, pariter ex constructione. Superest vt ostendatur N H differentia crurum L G, L H æqualis ipsi B C; id autem per regressum resolutionis fit hoc modo. Quadratum E H, minus quadrato H G, * æquale est quadrato 47. primi E G vel D F, hoc est * quadratis D B, B F, seù quod idem est quadrato duplæ 47. primi L K, & quadrato B E, hoc est & * quadrato E C, minus quadrato B C, ad- 47. primi ditis vtrobiq; quadratis G H, B C, & rectangulo G H I bis: quadrata E H, B C, vnà cum rectangulo G H I bis, æqualia erunt quadrato duplæ L K, vnà,
C cum quadratis G H, & E C, vel & I H, & insuper rectangulo G H I bis; sed quadrata G H, I H vnà cum rectangulo G H I bis, * æqualia sunt quadrato 4. secundi compositæ ex G H, H I, hoc est * quadrato duplæ K H, ergo quadrata E H, Corol. 1. Probl. 1. lib. 4. B C vnà cum rectangulo G H I bis, æqualia erunt quadratis duplarum L K, K H, hoc est quadrato duplæ L H, hoc est compositæ ex M H, H N; sed rectangulum G H I æquale est rectangulo E H, B C; nam cùm sint similia triãgula E H G, E C B, est G H ad A E, vt B C ad C E; hoc est ad H I, ac proinde rectangulum G H I sub extremis æquale rectangulo E H, B C sub medijs; ergo si loco rectanguli G H I ponatur rectangulum E H, B C, quadrata E H, B C vnà cum rectangulo E H, B C, hoc est * quadratum compositæ ex E H, 4. secundi B C, æquale erit quadrato compositæ, ex M H, H N, quare & illa composi-
D ta huic compositæ æqualis erit; sed & rectangulum E H, B C, ostensum est æquale rectangulo G H I, hoc est * rectangulo M H N ergo E H * æqualis erit 36. tertij Theor. 1. huius M H & B C æqualis N H, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L G H. & c. vt faciendum erat.

Scholium

CVm determinationis facta mentio sit; res ipsa postulare videtur, vt subijciam quomodo determinatio Problematis determinati, cum ea ex se non patet; in Porismate, vel in constructione Problematis deprehendatur.

Pro-

Problematum igitur determinatorum alia sunt, in quibus statim vt proponuntur determinationes occurrunt, vt propositio 22. libri primi Euclidis, & propositio prima libri 4. eiusdem, nec non prima quattuor problemata præcedentis libri, multaq. alia; eorum enim determinationes in ipsa Problematis propositione manifestæ sunt. Alia vero Problemata sunt, in quibus latet determinatio; verum peracta resolutione Problematis, in Porismate detegitur: interdum aperte, vt prima determinatio huius Problematis; interdum non item, vt secunda, verum tamen sumpto inditio ex aliqua impossibilitate vera, dubiauè, quæ in construendo, iuxta rationem Porismatis, Problemate interponitur; quod Problema determinatione egeat, deinde Porismate attentiùs perpenso, deprehenditur determinatio: vt in hac constructione; vbi datis tribus rectis E B, F D, B C, inuenta est quarta proportionalis G H pro base trianguli construendi, vt Porisma docet, ipsa G H, nisi vitium est in datis, debet esse maior, quam Z, basis enim trianguli maior est, quàm differentia segmentorum basis, & cum ab ipsa G H auferenda sit recta æqualis datæ Z, pro constituendo quod quæritur triangulo, si ipsa G H non esset maior, ex recta auferri non posset, sumpto igitur inditio ex hoc dubio impossibilitatis, quod problema determinatione egeat; deinde reuersus ad Porisma, inuenio rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis trianguli superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam, cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem quadratorum excessu, eandem rationem habere, quàm differentiam crurum ad basim, ex quo infertur priorem rectam ad posteriorem, minorem rationem habere, quam differentiam crurum, ad differentiam segmentorum basis: quippe quæ minor est base. Itaque imposita determinatione, vt ratio prioris rectæ ad posteriorem minor sit ratione differentiæ crurum, ad differentiam segmentorum basis, necessario G H maior erit, quàm Z; atq; adeo instantia, quæ aduersus constructionem Problematis ferebatur destructa erit, quod quidem absque determinatione non eueniret. Exempli gratia, si quis imprudens, neglecta determinatione, exposuerit data, ita vt ratio prioris rectæ ad posteriorem fuerit non minor ratione differentiæ crurum ad differentiam segmentorum basis, vt potè exposuerit perpendicularem trianguli 1, differentiam crurum 2, & differentiam segmentorum basis 3, iusseritq. triangulum construere, frustrà se excruciabit, qui triangulum illud tentauerit inuenire; quæreret enim id quod non est, si quidem nullum potest dari triangulum in quo perpendicularis sit 1, differentia crurum 2, & differentia segmentorum basis 3, quoniam ratio huiusmodi datorum non continetur intra limites à determinatione præstitutos. Sic igitur determinatio, quæ prius in Porismate latebat, per ea quæ constructioni aduersabantur, in ipso Porismate patefit. Alia autem Problemata sunt, in quibus neque sponte se se offert determinatio, neque in Porismate vllo modo deprehenditur; sed instantiæ quæ aduersus constructionem Problematis feruntur, ipsam suggerunt determinationem; nam cum in constructione, quæ fit per rationem Porismatis

occur-

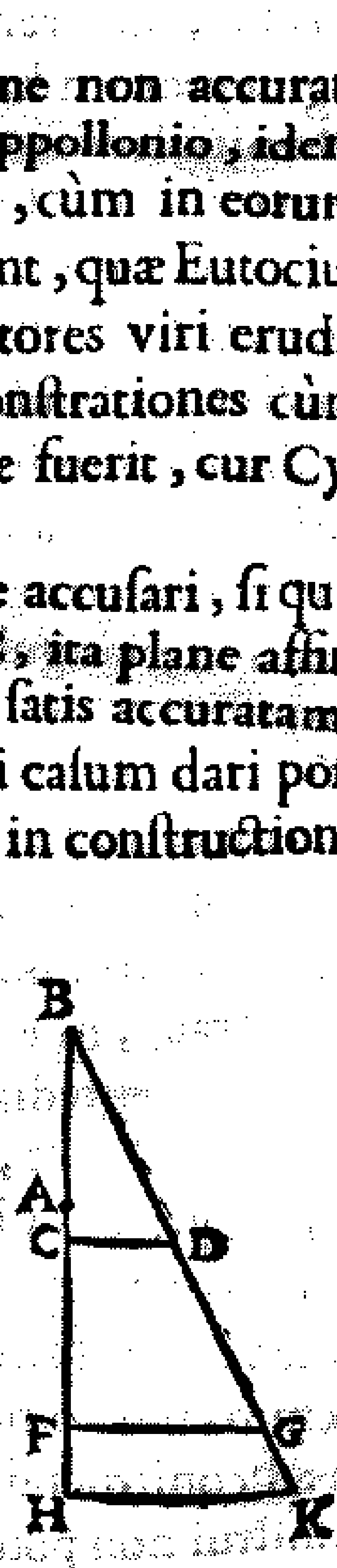
A occurrit aliquod, quod fieri non potest, vel in dubium venit, an fieri possit, argumentum est, vitium esse in datis, vel certe posse esse, ex eoque oriri illud impossibilitatis, vel dubij impedimentum. Neque enim Porisma iubet ea, quæ fieri non possunt, immo indicat quando Problema possibile est, & quando impossibile, vt suo loco dicetur. Cognitis igitur, quæ aduersus constructionem instant; determinatio quoque cognita erit; nam determinatio nihil aliud est, quàm cautio quædam, ne quid aduersus constructionem Problematis instet, exemplum ad huiusmodi determinationem pertinens, subijciam in Scholio Problematis quinti.

In hoc Problemate, quod & in libro variorum construxi, Clemens Cyriacus se non satis accuratam demonstrationem asserit deprehendisse, quod
B non demonstrauerim, quartam illam proportionalem G H maiorem esse quàm E C, cùm ab ipsa G H auferenda sit recta æqualis E C: miraturq. vir alioqui doctissimus, id à me omissum, ac se suppleturum, quod omiserim, pollicetur, vt ea me cura leuaret. Sed cùm ea quæ pollicetur non soluerit, non alienum putauerim planum facere, primum illam demonstrationem, licèt in ea id quod Cyriacus notat omissum fuerit, non ideo potuisse dici, non accuratam, tum Cyriacum nihil omnino suppleuisse, quamuis supplendi munus sibi susceperit.

Et quidem, si demonstratio mea ex huiusmodi omissione non accuratè demonstrationis vitio laboraret; idem Archimedi, idem Appollonio, idem pluribus alijs accuratissimis Mathematicis tribuendum esset, cùm in eorum
C demonstrationibus quamquam verissimis, plura omissa fuerint, quæ Eutocius Ascalonita, Federicus Comandinus, & plures alij comentatores viri eruditissimi in suis comentarijs suppleuerunt, quas quidem demonstrationes cùm nemo non accuratas sit ausus dicere, non video quid causæ fuerit, cur Cyriacus demonstrationem meam non accuratam appellarit.

Verùm vt concesserim, potuisse me de non accurato opere accusari, si quis casus dari posset, in quo ipsa G H non sit maior quàm E C, ita plane affirmauerim, audaciorem potius Cyriaci censuram, quàm non satis accuratam demonstrationem extitisse, cùm certum sit nullum huiusmodi casum dari possibilibus (ad Problema construendum) datis existentibus, vt in constructione Problematis demonstraui.

D Sed conatur in sua animaduersione Cyriacus ostendere, posse dari casum, in quo recta G H non sit maior, quàm E C, & ad id faciendum constituit duo triangula, rectangula similia B C D, B F G, quorum maius habet basim F G minorem latere maximo B D trianguli minoris, idq. ad similitudinem constructionis duorum triangulorum E B C, E G H in constructione Problematis constitutorum; atque ex hoc arguit casum supramemoratum dari posse. Verùm parum animaduertit, quod in triangulis B C D, B F G in sua animaduersione constitutis, supposuerit data ex quibus Proble-



ma

ma construi non potest. quid igitur mirum si ex male suppositis male conclu- A
serit? hoc autem ita se habere sic demonstrabo.

Resumatur Cyriacæ animaduersionis figura, in qua ostenduntur æquales B D, H K, & propterea F G minor quam D B, itaque ex F G non posse auferri rectam æqualem B D manifestum est.

Sed intelligatur A B data perpendicularis trianguli quæsiti, C D differentia crurum, & B D differentia segmentorum basis, atque rectæ B F quadratum sit æquale quadrato A B duplæ, & quadrato B C, quo nimirum differunt quadrata B D, D C, sic enim disponuntur data in constructione Problematis. Dico ex datis A B perpendiculari, C D differentia crurum, & B D differentia segmentorum basis, nullum triangulum
inueniri posse. Quoniam enim ob similitudinem triangulorum B C D, B F G B
est, vt B C ad B F, ita C D ad F G, C D autem ad F G maiorem rationem habet, quàm eadem C D ad B D, cùm sit B F G minor, quàm B D, ergo & B C ad B F, maiorem rationem habet, quàm C D ad B D; hoc est recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est, quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem quadratorum excessu, maiorem rationem habet, quàm differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, quod quidem in nullo triangulo potest esse. ostensum est enim lemmate secundo, in omni triangulo priorem rectam ad posteriorem minorem rationem habere quam differentiam crurum, ad differentiam
segmentorum basis. Quare ex datis A B perpendiculari, C D differentia cru- C
rum, & B D differentia segmentorum basis, triangulum inueniri non potest. quod erat ostendendum.

Cùm igitur in triangulis B C D, B F G in animaduersione Cyriaci constitutis, supposita sint data, ex quibus Problema construi non potest, male Cyriacus deducit ex eo, quod in ipsis triangulis recta F G minor sit, quàm B D, etiam in triangulis E B C, E G H, in constructione Problematis constitutis, in quibus ponuntur data, ad construendum Problema, possibilia, rectam G H minorem aliquando futuram quàm E C.

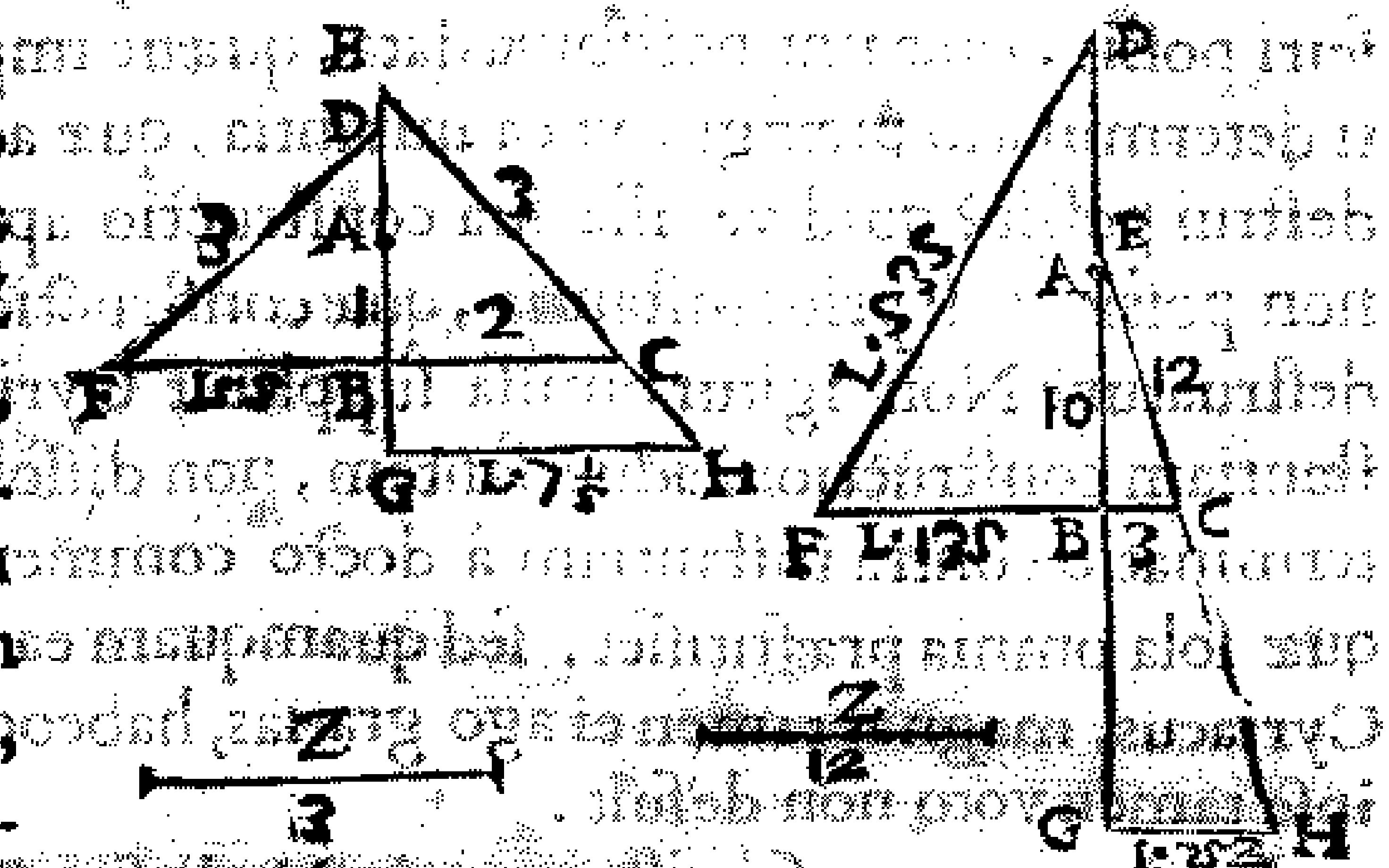
Iam vero ostendendum est, Cyriacum id quod pollicitus est non suppleuisse.

Quoniam enim Problema, de quo agitur, ex determinatis est, quippe
quod construi non potest, ex datis in quacumque ratione existentibus, vt de- D
monstraui, in eo nihil aliud deerat nisi determinatio pro cohibendis datis, ne suos fines egrediantur, nam adhibita congrua determinatione, nihil est amplius quod desit, vt videre est in constructione Problematis supra allata. Sed cùm Cyriacus nihil de determinatione tetigerit, non video, quid Lemmate illo suo præcipuo (sic enim appellat, propter eximiam, quam de eo concepisse videtur præstantiam) suppleuerit; sed vt manifestius id pateat, ostendam Lemma illud omnino inutile esse, sed exercitationis gratia exponam prius data ad construendum Problema impossibilia, hoc est ex quibus triangulum construi non potest; deinde ostendam quomodo ex ea datorum impossibili-

tate

A tate oriatur instantia constructioni obsistens; quibus ostensis, perspicuè apparebit, Cyriacum nec præcipuo suo Lemmate, nec approbata constructione, id quod omissum asserit suppleuisse.

Sit igitur data A B perpendicularis trianguli 1, B C, differentia crurum 2, & Z differentia segmentorum basis 3, vel sit A B 10, B C & Z 12, vt posuit Regiomontanus, & oporteat inuenire triangulũ. Hoc manifestum est fieri non



B posse, cum nullum triangulum possit habere perpendicularem, & differentias crurum, & segmentorum quales hic exponuntur; nam in his datis, recta cuius quadratum æquale est excessui quo quadratum Z superat quadratum B C, ad rectam cuius quadratum, æquale est excessui quo quadratum Z superat quadratum B C, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato A B duplæ, vnà cum eodem quadratorum excessu, maiorem rationem habet, quàm B C ad Z; prior enim recta in primis datis est L. 5, posterior vero 3, & L. 5 ad 3 maiorem habet rationem, quàm 2 ad 3. In datis vero à Regiomontano expositis prior recta est L. 135, posterior L. 535, & ratio

C L. 135 ad L. 535, maior est ratione 3 ad 12, quod in nullo triangulo potest esse: si quidem ostensum est, in omni triangulo priorem rectam ad posteriorem minorem rationem habere, quam differentiam crurum, ad differentiam segmentorum basis. Ex datis igitur quæ supra exposita sunt, Problema construi non potest; quod animaduertisse operepretium fuit.

Nunc autem ostendam, quomodo ex ea datorum impossibilitate oriatur instantia constructioni obsistens.

Expositis ijsdem datis, nempe impossibilibus, procedatur cum constructione, quemadmodum Porisma docet, donec aliquod impedimentum occurrat, occurret autem, nam ex impossibilibus impossibilia sequi necesse est.

Inclinentur igitur ad rectos angulos A B, B C, & in B A productam po-

D natur C E æqualis Z, & producatur C B in F, vt sit B F æqualis B E: deinde duplicetur B A in D, & connectatur D F, cui æqualis fiat E G, & ducatur G H parallela rectæ B C, occurrens E C continuatæ in H. Hic subsistimus nec possumus alterius progredi, nam cum recta G H debeat esse basis trianguli quæsiti, vt Porisma indicat, ipsaq; G H minor sit, quàm Z, (G H enim in prima figura est L. 7 ½ Z 3. in secunda est L. 35. $\frac{3}{5}$, Z 12) non potest ab ipsa G H auferri recta æqualis Z. Hic itaque occurrit instantia quæ reliquam constructionis partem impedit; nec mirum quia ex datis impossibilibus, sequitur quæsitum impossibile, impossibilia enim exponuntur data, & inuenitur quæsita basis trianguli minor, quàm data differentia segmentorum basis, quod est

im-

impoſsibile, totum videlicet minus eſſe ſua parte. Hanc inſtantiam debebat diſſoluere Cyriacus, deinde verò conſtructionem ſuam dicere approbatam; nam expoſitis datis ad Problema conſtruendum, vel poſsibilibus, vel impoſſibilibus, quid commodi affert illud ipſius præcipuum Lemma, cùm ex eo nec ſciri poſsit, quæ ſint poſsibilia data, quæue impoſsibilia, nec ideo Problemati determinatio præfigi, vt ea inſtantia, quæ aduerſus conſtructionem fertur, deſtrui poſsit? quid ve illa ſua conſtructio approbata valet, cùm ea perfici non poſsit, niſi prius inſtantia, quæ conſtructionem impedit, determinatione deſtruatur? Non igitur omiſſa suppleuit Cyriacus, vt pollicebatur, cùm inſtantiam conſtructioni aduerſantem, non diſſoluerit, nam nihil aliud niſi determinatio contra inſtantiam à docto commentatore deſiderabatur, quippe quæ ſola omnia præſtitiſſet. ſed quamquam ea me ſupplendi cura non leuarit Cyriacus, magnas tamen ei ago gratias, habeoq. licet enim ei votum defuerit, ipſe tamen voto non defuit. A B

Iacobus quoque Chriſtmanus in Nodo ſuo Gordio ait, ſe meum hoc Problema examinaſſe, eiuſque conſtructionem vacillantem deprehendiſſe, non tamen in quo vacillet exprimit, profectò aſſumpſerit, in ſuo examine Abacularis calculator demonſtrationum Geometricarũ planè innocens, numeros ad conſtructionem Problematis non idoneos, quippe ignorauit Problema determinatũ eſſe, nec ideo conſtrui poſſe ex quibuſuis datis; idcirco non miror ſi ſuo vacillanti per abaculos calculo deluſus, vacillantem meã conſtructionem ſibi viſus fuerit deprehendiſſe.

Idem vitiũ non accuratæ demonſtrationis notat Cyriacus in Problemate ſecundo Franciſci Vietæ in Apendicula prima ad Apolloniũ Gallum, atque determinationẽ à Vieta Problemati præpoſitã illegitimam eſſe cenſet, & ideo delendam. quam malè de vtroque iudicet, ingenioſiſſimè Alexander Anderſonus diſſeruit, vir ſanè eruditus in paucis, mihique percarus; cui multum debeant Mathematicæ diſciplinæ, quas præclaris monumentis illuſtrauit, cum quibus de me non ſemel perhonorificè meminerit, meique patrocinium ſuſceperit, multum ſane me ſibi ſua humanitate, ac prona in me voluntate deuinxit. Verùm cùm ipſe quoque moleſtè ferrem, quòd tanti viri laudes, non ſine aliqua temeritatis nota, vt leuiſsime dicam, Cyriacus auſus ſit imminuere, non poſſum non oſtendere, quàm longe abſit à vero in ſuis animaduerſionibus iudicium Cyriaci. Nempe hoc à me poſtulat ſingularis quidam meus in Vietam amor, atque obſeruantia, atque adeo arctiſsima amicitiæ, coniunctioniſque neceſsitudo, quæ mihi cum illo Pariſijs interceſsit, mutuis officijs confirmata. huc accedit, quod cùm Cyriacus in vno, eodemque libello, & Vietam, & me de non accurata demonſtratione accuſauerit, inofficioſus eſſem, ſi omiſſa amici cauſa meam tantùm defenderem. Primum igitur reſoluam Problema illud, deinde Determinationem Problemati præpoſitam, non ſolum legitimam, verùm etiam neceſſariam eſſe demonſtrabo. Poſtremo compoſito Problemate, perſpicuum fiet, Cyriacum de delenda illa determinatione non rectè iudicaſſe. C D

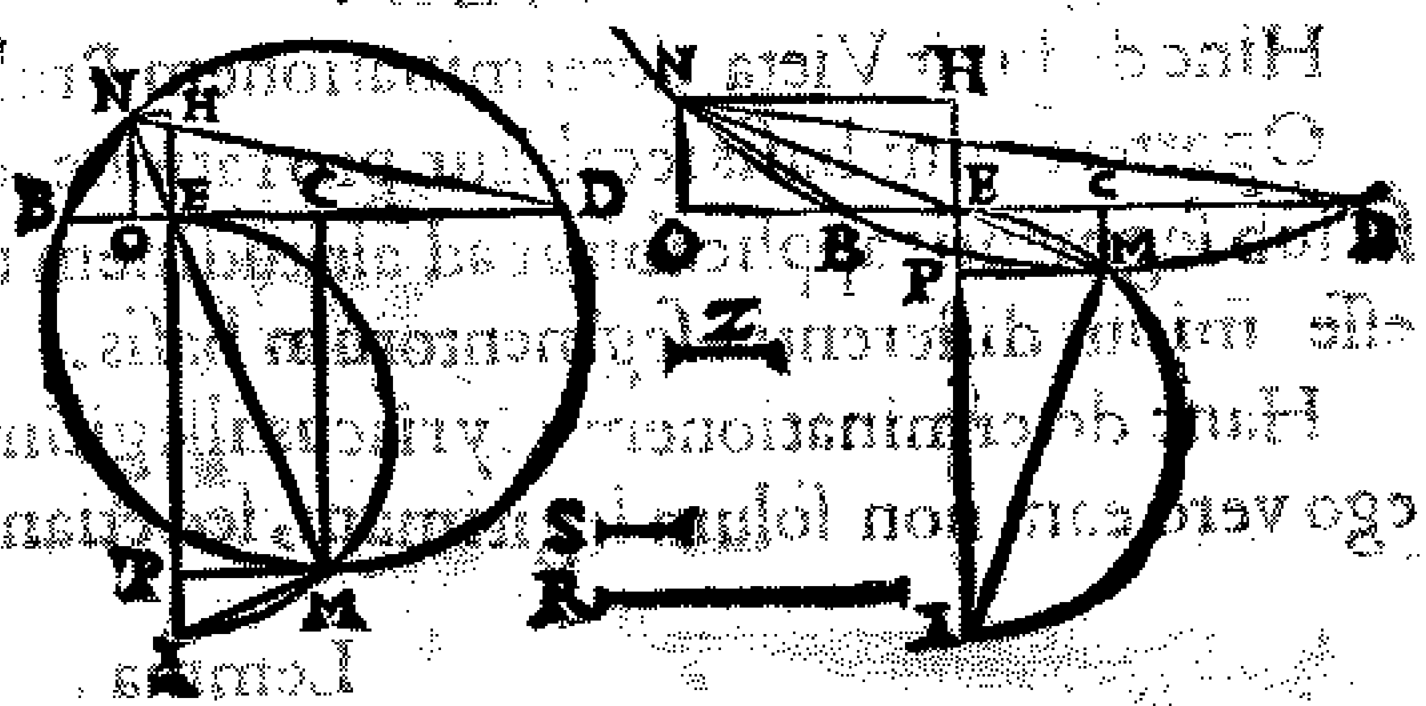
Pro-

A

Problema Vietæ.

Data base altitudine & ratione crurum trianguli, inuenire triangulum.

Resolutio.



SIt data triãguli basis B D, altitudo Z, & ratio crurum vt S ad R. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum N B D, cuius basis
B sit ipsa B D data, altitudo verò N O sit æqualis Z, crura autem B N, N D se habeant, vt S ad R. Secetur angulus B N D bifariã à recta N E secante basim B D in E; circulũ verò circa triangulũ B N D descriptũ, in M. erit igitur ratio B E ad E D data, cũ sit B E ad E D, vt B N ad N D, hoc est vt S ad R, ergo* data erũt & segméta B E, E D: vnde dabitur & rectangulum B E D, ac etiam vt ei* æquale rectangulum N E M. Ducatur autem per punctum E recta E H parallela, & æqualis rectæ O N, eaque producatur donec occurrat rectæ M I perpendiculari ipsi N M in I, & iungatur N H ea parallela erit basi B D; & ideo positione erit, atque positione erit, & H I, cùm ea perpendicularis sit ipsi
C B D. Et quoniam similia sunt triangula E H N, E M I; anguli enim E H N, E M I recti sunt, & ideo æquales, & æquales quoque anguli ad E; vt igitur E H ad E N, ita erit E M ad E I; quare rectangulum H E I sub extremis, æquale erit rectangulo N E M, sub medijs; sed datur rectangulum N E M, vt demonstrauimus; ergo dabitur & rectangulum H E I; data autem est recta H E, quippe quæ æqualis est N O, vel Z datæ, ergo dabitur & recta E I, magnitudine quoque; quare & semicirculus in ea descriptus. Denique, secta B D bifariam in C. connectatur C M ea perpendicularis erit ipsi B D, cùm sint æquales circumferentiæ B M, M D ratione æqualium angulorum B N M, M N D, ipsis circumferentijs insistentium: quare ipsa C M positione data erit; ergo dabitur & punctum M, per quod nimirum
D transit semicirculus E M I, cùm sit rectus angulus E M I, ex constructione; sed datum est & punctum E, ergo dabitur recta M E positione, & magnitudine; vnde & recta E N positione erit; sed positione est & N H, ergo dabitur & punctum N: quare & triangulum N B D.

7 daturum

35 tertij

Scholium.

HAc via existimo Vietam suum Problema resoluisse, ex qua quidem resolutione apparet E I latitudinem, quam facit rectangulum B E D, sub segmentis basis sectæ, pro ratione crurum, applicatum ad E H,

 alti-

altitudinem trianguli, non esse minorem differentia segmentorum B E, E D. nam cùm semicirculus in diametro E I descriptus necessariò transeat per punctum M, quod commune est rectis E M, C M, eiusque semidiameter non sit minor, quàm M P perpendicularis ad E I, hoc est quam E C; per consequens neque tota diameter E I minor erit quàm dupla E C, id est quàm differentia segmentorum B E, E D. A

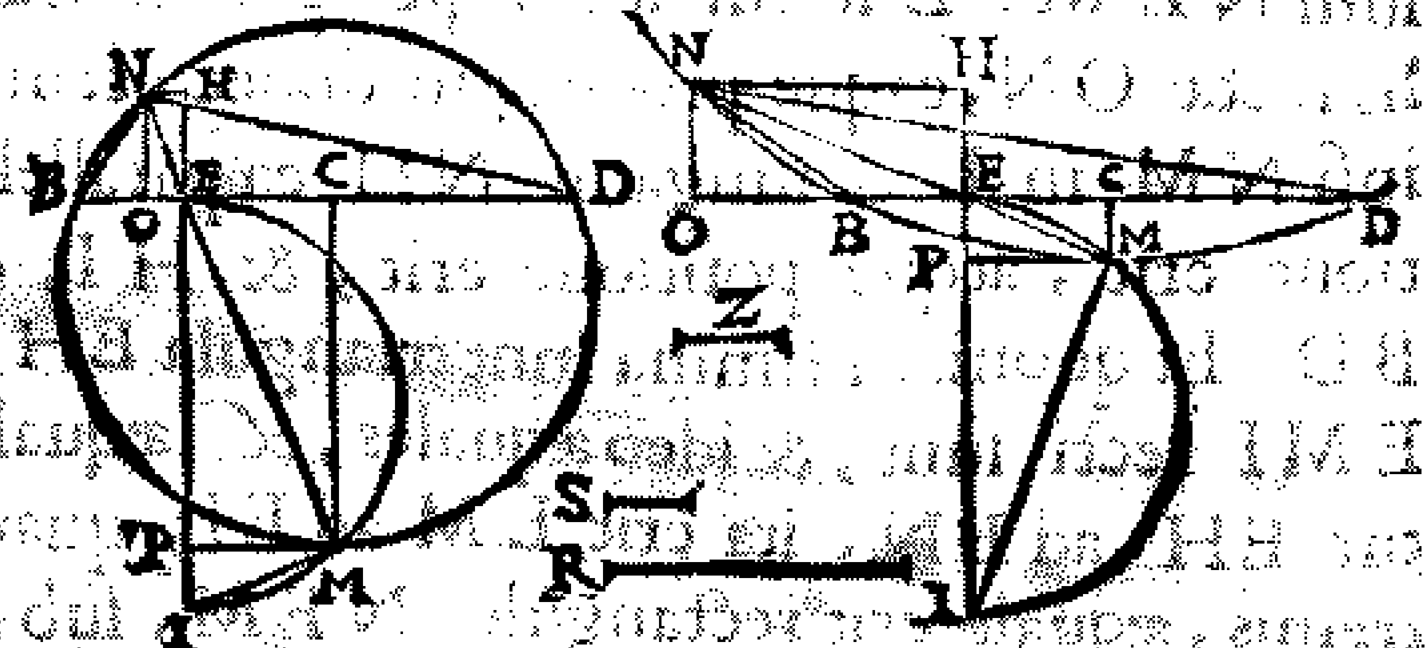
Hinc deduxit Vieta determinationem Problematis, nempè.

Oportere cum basis secabitur pro ratione crurum, & rectangulum quod fit sub segmentis applicabitur ad altitudinem trianguli, quod inde orietur, non esse minus differentiâ segmentorum basis.

Hanc determinationem Cyriacus illegitimam esse censet, & ideo delēdam, ego verò eam non solum legitimam, sed etiam necessariam esse demonstrabo. B

Lemma.

Si basis trianguli secetur pro ratione crurum, & rectangulum sub segmentis applicetur ad altitudinem trianguli, latitudo inde orta non erit minor differentia segmentorum.



SIt triangulum N B D, cuius angulus verticis secetur bifariam a recta N E secante basim B D in E; itaque erit vt B N ad N D, ita B E ad E D. Ducatur autē per punctū E perpēdicularis H E I, & fiat H E æqualis N O, altitudini trianguli N B D. Deinde applicetur rectangulū B E D ad rectā H E, & faciat latitudinem E I. Dico ipsam E I non esse minorem differentia segmentorum B E, E D. Producatur enim N E donec secet circumferentiā circuli circa triangulū B N D descripti in M, & secetur B D bifariam in C, & iungantur M C, M I, N H. Quoniam igitur æquales sunt anguli B N M, M N D, erunt æquales & circumferentiæ B M, M C, quibus ipsi anguli insistunt; vnde M C perpendicularis erit ipsi B D, & ideo parallela rectæ E I. Et quoniam rectangulum H E I æquale est C rectangulo B E D, ex constructione, hoc est rectangulo N E M; erit vt E I ad E M ita E N ad E H; sunt autem anguli I E M, N E H ad verticem æquales, ergo * æquiangula erunt triangula E M I, E H N; quare angulus E M I æqualis erit angulo E H N, sed rectus est E H N, ergo & E M I rectus erit; vnde semicirculus in diametro. E I descriptus transibit per M, eiusq; semidiameter non erit minor quàm M P perpendicularis ad E I, hoc est quam E C, & per consequens, nec tota diameter E I minor erit, quàm dupla E C; sed segmenta B E, E D differunt perduplam E C, ergo ipsa E I non erit minor quàm differentia segmentorum B E, E D quod erat ostendendum. D

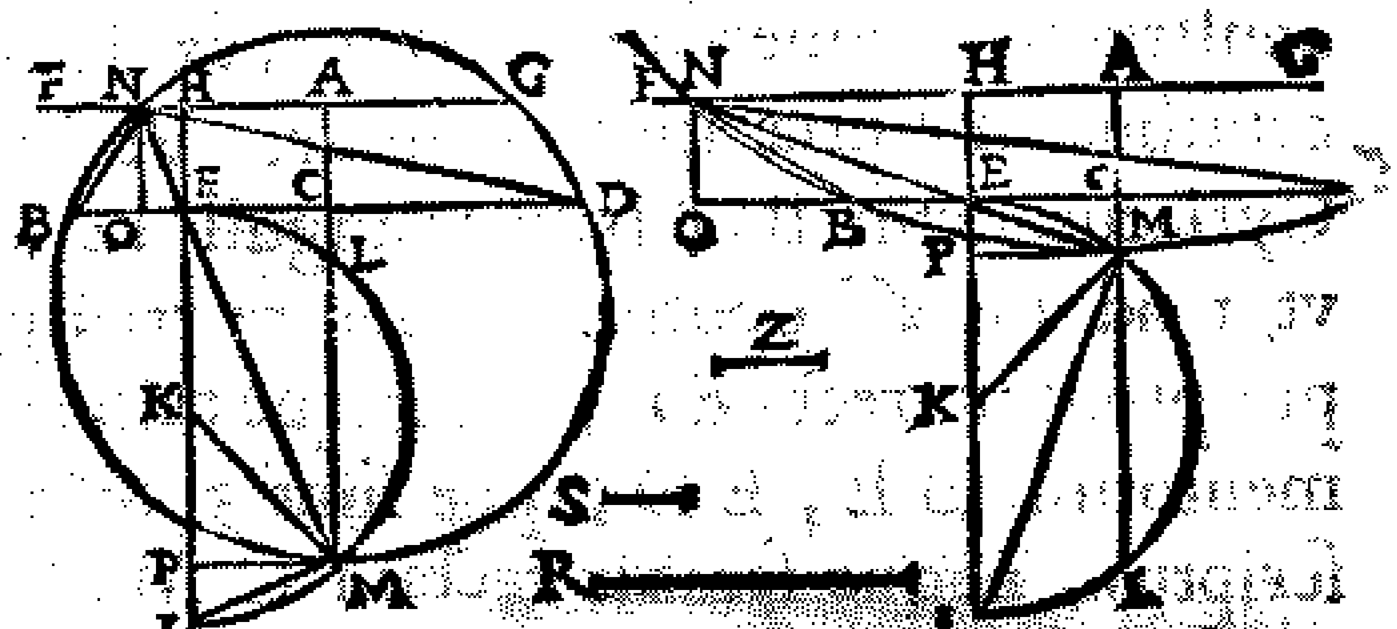
* 6 sexti

Corol-

Corollarium.

Hoc igitur demonstrato, constat, determinationem, quam Vieta Problemati præposuit, legitimam esse, atque necessariam.

Compositio Problematis ea ipsa, quam Vieta exhibuit.



Sit data trianguli basis B D, altitudo Z, ratio crurũ vt S. ad R. Oportet inuenire triãgulum. Basis B D secetur bifariã, & ad angulos rectos in C à recta
B A C, quæ sit ipsi Z æqualis, & per A agatur F A G ipsi B D parallela. Eadem basis B D secetur in E ratione crurum, vt sit B E ad E D sicut S ad R, & agatur H E ipsi A C æqualis, & parallela, & ita producatur in I, vt quod fit sub H E, E I, sit æquale ei, quod fit sub B E, E D, & secetur E I bifariam in K, & centro K interuallo E K, vel K I describatur circulus, quem A C continuata secet in punctis L M, aut demum contingat in M, secabit enim aut continget circulũ illũ A C, quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter, erit æqualis ipsi E C, cui ex cautione adiecta Problemati præstabit, aut demum erit æqualis E K semidiameter circuli. denique acta M E secet F G in N, & connectantur B N,
C N D. Triangulum igitur constructum est B N D, cuius basis est data B D, in quam cadens perpendicularis N O fit ipsi A C, seu Z datæ æqualis. Connectatur autem I M, sunt igitur triangula similia rectangula N H E, I M E, & est, vt N E ad I E, ita H E ad E M, quod fit, itaque sub N E, E M æquale est ei quod fit sub H E, E I, idest rectangulo sub B E, E D. quare puncta N B, D M sunt in circulo, in eo autem subtensa B D secatur bifariã ad rectos angulos ab A C, quare sectio est per centrum, & sunt peripheriæ æquales B M, M D, angulus igitur B N E angulo E N D est æqualis, & ideo est B N ad N D, sicut B E ad E D. Triangulum igitur B N D descriptum est sub data base B D, cuius altitudo N O æqualis est imperatæ Z, seu A C, & B N ad N D se habet, vt B E ad E D, seu vt S ad R, quod faciendum erat.

D Animaduertit Cyriacus in Vietam, quod non demonstrauerit circulum in diametro E I descriptum secari, aut tangi à recta C M, sed cauerit ne recta E I minor sit quàm differentia segmentorum B E, E D, ex eaque cautione deduxerit, ipsum circulum secari, aut tangi ab ipsa C M; quamobrem Cyriacus cautionem illam, seu determinationem è medio tollendam esse censet; præ se enim fert, inquit, quamdam exceptionis non legitimæ speciem, vt habet latius in suo libello. Miror quomodo Cyriacus deceptus sit, vt determinationem illam, quæ adeo necessaria est, vt demonstraui, delendam esse censeat, cùm sine ipsa Problema construi non possit. ipsa sane determinationis necessitas erat ostendenda, sed licèt hoc omiserit Vieta, non ideo demonstratio illa potest dici non accurata, cùm ipsam necessitatem quilibet etiam mediocriter in Geometricis versatus ostendere possit. Sed video Cyriacum nihili determinationes Problematum æstimare, cum determinationem illam, quæ adeo necessaria est, tamquam inutilem delendam censeat, & tamen sine determinationibus Problemata determinata sunt impossibilia. Determinatio enim sola cohibens data intra suos terminos, omnes instantias constructioni aduersantes destruit, ex datis enim determinationi non subiacentibus instantiæ ipsæ oriuntur. Vt hic, sublata determinatione, vt vult Cyriacus, detur BD basis trianguli 12, Z altitudo 5, & ratio crurum vt 1 ad 3, & oporteat inuenire triangulum. Facta constructione vt supra prodibit recta EI 5 $\frac{2}{7}$, itaque minor quàm 6 differentia, videlicet segmentorum BE, ED, quæ sunt 3 & 9; quare semicirculus in EI descriptus, neque secabit rectam CM, neque tanget, nec ideo Problema perfici poterit. At præcedente determinatione, hæc instantia constructionem impediens dissoluitur: ea enim, vt dictum est, procedit ex datis ad construendum Problema non idoneis, nullum enim triangulum dari potest basim habens, & altitudinem, & rationem crurum, quales hic præscribuntur. A B

Illud autem quod in libello Vietæ in ipsa determinatione dictum est, (Oportere quod inde orietur maius esse differentia segmentorum basis) cũ dici debuisset (non esse minus) error est Typographi, nam Vietam intellexisse (oportere quod inde orietur non esse minus) clarè testantur verba illa in constructione Problematis expressa nempè (secabit enim, aut continget circulum EMI recta AC, quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter, erit æqualis ipsi EC, cui ex cautione adiecta Problemati præstabit, aut demum erit æqualis KE semidiameter circuli) quod si aliter sensisset, nempè (oportere quod inde orietur maius esse differentia segmentorum basis) non add disset (aut demum erit æqualis EK semidiameter circuli. C

His igitur ita se habentibus, melius quidem Cyriacus fecisset, si commentatorem potius, quàm correctorem egisset, sic enim suppleuisset id quod omissum fuerat à Vieta, ostendens determinationem illam necessariam esse, non autem tamquam inutilem fuisse delendam censuisset.

De Problemate primo Appendiculæ primæ ad Apollonium Gallum, quod licèt explicatione indigeat non leui, Cyriacus intactum præterijt. D

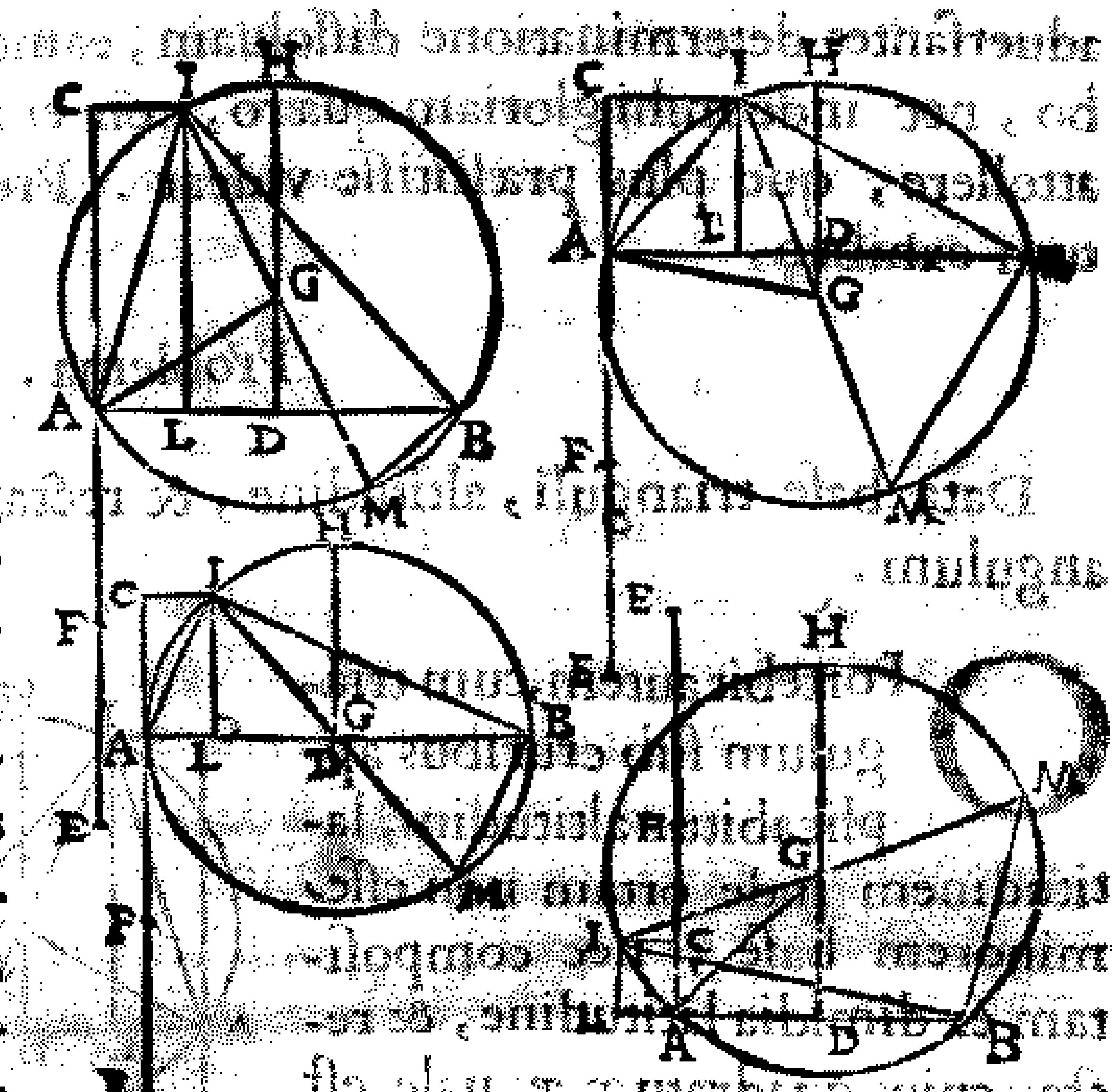
Problema Constructum à Vieta.

Data base trianguli, altitudine & rectangulo sub cruribus; inuenire triangulũ.

TRianguli, de quo quæritur, esto data basis AB, altitudo æqualis rectæ AC, rectangulum autem sub cruribus detur æquale ei, quod fit sub AC, AE. Oportet inuenire triangulum, cuius basis AB altitudo ipsi AC æqualis, & rectangulum sub cruribus æquale ei,

quod

A quod fit sub A C, A E. Inclinetur AC, AB ad angulos rectos, & ipsæ AE, AB secetur bifariã in F, D, & per D agatur D G ipsi G A E parallela, in qua ponatur A G ipsi A F æqualis, & cẽtro G interuallo G A, vel G B describatur circulus. Deniq; per punctũ C agatur C I ipsi A B parallela secãs circulũ in I, & connectãtur A I, B I. In triãgulo igitur A I B cũ ex vertice ca-



B dat in basim A B perpẽdicularis IL, ipsa erit altitudini AC. æqualis. Agatur autẽ diameter IGM; & connectatur M B, erit triangulum I B M rectangulum, & simile triangulo I A L; recti enim sunt anguli I L A, I B M, & siue anguli I M B, siue anguli I A B, duplam amplitudinem eadem peripheria I B definit: quare est vt I L ad A I, ita I B ad I M, sed I M est dupla ipsius A G, & ideo æqualis toti A E. Itaque rectangulum sub I M, I L constituitur rectangulo sub C A, A E æquale, ergo eidem quoque æquatur rectangulum sub A I, I B. Ad datam itaque basim A B, & altitudinem I L, seu A C, ita constitutum est

C triangulum A I B, vt rectangulũ sub cruribus æquale sit, rectangulo sub A C, A E, quod erat faciendum.

Miror cur Cyriacus in suo libello instantias quoque, quæ aduersus constructionem huiusce Problematis feruntur non adnotauerit, cum eæ sint plures, maioresque quam in illo meo Problemate variorum, aut in Problemate secundo supradictæ Appendiculæ, in quo studium omne adhibuit, vt corrigeret etiam quæ corrigenda non erant. Neque verisimile est Cyriacum Problema primum non legisse, cum secundum illud tàm attentè perlegerit. Sed nec dubito quin ad explanationem huiusmodi difficultatem sufficeret, cum eruditum eum, ac varia litterarum suppellectile instructum, libellus ipse ostendat. fortasse iucundiora studia, vel etiam quæstuosiora secutus, laboriosa

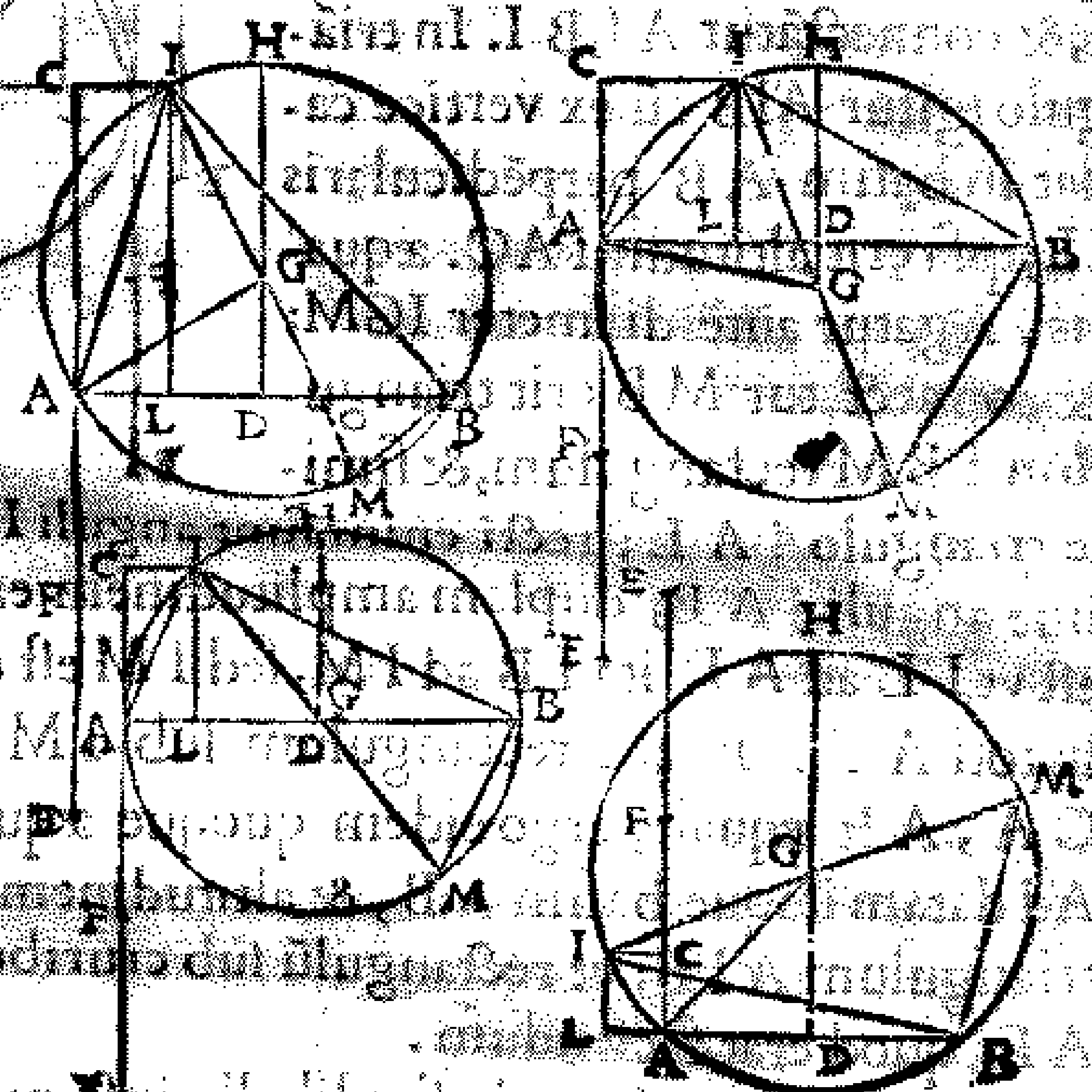
D hæc prætermisit.

Duæ sunt instantiæ, quæ constructionem huius Problematis impediunt. altera quidem quod non patet rectam æqualem A F posse à puncto A in perpendicularem D G duci, quoniam si A F maior esset, quàm A D, ea recta duci non posset. Altera vero instantia est, quod nõ apparet quare C I parallela basi A B, debeat necessario secare circulum A B I, nam si A C maior esset, quàm recta D G producta vsque ad circumferentiam circuli, ipsa C I non secaret circulum, sed ne tangeret quidem. Sumam igitur personam commentitoris, nec dedignabor tanti viri scripta presso, ac breui stylo tradita, & ob id fortasse subobscura fusiùs explicare. Oẽs itaq; instãtias cõstructioni

aduersantes determinatione dissoluam, eamque necessariam esse demonstra- A
bo, nec inde mihi gloriam quæro, non enim mihi moris est paruam rem attollere, quo plus præstitisse videar. Problema igitur illud sic explanatum exhibeo,

Problema.

Data base trianguli, altitudine, & rectangulo sub cruribus, inuenire triangulum.



OPortebit autem, cum triãgulum sub cruribus applicabitur altitudini, latitudinem inde ortam non esse minorem base; nec compositam ex dimidia latitudine, & recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ latitudinis superat quadratũ dimidiæ basis, minorem esse altitudine. B

Triãguli de quo quæritur esto data basis A B, altitudo æqualis rectæ A C, rectangulum autem sub crurib[9] detur æquale ei quod C
fit sub A C, A E, quarum A E non sit minor, quàm A B, nec composita ex dimidia A E, & recta, cuius quadrato differt quadratum dimidiæ A E à quadrato dimidiæ A B, minor sit quàm A C. Oportet inuenire triangulum cuius basis A B, altitudo ipsi A C æqualis, & rectangulum sub cruribus æquale ei, quod fit sub A C, A E. Inclinentur A C, A B ad angulos rectos, & rectæ A E, A B secentur bifariàm in F D, & per D agatur D G ipsi A C parallela, in qua ponatur A G ipsi A F æqualis, est enim A F non minor, quàm A D, cùm ex determinatione Problematis tota A E non sit minor, quàm tota A B. Deinde centro G interuallo G A, vel G B describatur circulus secans D G productam in H. erit D H ex determinatione Problematis non minor altitudine A C; componitur enim ipsa D
D H ex rectis H G, G D, quarũ H G æqualis est G A vel A F, & quadratũ rectæ G D excessus est, quo quadratum A G vel A F superat quadratũ A D, itaq; acta C I ipsi A B parallela, secabit circulum aut continget. secet ergo aut contingat in I, & connectantur A I, I B. In triangulo igitur A I B, cùm ex vertice cadat in basim A B perpendicularis I L, ipsa erit altitudini A C æqualis. Agatur autem diameter I G M, & connectatur M B, erit triangulum I B M rectangulum & simile triangulo I A L; recti enim sunt anguli I B M, I L A, hic ex constructione ille ex vi semicirculi, & anguli I M B, I A L sunt

æqua-

A æquales, in primis enim tribus figuris eidem circumferentiæ I B insistunt, in reliqua verò cùm anguli oppositi I M B, I A B quadrilateri I M, B A in circulo æquales sint duobus rectis, & æquales quoque duobus rectis anguli I A L, I A B; erunt anguli I M B, I A B æquales angulis I A L, I A B, dempto communi angulo I A B, reliquus I M B reliquo I A L æqualis erit. Cùm igitur similia sint triangula I B M, I L A, erit vt I L ad I A, ita I B ad I M, vnde rectangulum L I M sub extremis, æquale erit rectangulo A I B sub medijs; sed rectangulum L I M æquale est rectangulo C A E, quoniam æquales sunt I L, C A, & æquales I M, A E, vtraque enim dupla est ipsius A G; ergo rectangulum A I B æquale erit rectangulo C A E. Ad datam itaque basim A B, & altitudinem I L, seu A C, ita constitutum est triangulum A I B vt rectangu-

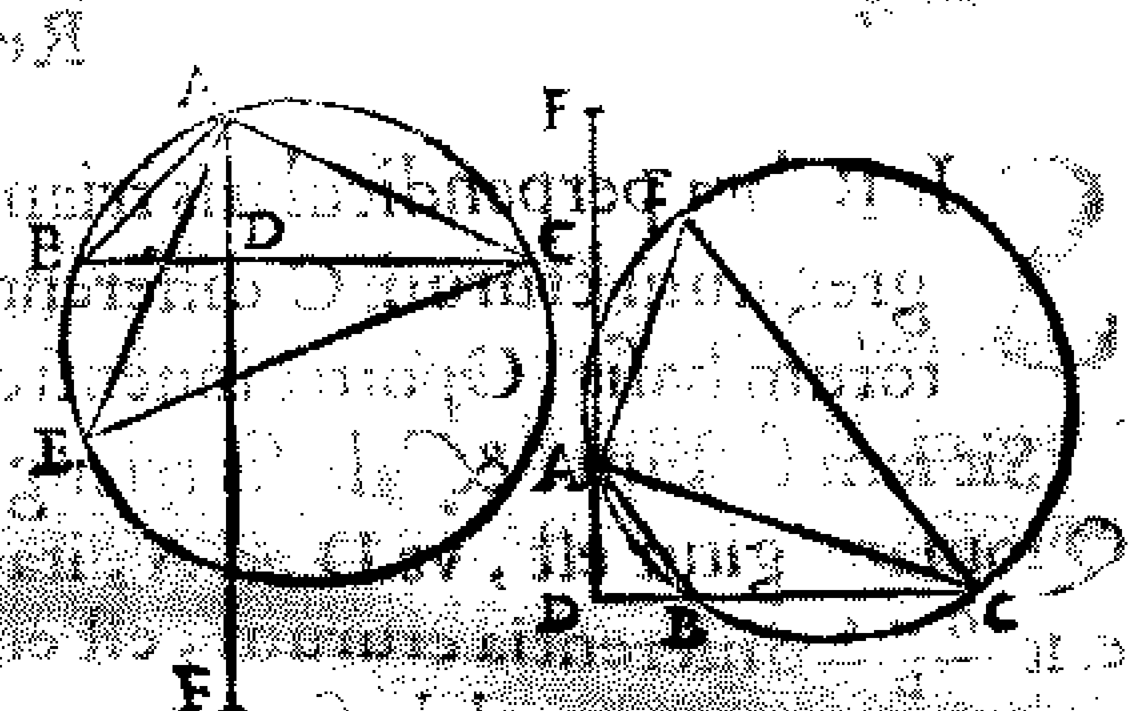
B lum sub cruribus æquale sit rectangulo C A E, quod erat faciendum.

Determinatum est, rectam D H compositam ex A G, G D, non esse minorem altitudine A C; sed si differentia quoque ipsarum A G, G D fuerit non minor eadem altitudine A C; duobus modis Problema absoluetur, nempe duo diuersa triangula Problema efficient. in vno angulus verticis erit obtusus, in altero acutus. Hoc apparet in duobus vltimis figuris.

At verò Determinationem, quam Problemati adiecimus, necessariam esse, sequenti Lemmate ostendetur.

Lemma.

C SI rectangulum sub cruribus trianguli applicetur ad altitudinē eiusdem trianguli, latitudo inde orta, non erit minor base, nec composita ex dimidia latitudine, & recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ latitudinis superat quadratum dimidiæ basis, minor erit altitudine.



Sit triangulum A B C, cuius altitudo A D, sitque rectangulum B A C, sub cruribus, æquale rectangulo A D F. Dico primum, D F non esse minorem base B C. Describatur enim circa triangulum circulus A B C, & in

D eo ducatur diameter C E, & iungatur A E: angulus igitur E A C in semicirculo rectus erit, & ideo æqualis recto A D B. sunt autem & anguli A E C, A B D æquales, in prima enim figura, eidem circumferentiæ A C insistunt, in secunda verò quadrilateri E A, B C, in circulo anguli appositi A E C, A B C duobus rectis sunt æquales; sed & anguli A B D, A B C æquales sunt duobus rectis, ergo anguli A E C, A B C æquales erunt angulis A B D, A B C, dempto communi angulo A B C, reliquus angulus A E C reliquo A B D æqualis erit; sed & anguli E A C, A B D ostensi sunt æquales, ergo similia erunt triangula E A C, A D B. quare vt A D ad A B, ita erit A C ad C E, ac proinde rectangulum sub extremis A D, C E æquale erit rectangulo B A C

sub

sub medijs, hoc est rectangulo A D F. vnde D F æqualis erit diametro C E, A
& consequenter non minor quàm B C quod est primum.

Deinde secetur B C bifariam, & ad rectos angulos in G à recta G I secante diametrum E C in H, circumferentiam verò in I; erit ergo H centrum circuli, & semidiameter H I vel H C, æqualis erit dimidiæ D F. Dico igitur rectam I G compositam ex I H, & H G hoc est ex dimidia D F, & recta cuius quadrato superatur quadratum C G à quadrato C H, seu dimidiæ D F, nõ esse minorem altitudine A D. Hoc licet manifestum sit, tamen ne dicat Cyriacus demonstrationem non esse accuratam; istud quoque demonstrabo.

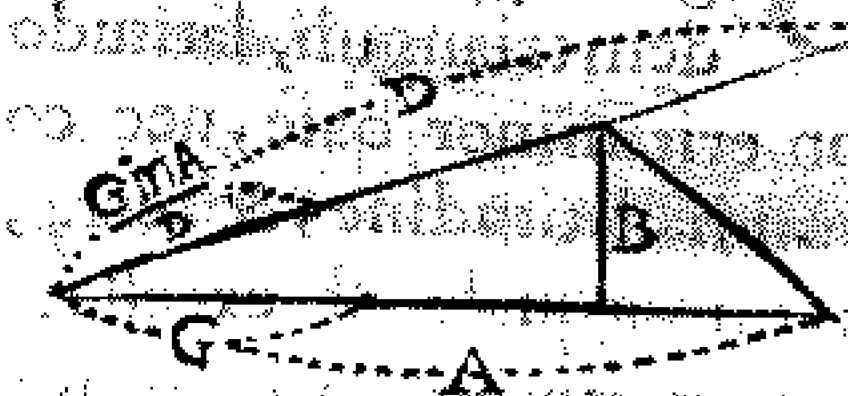
Si punctum D idem sit, quod G erit & D E eadem, quæ G I, ergo constat propositum. si vero punctum D non sit idem quod G, cõnectatur G A, erit G I, cum sit in ea centrum circuli maior, quàm G A; sed ipsa G A maior est B
quam D A, quadratum enim G A æquale est quadratis D A D G, ergo G I multo maior erit, quàm D A; non autem minor quod secundo loco erat demonstrandum. Quare manifesta est determinatio Problematis. Longius quàm par erat incepto abij ad propositum redeo.

Problema IV.

Data perpendiculari, aggregato crurum trianguli, & differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

Resolutio.

SIt B data perpendicularis trianguli, D aggregatum crurum G differentia segmentorum basis. Oportet inuenire triangulũ. C



Sit iam factum, & basis trianguli esto A. Quoniam igitur est, vt D ad A, ita G ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$ erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ differentia crurum, est enim vt * aggregatum crurum ad basim, ita differentia segmentorum basis, ad differentiam crurum; sed quadratum aggregati crurum, vnà cum quadrato differentiæ eorundem, * dupla sunt quadratorum à cruribus, ergo $DQ + \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æqualia erunt quadratis crurum bis: Quadrata autem crurum bis, * æqualia sunt quadratis segmentorũ bis, vna cum quadrato perpendicularis quater, ergo. D

Theor. 7 huius

Theor. 4 primi

7 primi

$DQ + \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabuntur quadratis segmentorum bis $+ BQ\,4$

Sed quadrata segmentorum bis * æqualia sunt quadrato basis, vnà cum quadrato differentiæ segmentorum basis, ergo

Theor. 4 primi

$$DQ + \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} \text{ æquabitur } AQ + GQ + BQ\,4$$

Hic non possunt auferri ex vtraq; parte A Q, & D Q, vt cognita ab incognitis separentur; quia ijs ablatis.

$$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ, \text{ æquaretur } BQ\,4 + GQ - DQ$$

Atque adeo ex vna æqualitatis parte existeret quadratum differentiæ crurum, minus quadrato basis, quod esset absurdum; nam non potest auferri

qua-

A quadratum basis à quadrato differentiæ crurum, maius nempe à minore. auferatur ergo vtrinque $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, & GQ, & $BQ\,4$, vt cognita ab incognitis separentur. ergo

$$DQ - GQ - BQ\,4 \text{ æquabitur } AQ - \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$$

Vel $DQ - GQ - BQ\,4$ æquabitur $\frac{DQ \text{ in } AQ - GQ \text{ in } AQ}{DQ}$

est enim $\frac{DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ idem quod AQ.

Seu quod idem est $DQ - GQ - BQ\,4$ æquabitur $\frac{DQ - GQ) \text{ in } AQ}{DQ}$

Denique resoluatur fractio $\frac{DQ - GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ in sua membra, vt æqualitas in proportionem transmutetur, vt in principio huius Libri docuimus, ergo proportionalia erunt plana.

B $$DQ - GQ, \quad DQ - GQ - BQ\,4, \quad DQ, \quad AQ.$$

Atque eorum radices proportionales erunt

$$L.V.\,DQ - GQ, \quad L.V.\,DQ - GQ - BQ\,4, \quad D \quad A$$

Porisma.

VT recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum trianguli, superat quadratum differentiæ segmentorum basis, ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadrata, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & perpendiculari dupla; ita est aggregatum crurum ad basim.

Datur ergo basis trianguli de qua quærebatur.

C Ex Porismate apparet, quadratum aggregati crurum maius esse quadratis, quæ fiunt à differentia segmentorum basis, & à perpendiculari dupla.

Apparet quoque, priorem rectam in Porismate nominatam ad posteriorẽ, minorem rationem habere, quàm aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis; prior enim recta ad posteriorem se habet, vt aggregatum crurum ad totam basim. Sic Porisma indicat.

Hæc omnia demonstranda sunt, & Problemati præponendæ Determinationes.

Lemma I.

D Quadratum aggregati crurum trianguli maius est quadratis, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & a perpendiculari dupla.

SIt triangulum ABC, in quo perpendicularis AD secet basim BC in duo segmenta BD, DC, quorum differentia sit BE, & continuetur BA in F, vt sit BF æqualis compositæ ex BA, AC. Dico quadratum ex BF maius esse quadratis ex BE, & AD dupla. Quoniam enim quadratum BF * æquale est quadratis BA, AF, & duplo rectanguli BAF, quadrata autem BA, & AF; hoc est & AC, * æqualia sunt quadratis BD, DC, & duplo quadrati AD, duplum verò rectangulum BAF maius est du- 4 secundi

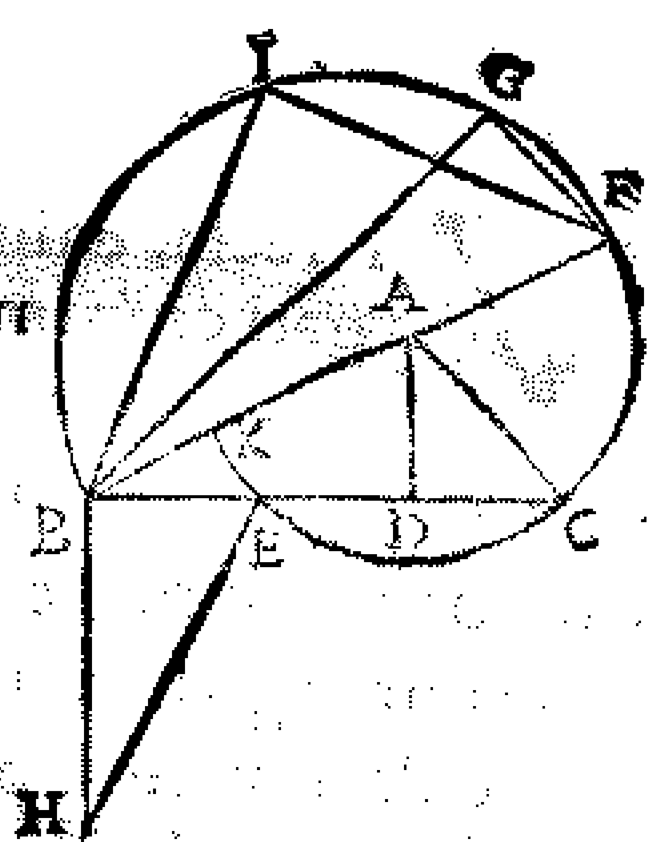
47 primi

plo

plo quadrati A D, cùm vtraque ipsarum B A, A F maior sit ipsa A D, ergo A
quadratum A F maius erit quadratis B D, D C, & quadruplo quadrati A D, & consequenter multo maius quadrato B E, & quadruplo quadrati A D, hoc est & quadrato A D duplæ, quod erat ostendendum.

Lemma II.

Recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum trianguli superat quadratum differentiæ segmentorum basis, ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo idem quadratum aggregati crurum superat quadrata differentiæ segmentorum basis, & perpendicularis duplæ, minorem rationem habet, quàm aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis. B



Sit triangulum A B C, cujus basim B C secet perpendicularis A D in duo segmenta B D, D C, quorum differentia sit B E, & producatur B A in F, vt sit A F æqualis A C, & in B F describatur semicirculus, in quo accomodetur F G æqualis B E, & iungatur G B; deinde ex B demittatur B H perpendicularis ipsi B C, duplæ verò A D æqualis, & iungatur H E: ea minor erit, quàm B F, quia quadratum B F, ex antecedente Lemmate, maius est quadratis B E, B H; hoc est quadrato H E, ergo in semicirculo B G F aptetur F I æqualis H E; & iungatur I B. quadratum igitur B F superat quadratum B E hoc est F G, quadrato G B, idemque quadratum B F superat quadrata B E, B H, hoc est quadratum E H; seu F I, quadrato I B. C

Dico igitur B G ad B I, minorẽ rationẽ habere, quã B F ad B E. Describatur enim ex A centro ad interuallum A C vel A F circulus, quem A B secet in k, is circulus transibit per E, cum sint æquales E D, D C, & A D perpendicularis ad B C. Quoniam igitur quadrata B F, B k* æqualia sunt duplo quadratorum B A, A F, hoc est B A, A C, duplum autem quadratorum B A, A C* æquale est duplo quadratorum B D, D C, & quadruplo quadrati A D; ergo quadrata B F, B k æqualia erunt duplo quadratorum B D, D C, & quadruplo quadrati A D, hoc est & quadrato B H; est enim B H dupla ipsius A D; D sed duplum quadratorum B D, D C,* æquale est quadratis B C, B E, ergo quadtata B F, B k æqualia erunt quadratis B C, B E, B H; auferantur vtrinq; quadrata B k, B E, B H, quadratum igitur B F, minus quadratis B E, B H, hoc est minus quadrato H E, æquale erit quadrato B C, minus quadrato B k; sed quadratum B F, minus quadrato H E vel F I, idem valet, quod quadratum B I; ergo quadratum B I æquale erit quadrato B C, minus quadrato B k.

Theor. 4 primi

47 primi

Theor. 4 primi

Et quoniam est B F ad B E, vel F G, sicut B C ad B k, erit & quadratum B F ad quadratum F G, vt quadratum B C ad quadratum B k; & diuidendo erit vt quadratum B F, minus quadrato F G, hoc* est, vt quadratum B G ad

47 primi

qua-

A quadratum F G, ita quadratum B C, minus quadrato B k, ad quadratum B k; sed quadratum B C, minus quadrato B k, ostensum est æquale quadrato B I, ergo vt quadratum B G ad quadratum F G, ita erit quadratum B I ad quadratum B k, & per consequens vt B G ad F G, hoc est ad B E, ita erit B I ad B k, & permutando vt B G ad B I, ita B E ad B k, hoc* est, ita B F ad B C; sed minor est ratio B F ad B C, quàm B F ad B E, ergo & ratio B G ad B I, minor erit quàm B F ad B E, quod erat ostendendum. Theor. 7 huius

His demonstratis, Problema ita determinandum erit.

Determinatio.

B Oportet quadratum aggregati crurum, maius esse quadratis, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & à perpendiculari dupla.

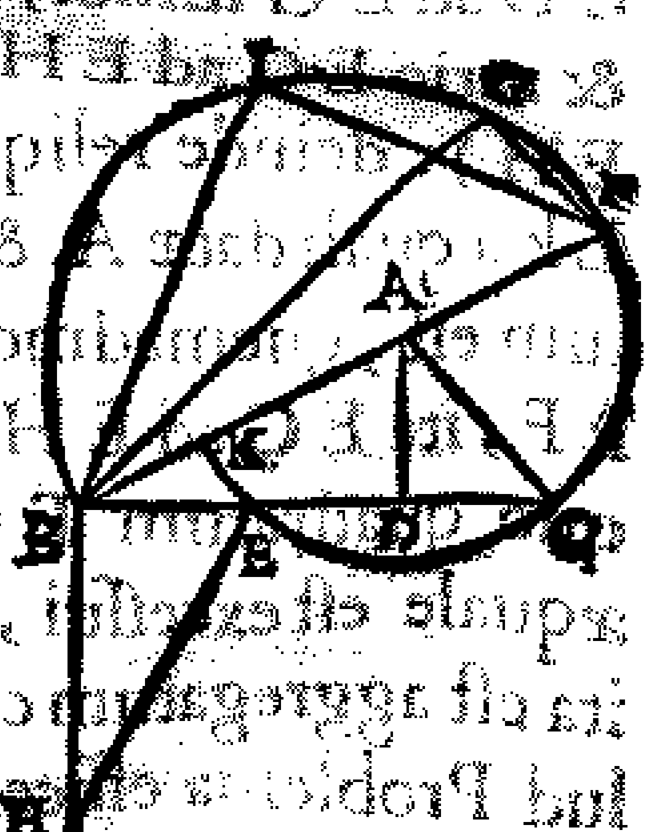
Determinatio II.

Oportet quoque rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadratum differentiæ segmentorum basis, ad rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadrata differentiæ segmentorum basis, & perpendicularis duplæ, minorem rationem habere, quàm aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis. Sed aliter quoque in simpliciorem formam potest hæc secunda determinatio ita reduci.

C Oportet quoque duplam perpendicularem minorem habere rationem, ad rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadratum differentiæ segmentorum basis, quàm eadem recta ad aggregatum crurum.

Determinationem hanc demostrabimus hoc modo.

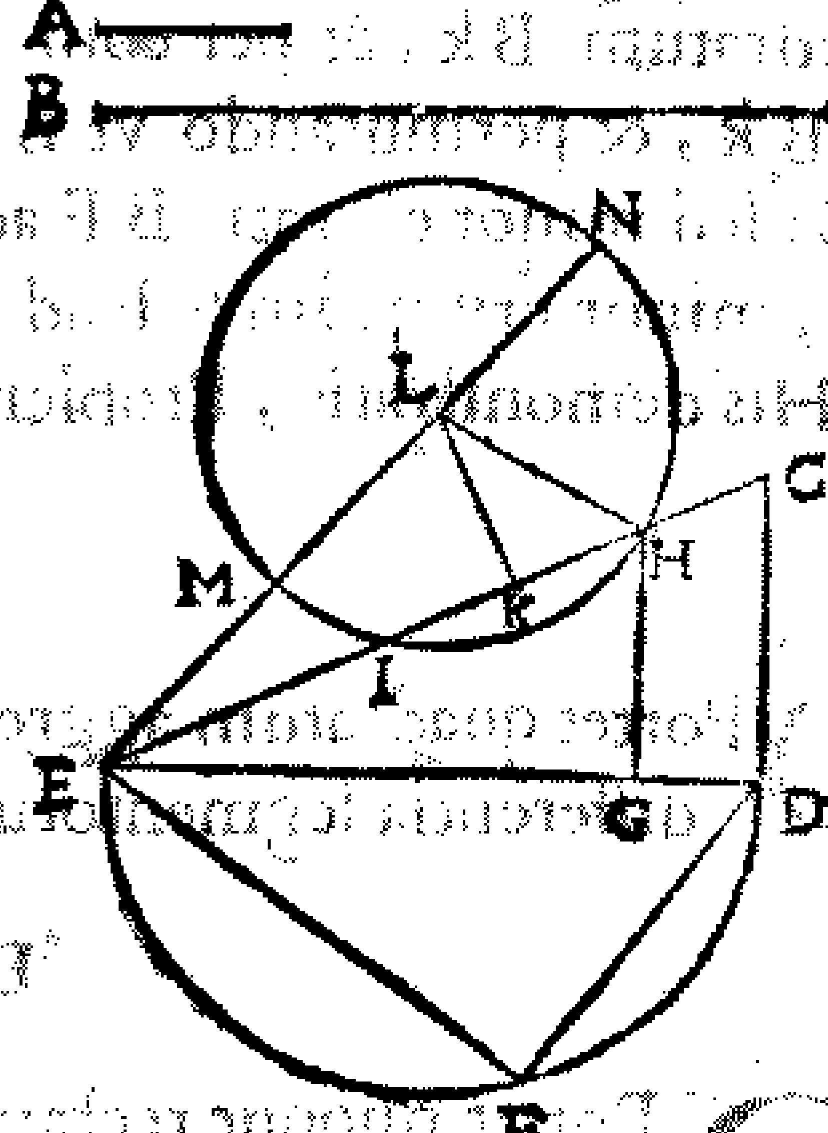
Quadratum B F superat quadratum B G* quadrato F G hoc est B E, idem autem quadratum B F, superat quadratum B I quadrato F I, hoc est quadrato H E, seu quadratis B E, B H, quadratum igitur B G superabit quadratum B I quadrato B H. 47 primi



D Et quoniam ostensum est B G ad B I minorem rationem habere, quàm B F ad B E, vel ad F G, habebit quoque & quadratum B G ad quadratum B I minorem rationem, quàm quadratum B F ad quadratum F G; quare per conuersionem rationis,* quadratum B G ad quadratum B G, minus quadrato B I, hoc est ad quadratũ B H, maiorem habebit rationem, quàm quadratum B F ad quadratum B F, minus quadrato F G; hoc est ad quadratum B G; ergo* conuertendo minorem rationem habebit quadratum B H ad quadratum B G, quàm idem quadratum B G ad quadratum B F, & consequenter B H ad B G minorem quoque rationem habebit quàm eadem B G ad B F, quare constat Determinatio. 30 quinti 26 quinti

Com-

Compositio Problematis.



SIt data perpendicularis trianguli A, aggregatum crurum B, & differentia segmentorum basis CD. Oportet inuenire triangulum. à puncto D ipsi C D ducatur perpendicularis D E, in eaq; ponatur C E æqualis B, quadratum igitur E C superat quadratum C D quadrato E D; itaq; recta E D, ex præcepto Porismatis, ponenda est pro prima quatuor proportionalium. Deinde in E D describatur semicirculus, in quo accomodetur D F æqualis duplæ A, (est autem E D maior quam A dupla, quoniam ex prima determinatione Problematis quadratum E C, cui æqualia sunt quadrata C D, D E, maius est quadratis C D, & A duplæ, atq; adeo quadratum D E maius est quadrato duplæ A, vnde & recta D E maior quàm A dupla), & iungatur E F. Quoniam igitur quadratum E C superat quadratum C D quadrato D E; quadratum autẽ D E superat quadratum D F quadrato E F ipsum quadratũ E C superabit quadrata C D, D F quadrato E F; ergo recta E F debet fieri secunda quatuor proportionaliũ, tertia E C, & quærenda est quarta, sic Porisma docet, rectæ igitur E F ponatur æqualis E G, & agatur G H parallela ipsi D C secans E C in H, erit igitur vt E D ad D G, ita E C ad E H: quare E H est quarta proportionalis quæsita. Atq; ea debet fieri basis trianguli construendi: sic habetur ex Porismate. Ab ipsa igitur E H abscindatur E I æqualis C D (est autem C D minor, quàm E H; nam cùm sit vt E D ad E G, ita E C ad E H, ratio autem E D ad E G minor, quàm E C ad C D, ex secunda determinatione, erit ergo & ratio E C ad E H minor, quàm E C ad C D, quare * C D minor est, quàm E H). deinde reliqua I H secetur bifariam, & ad angulos rectos in K à recta L k æquali datæ A, & iungantur E L, L H. Itaq; triangulum L E H constitutum est, quemadmodum Porisma docet; est enim vt E D ad E G, hoc est ad E F, ita E C ad E H, hoc est vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum E C superat quadratum C D, ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo idem quadratum E C superat quadrata C D, D F, ita est aggregatum crurum ad basim. Nunc ostendendum est, triangulum illud Problema efficere.

* quinti

In triangulo L E H perpendicularis L K æqualis est A datæ, ex constructione; & E I differentia segmentorum basis L k, K H æqualis C D, similiter ex constructione, superest vt composita ex cruribus E L, L H ostendatur æqualis datæ E. id fiet repetitis resolutionis vestigijs hac ratione.

Centro L interuallo L H describatur circulus secans eius E L in M, productum vero in N, is circulus transibit per punctum I cùm sint æquales I k, K H,

A KH, & Lk perpendicularis ad EH. Quoniam igitur quadratum EH minus quadrato HG æquale * est quadrato. EG, hoc est EF, seu quod idem * est 47 primi
quadrato ED, minus quadrato DF, quadratum autem ED * æquale est quadrato EC minus quadrato CD, ergo quadratum EH; minus quadrato HG æquale erit quadrato EC minus quadratis CD, DF. addantur vtrique parti quadrata HG, CD, DF; ea enim dempta sunt in resolutione, ergo quadrata EH, CD, DF, æqualia erunt quadratis EC, HG; sed quadratum CD æquale est quadrato EI, & quadratum DF quadruplum est quadrati LK; cum sit DF dupla ipsius Lk, ergo quadrata EH, EI, vnà cum quadruplo quadrati Lk æqualia erunt quadratis EC, HG; sed quadrata EH, EI * æqualia sunt duplo quadratorum EK, KH, ergo duplum quadratorum Ek, kH, B vnà quadruplo quadrati Lk æquale erit quadratis EC, HG; sed duplum quadratorum EK, kH, vnà cum quadruplo quadrati LK * æquale est duplo quadratorum EL, LH, ergo duplum quadratorum EL, LH æquabitur quadratis EC, HG; duplum autem quadratorum EL, LH, hoc est EL, LN * æquale est quadratis EN, EM, ergo quadrata EN, EM quadratis EC, HG æqualia erunt.

47 primi; Theor. 4 primi; 47 primi; Theor. 4 primi

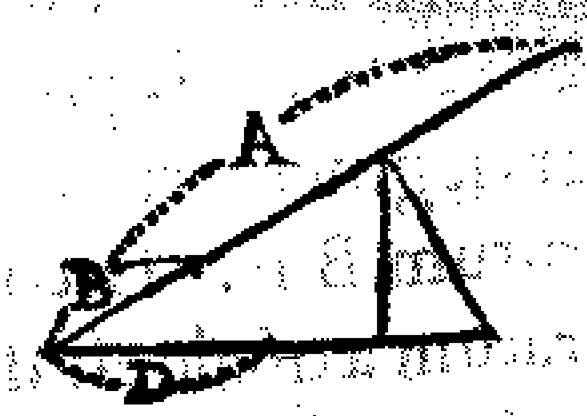
Et quoniam propter similitudinẽ triangulorũ EHG, ECD est, vt EH ad HG, ita EC ad CD hoc est ad EI, rectangulum IEH sub extremis, hoc * est rectangulum MEN æquale erit rectangulo EC, HG sub medijs, sed & quadrata EN, EM ostensa sunt æqualia quadratis EC, HG, ergo recta EM * æqualis erit rectæ HG, & EN æqualis EC, hoc est datæ B, quod erat ostendendũ. 36 tertij; Theor. 5 huius

C Constructum est igitur triangulum LEH quale construendũ proponebatur.

Problema V.

Data differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, & differentia crurum. Inuenire triangulum.

Resolutio.



SIt data differentia segmẽtorum basis D, differentia crurum B, & oporteat inuenire triangulum.

Sit iam factum, & aggregatum crurum triãguli estò A, ergo A ✢ B erit * crus maius duplũ, A — B * duplũ crus minus, & cõsequenter simplum crus maius, erit D A ½ ✢ B ½ crus minus A ½ — B ½, sed quadrata crurum æqualia sunt quadrato basis subtendẽtis angulum rectum trianguli, ergo Corol. 1 Prob. 1 Lib. 1

Quad. cruris maioris A Q ¼ ✢ B Q ¼ ✢ B in A ½)
Quad. cruris minoris A Q ¼ ✢ B Q ¼ — B in A ½) æquabuntur quadrato basis

Hoc est A Q ½ ✢ B Q ½ æquabitur quadrato basis

Et cõsequẽter L.V. A Q ½ ✢ B Q ½ æquabitur ipsi basi

Et quoniam est * vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, ideo proportionales erunt. Theor. 7 huius

B D L.V. A Q ½ ✢ B Q ½ A

Et per consequens earum quadrata proportionalia erunt.

BQ DQ AQ $\frac{1}{2}$ + BQ $\frac{1}{2}$ AQ

Et duplatis antecedētibus, vt potestas integra fiat, erunt quoq; proportionalia

BQ 2 DQ AQ + DQ AQ

Et diuidendo proportionalia erunt

BQ 2 − DQ DQ BQ AQ

Atque proportionalia erunt, & eorum latera

L.V. BQ 2 − DQ D B A

Porisma.

Vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo duplum quadratum differentiæ crurum superat quadratum differentiæ segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli ad differentiam segmentorum basis; ita est differentia crurum ad aggregatum eorundem.

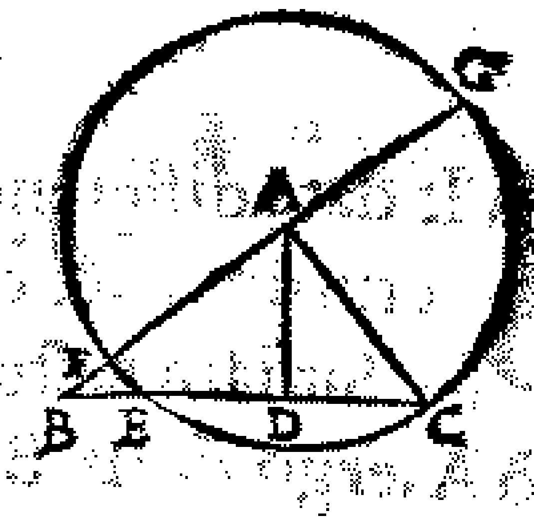
Datur ergo aggregatum crurum, de quo quærebatur.

Ex Porismate apparet differentiam segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli minorem esse recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum, eo quod duplum quadratum differentiæ crurum maius est quadrato differentiæ segmentorum.

Id ostendendum est atque Problemati præfigenda determinatio, ne differentia segmentorum basis detur non minor, quàm recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum. quamobrem ita propono.

Lemma.

Differentia segmentorũ basis subtendentis angulũ rectum trianguli, minor est, quàm recta cuius quadratũ æquale est duplo quadrati differentiæ crurum.



Sit triangulum A B C rectangulum in A, cuius basim B C secet perpendicularis A D in duo segmenta B D, D C, & centro A interuallo A C cruris minoris describatur circulus secans basim B C in E, crus vero B A in F, productum autem in G. Differentia igitur segmentorum B D, D C erit B E; differentia vero crurum B F. Dico B E minorem esse recta, cuius quadratum æquale est duplo quadrati B F. Quoniam enim B G secta est vtrunq; in A, quadratum totius B G vnà cum quadrato B F differentiæ partium * æquale erit duplo quadratorum B A, A G, hoc est B A, A C, seu quod idem est æquale erit duplo quadrati B C, & consequenter quadratum B G minus erit duplo quadrati B C. Et quoniam est B C ad B G vt B F ad B E, erit & quadratum B C ad quadratum B G vt quadratum B F ad quadratum B E, & duplatis antecedentibus vt duplum quadrati B C ad quadratum B G, ita erit duplum quadrati B F ad quadratum B E; sed quadratum B G ostensum est minus duplo quadrati B C, ergo & quadratum B E minus erit duplo quadrati B F, atque adeo & recta B E minor erit, quàm recta cuius quadratum

Theor. 4 primi

æqua-

A æquale est duplo quadrati B F, quod erat ostendendum.

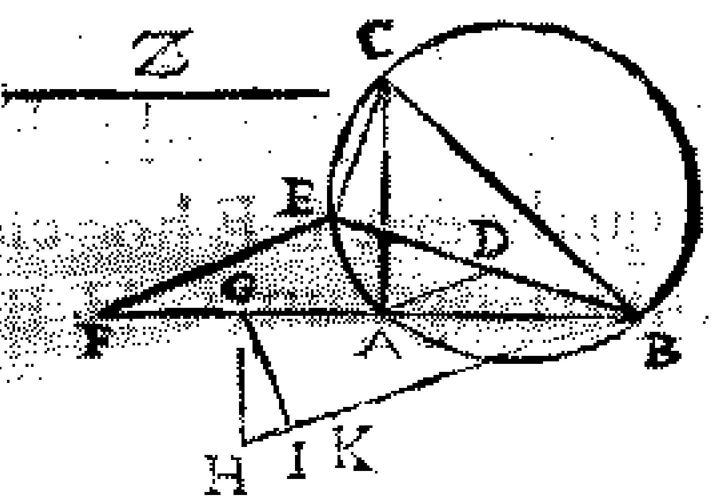
Hoc igitur demonstrato, Problema ita determinandum erit.

Determinatio.

OPortebit differentiam segmentorum basis subtendentis angulum rectũ trianguli, minorem esse recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum, maiorem vero differentia crurum.

Compositio Problematis.

SIt data differentia segmẽtorum basis angulum rectum subtendentis Z. differentia crurum A B.



B Oportet inuenire triangulum. Ponatur ipsi A B æqualis, & ad angulos rectos A C, & cõnectatur C B. quadratum igitur C B æquale erit quadratis C A, A B, & ideo duplum erit quadrati A B. Itaque a quadrato C B debet auferri quadratum Z, sic Porisma iubet; est autem Z minor, quàm C B ex prima determinationis parte; ergo in circulo circa diametrum C B descripto aptetur B E æqualis Z; ea maior erit, quã A B, ex secunda parte determinationis,& iuncta E C quadrata C E, E B æqualia erũt quadrato C B; rectus est enim angulus C E B in semicirculo, quare si à quadrato C B auferatur quadratum E B; hoc est Z remanebit quadratum C E, rectæ igitur C E quadratum æquale erit excessui, quo duplum quadrati A B superat quadratum Z, ergo ipsa C E ponenda est pro prima quatuor proportionalium, quarum secunda erit B E, tertia B A, & quærenda est quarta. sic habetur ex Porismate. Itaque à recta E B abscindatur B D æqualis E C, & connectatur D A, cui parallela agatur E F occurrens B A continuatæ in F. erit igitur vt B D ad B E, ita B A ad B F. inuenta est igitur quarta proportionalis B F, ea debet æquari compositæ ex cruribus trianguli construendi, vt in Porismate, sed eorundem crurum datur differentia A B, ergo secetur F A bifariam in G à perpendiculari G H æquali ipsi G A, vel G F, & connectatur H B. composita igitur ex cruribus H G, G B trianguli H G B, (manente tamen eorundem differentia A B) æqualis erit ipsi B F. Itaque constitutum est triangulum H G B, quemadmodum Porisma docet, est enim vt B D, hoc est E C ad B E, seu Z, ita B A ad B F, hoc est vt recta cuius quadratum æquale est ei, quo differt duplum quadrati differentiæ crurum, à quadrato differentiæ segmentorum basis ad differentiam segmentorum, ita differentia crurum ad aggregatum eorundem. Nunc autem ostendendum est triangulum G H B esse quale Problema requirit.

C

D

Primum igitur triangulum G H B rectangulũ est, quoniã angulus H G B rectus est, ex constructione. deinde crura eius H G, G B differunt per A B datam; sunt enim æquales H G, G A, ex constructione; itaque superest, vt differentia segmentorum basis æquetur Z datæ, id autem ita fit manifestum.

Ducatur enim G I basi H B perpendicularis,& centro G interuallo G H, descri-

scribatur circulus secans basim H B in K, erunt æquales H I, I K, vnde differentia segmentorum H I, I B erit K B. Quoniam igitur ob parallelas D A, E F est, vt D B, hoc est E C ad B E, ita A B ad B F; erit & quadratum E C ad quadratum B E, vt quadratum A B ad quadratum B F, & componendo (nã in resolutione per diuisionem rationis argumentatus sum) erit vt quadrata
47 Primi E C, B E, hoc est * vt quadratum C B, seu quod idem est, vt duplum quadrati
Theor. 4 primi A B ad quadratum B E, ita quadrata A B, B F hoc est ita * duplum quadratorum F G, G B, seu G H, G B ad quadratum B F, & subduplatis antecedẽtibus, (in resolutione enim duplata sunt antecedentia) erit vt quadratum A B ad quadratum E B, ita quadrata G H, G B, hoc est, ita quadratum B H ad quadratum B F, & consequenter, vt A B ad B E, ita B H ad B F, sed vt B H ad B F, ita est B A ad B k; ergo vt A B ad B E, ita erit A B ad B K; quare B k æqualis erit B E hoc est Z datæ, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum G H B & Problemati. satisfit quod faciendum erat.

Scholium.

Aduersus constructionem huius Problematis duæ feruntur instantiæ quorum altera per primam Determinationis partem dissoluitur; altera per secundam. Et prima quidem Determinationis pars in Porismate conspicitur; scilicet differentiam segmentorum basis minorem esse debere recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum, eò quod quadratum differentiæ segmentorum minus est duplo quadrato differentiæ crurum, vt Porisma indicat.

Secunda verò pars Determinationis, nempe differentiam segmentorum basis maiorem esse debere, differentia crurum, neque in propositione Problematis, neque in Porismate cernitur; sed per instantiam quæ aduersus constructionem fertur manifesta fit. Nam cum in circulo C A B aptari debeat recta B E æqualis Z, differentiæ segmentorum basis, vt Porisma iubet; ea, nisi esset maior quam A B differentia crurũ recta E C, non esset minor, quàm E B, nec ideo ab ipsa E B, posset abscindi recta æqualis E C; itaque Problema construi non posset. Sed cum istantia hæc constructioni aduersans procedat ab eo; quod differentia segmentorum basis posset exponi, non maior, quàm differentia crurum, adiecta Determinatione Problemati, vt ipsa differentia segmentorum maior sit, quàm differentia crurum, ea instantia dissoluitur. differentiam autem segmentorum maiorem esse, differentia crurum, demonstrauimus Lemmate primo Problemate tertij huius libri. Atque hæc quidem de inuentione Determinationis in hoc, atque in scholio Problematis tertij huius libri dicta sufficiant.

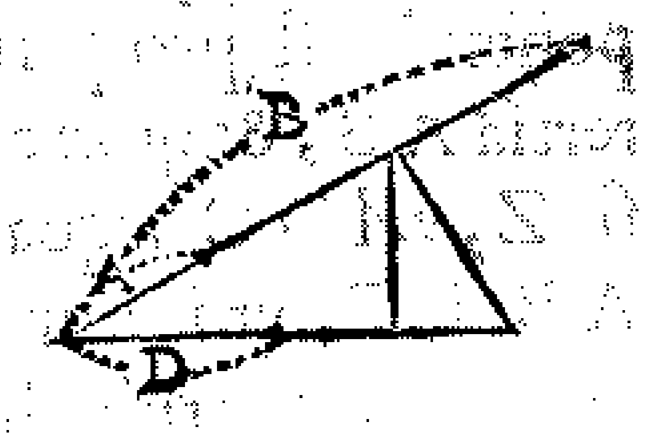
Problema VI.

Data differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, & aggregato crurum, inuenire triangulum.

Reso-

A Resolutio.

Sit data differentia segmentorum basis D; aggregatum crurum B; & oporteat inuenire triangulum.



Sit iam factum, & differentia crurum trianguli esto A, ergo B + A erit duplum cruris maioris, & B − A duplum cruris minoris, vnde simplum crus maius erit $B\frac{1}{2} + A\frac{1}{2}$, simplum crus minus $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$. At quadrata crurum* æqualia sunt quadrato basis subtendentis angulum rectum trianguli, ergo 47 primi

Quad. cruris maioris $BQ\frac{1}{4} + AQ\frac{1}{4} + B \text{ in } A\frac{1}{2}$
Quad. cruris minoris $BQ\frac{1}{4} + AQ\frac{1}{4} - B \text{ in } A\frac{1}{2}$) æquabuntur quadrato basis

B Hoc est $BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ æquabitur quadrato basis

Et consequenter $L.V.BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ æquabitur ipsi basi.

Et quoniam est* vt aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad differentiam crurum; proportionales erunt. Theor. 7 huius

$B, \quad D, \quad L.V.BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}, \quad A$

Atque eorum quadrata proportionalia erunt.

$BQ \quad DQ \quad BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2} \quad AQ$

Et duplatis antecedentibus, vt potestas integra fiat, erunt proportionalia

$BQ\,2 \quad DQ \quad BQ + AQ \quad AQ$

Et diuidendo proportionalia erunt.

C $BQ\,2 - DQ \quad DQ \quad BQ \quad AQ$

Et consequenter eorum latera proportionalia erunt.

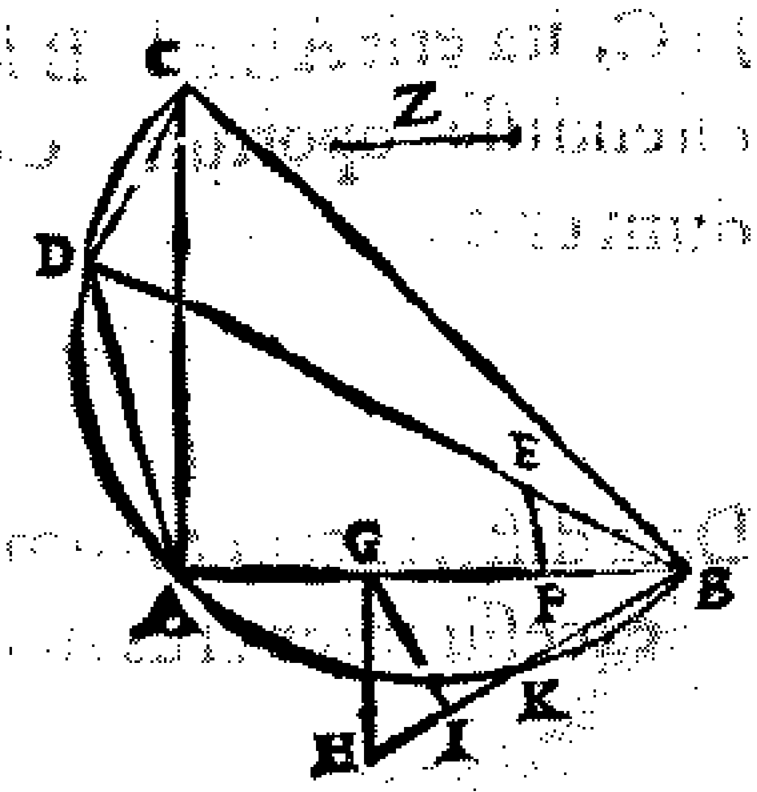
$L.V.BQ\,2 - DQ \quad D \quad B \quad A$

Porisma.

Vt recta cuius quadratũ æquale est ei, quo differt duplum quadratũ aggregati crurum, à quadrato differentiæ segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, ad differentiam segmentorum basis; ita est aggregatum crurum ad differentiam eorundem.

Datur ergo differentia crurum, de qua quærebatur.

D Compositio Problematis.



Sit data differentia segmentorum basis angulum rectum subtendentis Z, aggregatum crurum A B. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi A B perpendicularis, & æqualis A C, & iungatur C B; eius igitur quadratum æquale erit quadratis C A, A B, & ideo quadrati A B duplũ, itaq; à quadato C B auferendũ est quadratũ Z. sic Porisma fieri iubet. ergo describatur circulus circa diametrũ C B, in eoq. aptetur C D æqualis Z, & iungatur D B.

Quadrata igitur C D, D B æqualia erunt quadrato C B, quoniam rectus est A
in semicirculo angulus C D B, quare si à quadrato C B auferatur quadratum C D, hoc est Z, remanebit quadratum D B. Itaque rectæ D B quadratum æquale erit ei, quo differt duplum quadrati A B à quadrato Z. Igitur ipsa D B ponenda est pro prima quatuor proportionalium, quarum secunda erit Z, tertia A B, & quærenda est quarta. id Porisma præcipit. Sumatur ergo ipsi Z, vel D C æqualis B E, & iungatur D A, cui parallela agatur E F secans A B in F, vt igitur B D ad B E, ita erit B A ad B F; inuenta est igitur quarta proportionalis B F. ea debet fieri differentia crurum trianguli quæsiti, sic Porisma docet; sed eorumdem crurum aggregatum datur A B, ergo secetur F A bifariam in G à perpendiculari G H, æquali ipsi G A, vel G F, & connectatur H B. Differentia igitur crurum H G, G B trianguli H G B, manente quidem eorumdem aggregato A B, erit B F. Itaque constitutum est triangulum H G B, vt Porisma docet. est enim vt B D ad B E, hoc est ad Z, ita B A ad B F, idest, vt recta cuius quadratum æquale est ei, quo differt duplum quadratum aggregati crurum, à quadrato differentiæ segmentorum basis ad differentiam segmentorum, ita aggregatum crurum ad differentiam eorumdem. Nunc ostendendum est in triangulo G H B, esse ea, quæ requiruntur. B

In triangulo igitur G H B angulus H G B rectus est, ex constructione, composita verò ex cruribus H G, G B æqualis est A B datæ; reliquum autẽ, nempe vt differentia segmentorum basis æquetur datæ Z, id autem, repetendo resolutionis vestigia, ita fit manifestum.

Ducatur G I perpendicularis ad basim H B, & centro G interuallo G H, vel C
3 tertij D F, seu G A describatur circulus secans basim H B in K. erunt igitur* æquales H I, I K, & ob id differentia segmentorum H I, I B, erit K B. Et quoniam ob parallelas D A, E F, est, vt B D ad B E, hoc est D C, ita B A ad B F; erit quoque & quadratum B D ad quadratum D C, sicut quadratum B A ad quadratum B F; & componendo erit, vt quadrata B D, D C, hoc est, vt quadratum C B, seu quod idem valet, vt duplum quadrati A B ad
Thor. 4 primi. quadratum D C, ita quadrata B A, B F, hoc est, ita* duplum quadratorum A G, G B, vel G H, G B ad quadratum B F, & subduplatis antecedentibus erit, vt quadratum A B ad quadratum D C, ita quadrata G H, G B, hoc est, ita quadratum B H ad quadratum B F, & consequenter vt A B ad D C, ita erit B H ad B F; sed B H ad B F est, vt B A ad B k, ergo vt A B ad D C, ita erit A B ad B k, quare B k æqualis erit D C, hoc est Z datæ, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum G H B, vt faciendum erat. D

Problema VII.

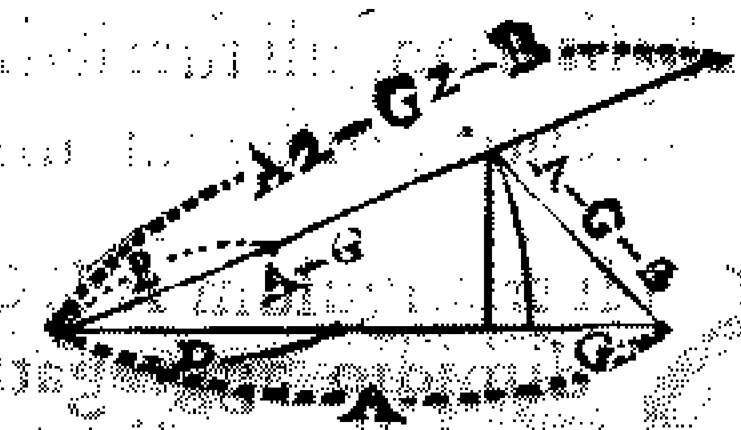
Data differentia crurum trianguli, & differentia segmentorum basis, datoque excessu inter crus maius & basim, inuenire triangulum.

A HOc Problema quatuor casus habet: aut enim excessus est penes basim, aut penes crus maius; & si penes crus, aut differentia segmentorum basis maior est, quàm dupla differentia crurum, aut minor, aut æqualis; quartus hic casus vix inter Problemata annumerari potest, cùm in eo innumera triangula Problemati satisfaciant, vt ex eius resolutione & compositione patebit. Primum igitur sit excessus ille penes basim.

Resolutio Primi Casus.

SIt data differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis D, & excessus, quo basis superat crus maius G. Oportet inuenire

B triangulum.



Sit iam factum, eiusque basis esto A, ergo crus maius erit A — G, crus minus A — G — B; differunt enim crura per B, atque aggregatum crurum erit A 2 — G 2 — B. At rectangulum sub differentia crurum & aggregato eorumdem* æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis & ipsa base. itaque Theor. 6 huius

B in (A 2 — G 2 — B æquabitur D in A

Seu quod idem est B in A 2 — B in G 2 — B Q æquabitur D in A

Additis vtrobiq; B in G 2, & B Q, ergo

B in A 2 æquabitur D in A ✢ B in G 2 ✢ B Q.

Et ablato vtrinque D in A, vt cognita ab incognitis separentur,

C B in A 2 — D in A æquabitur B in G 2 ✢ B Q

Seu quod idem est B 2 — D) in A æquabitur G 2 ✢ B) in B.

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

B 2 — D G 2 ✢ B B A

Porisma.

Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli præstat differentiæ segmentorum basis, ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius, ita est differentia crurum ad basim.

Datur ergo basis trianguli, de qua quærebatur.

D Ex Porismate apparet in huiusmodi triangulo duplam crurum differentiam maiorem esse differentia segmentorum basis. quod quidem, antequam Problema componam, demonstrandum est, atque Problemati præfigenda determinatio, ne crurum differentia dupla detur, non maior quàm differentia segmentorum basis. Itaq; ad id ostendendum Lemma huiusmodi propono.

Lemma.

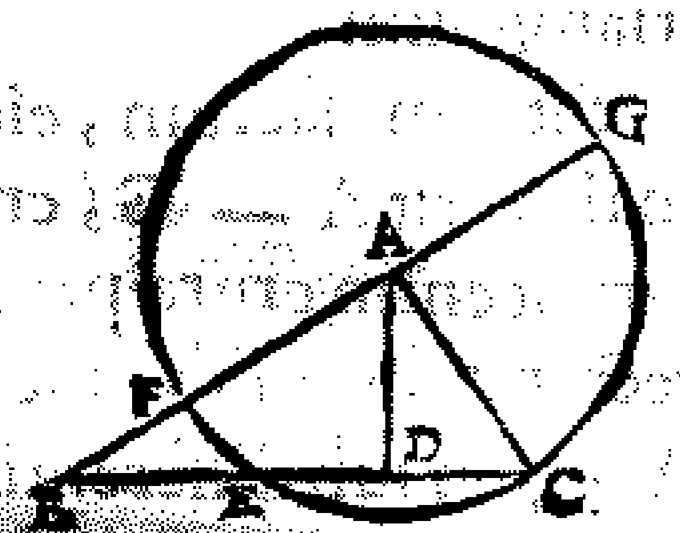
Si basis trianguli fuerit crure maiore maior, dupla crurum differentia differentiam segmentorum basis excedet.

Hoc

HOc Lemma quod ad determinationem Problematis attinet sic propositum & demonstratum determinationi satisfacit, vt in libro variorum Lem. 2 ante Problema quintum factum est. Verùm quoniam dupla differentia crurum trianguli, etiam si basis fuerit minor crure maiore, potest esse maior quàm differentia segmentorum basis, ideo Lemma illud in meliorem formam sic propono,

Lemma.

Si basis trianguli fuerit dimidio aggregati crurum maior, dupla crurum differentia, differentiam segmentorum basis excedet.



SIt triangulum A B C, cuius basis B C, sit maior dimidio aggregati crurum B A, A C, & centro A interuallo A C cruris minoris describatur circulus secans crus A B productum in punctis F G, basim vero B C in E, & cadat in B C, perpendicularis A D. erit igitur B F differentia crurum A B, A C, differentia vero segmentorum B D, D C erit B E; sunt enim* æquales E D, D C. Dico duplam B F maiorem esse quam B E. Quoniam enim B C ponitur maior dimidia B G, dupla B C maior erit, quàm tota B G, sed vt B C ad B G, ita* est B F ad B E, ergo duplatis antecedentibus erit, vt B C dupla ad B G, ita dupla B F ad B E, sed B C dupla ostensa est maior, quàm B G, ergo & B F dupla, maior erit quàm B E, quod erat ostendendũ. Hoc igitur demonstrato præfigenda est huic casui hæc determinatio.

3 tertij

Theor. 7 huius

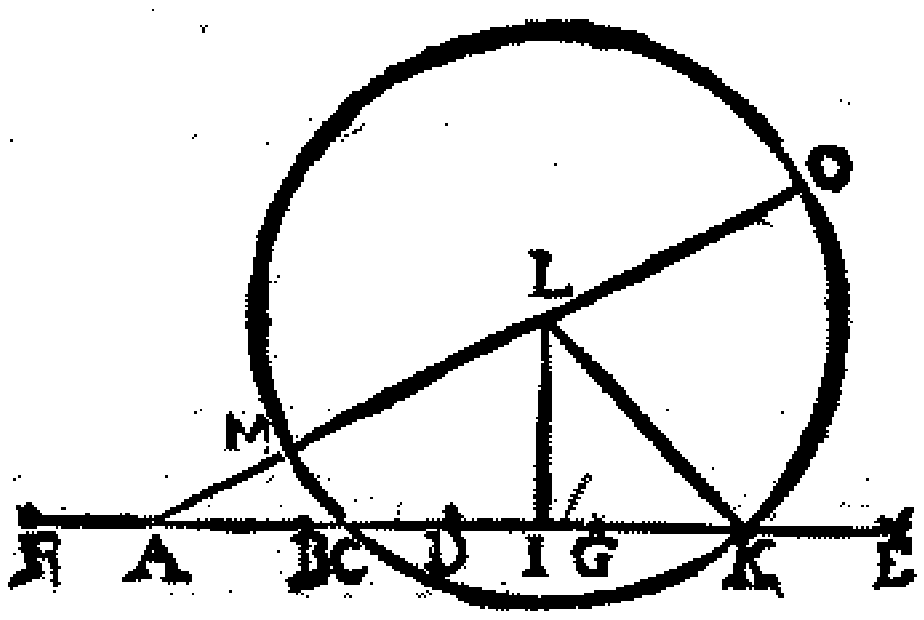
Determinatio.

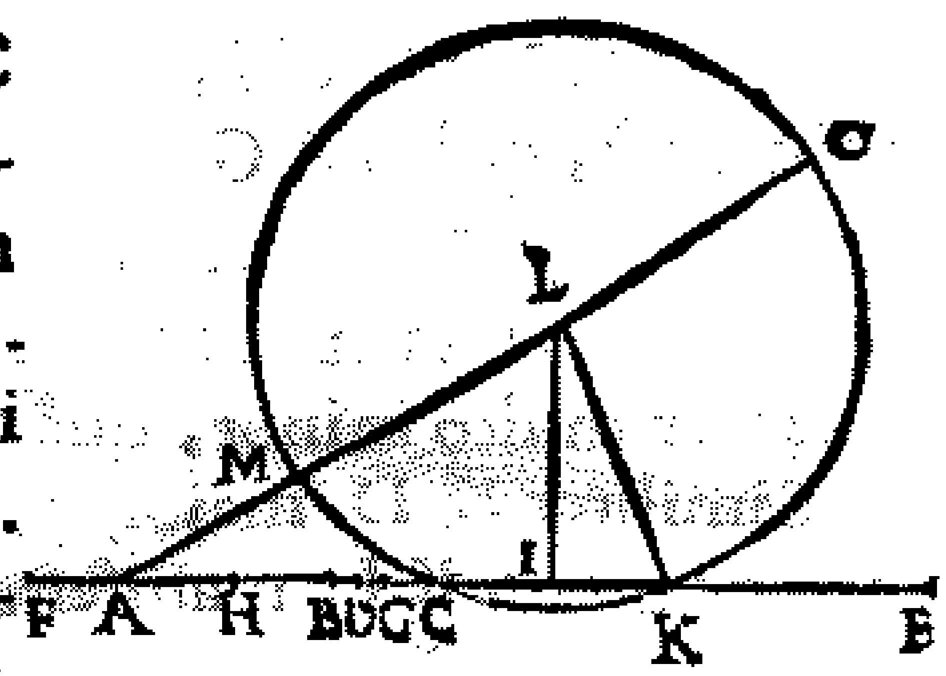
OPortebit duplam differentiam crurum maiorem esse differentia segmentorum basis, simplam vero minorem.

Compositio Primi Casus.

SIt data differentia crurum trianguli A B, differentia segmentorum basis A C, quæ sit maior, quàm A B, minor autem, quàm dupla A B & excessus, quo basis superat crus maius B D. Oportet inuenire triangulum. Fiat C F dupla ipsis A B, ea, ex determinatione, maior erit, quàm A C. similiter & B G fiat dupla ipsius B D, & fiat vt A F ad A G, ita A B ad aliam, quæ sit A k; ea ex præcepto Porismatis debet fieri basis trianguli construendi, eamq; maiorem esse, quam A C ostendetur infra, ergo secetur C k bifariam in I à perpendiculari I L, in qua ponatur k L æqualis K D; ipsa autem K D maior est quam K I, vt demonstrabimus infra & iungatur A L. posuimus k L æqualem k D pro crure minore trianguli construendi, quoniam ipsum crus debet superari à base A K, excessu A D; nam cum basis A k debeat superare crus maius, excessu B D, crus autem maius superare debeat crus minus excessu

A su A B; basis A k debebit superare crus minus vtroq; excessu A B, B D. Constructum est igitur triangulum L A K, quemadmodum Porisma construere docet, factum est enim vt A F excessus, quo A B. dupla superat A C, ad compositam ex A B, & dupla B D, ita A B ad A K basim trianguli L A k. Nunc demonstrandum est in eo triangulo esse ea quæ requiruntur. Differentia segmentorum basis A I, I K est ipsa A C data, cum sint æquales C I, I k, ex constructione; differentia vero crurum A L, L k æqualem





B esse A B datæ, per resolutionis regressum ostendetur; reliquum autem, idest latus A L superari à base A K excessu B D ex demonstratis patebit. Centro igitur L interuallo L k describatur circulus secans A L in M, productam verò in O, is circulus transibit per C cum sint * æquales C I, I k. deinde producatur A k in E, vt sit k E æqualis k G. Quoniam igitur E G dupla est ipsius K G, & G B dupla ipsius G D tota E B erit dupla totius k D, hoc est ipsius k L, atque adeo B E, M O æquales erunt. 3 tertij

Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum F A K sub extremis æquale erit rectangulo B A G sub medijs, sed rectangulum F A K æquatur rectangulo C F, A K, minus rectangulo C A K, hoc est æquatur duplo rectanguli B A K, minus rectangulo C A k recta enim C F dupla est ipsius A B) ergo duplum rectanguli B A K, minus rectangulo C A K, æquale erit rectangulo B A G. addatur vtrobique rectangulum C A K; detractum enim fuit in resolutione, ergo duplum rectanguli B A K; hoc est rectangulum sub B A, & dupla A K, æquabitur rectangulis B A G, C A K. auferatur vtrinque rectangulum B A G, additum fuit in resolutione, ergo rectangulum sub A B, & dupla A k, minus rectangulo B A G, seu quod idem valet, rectangulum sub B A, & composita ex A K, k G, quod est rectangulum B A E (sunt enim æquales k G, k E, ex constructione) æquale erit rectangulo C A K, * hoc est 36 tertij
M A O, atque sunt æquales M O, B E, vt est demonstratum, ergo & A M * Theor. 5 huius
D æqualis erit A B. Reliquum est vt basis A k superet crus L A excessu B D; id autem ex demonstratis patet; nam cum L k superetur ab A k excessu A D, ex constructione, ab A L verò excessu A B, vt demonstrauimus, L A superabitur ab A k reliquo excessu B D. Constructum est igitur triangulum L A k, cuius crurum differentia A M, æqualis est datæ A B; differentia vero segmentorum basis est ipsa A C data, & basis A K superat crus maius L A dato excessu B D, quod erat faciendum.

At vero A K maiorem esse, quàm A C sic demonstrabitur. Quoniam enim A B minor est, quàm A C, ex determinatione, atque F C dupla est ipsius A B, ex constructione, erit A F minor, quàm A B sed A F est prima quatuor

14 quinti tuor proportionalium A F, A G, A B, A K; ipsa autem A B tertia, ergo &* secunda A G minor erit, quàm A K quarta; si igitur A G non est minor, quàm A C, vt in prima figura manifestum est A K maiorem esse, quàm A C. Si verò A G minor est, quàm A C, vt in secunda figura, secetur F C bifariam in H, erit A B æqualis C H, recta enim F C dupla est ipsius A B ex constructione; dempta igitur communi H B, reliqua A H reliquæ B C æqualis erit. Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, ex constructione, erit permutando, vt A F ad A B, hoc est ad F H, ita A G ad A K, & per diuisionem rationis vt A F ad A H, hoc est ad B C, ita erit A G ad G K; sed A F prima minor est, quàm A G tertia, cum sit etiam minor quàm A B, vt demonstrauimus, ergo & secunda B C minor erit, quàm G H quarta, atque addita communi A B, tota A C minor erit, quàm composita ex A B, G K, & consequenter multo minor, quàm A K quod erat ostendendum.

Similiter K D maiorem esse, quàm K I sic ostendetur. Si K G non est minor quam K I, manifestum est K D compositam ex K G, G D maiorem esse, quàm K I.

Sed K G sit minor quam K I. Quoniã igitur A K ostensa est maior, quam A G, dempta communi A D, reliqua D K maior erit, quàm reliqua D G, hoc est quam D B, & ideo multo maior, quàm D C; ergo punctum D, erit

3 tertij inter puncta C I, cum sint * æquales K I, I C. quare K D maior est quàm K I. quod erat ostendendum.

CON-

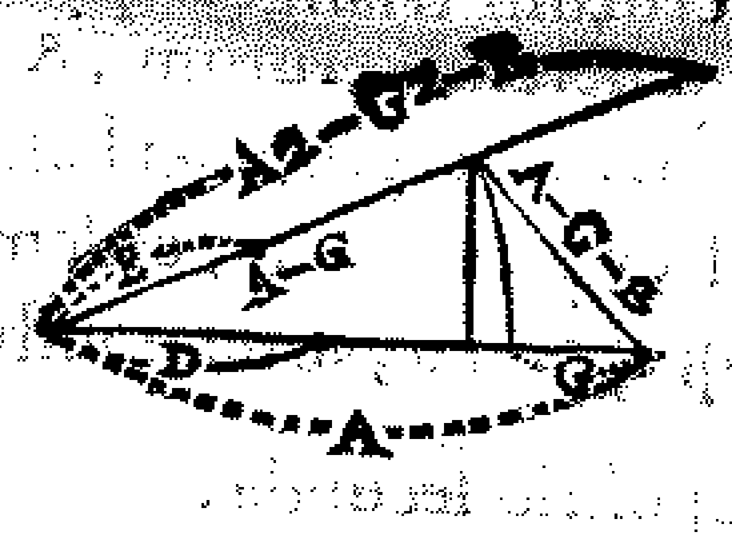
A

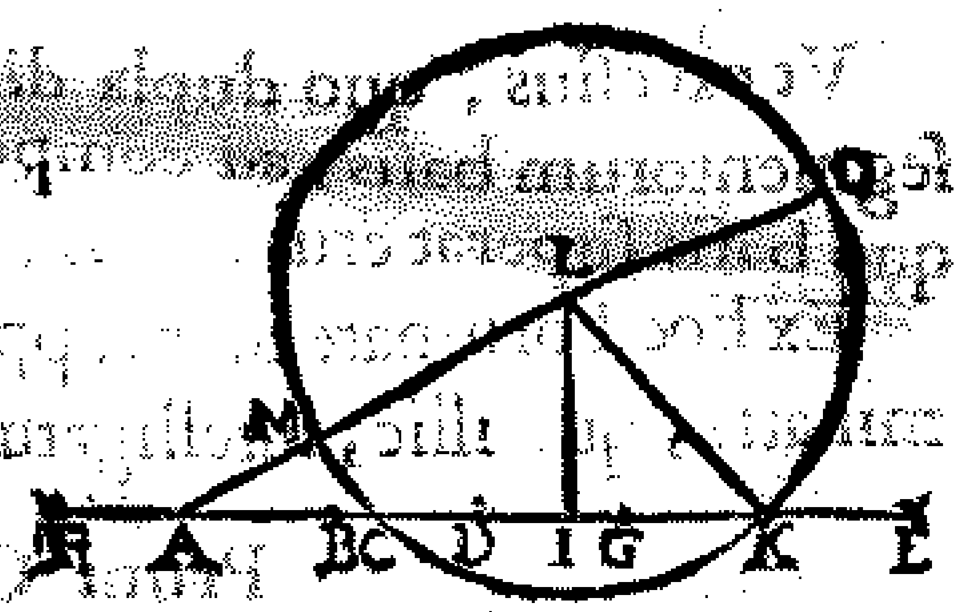
CONSPECTVS RESOLVTIONIS, ET COMPOSITIONIS.

Initium Resolutionis.		Finis Compositionis.	
seu quod B in(A 2 — G 2 — B idē est B in A 2 — B in G 2 — B Q	D in A D in A	V B A E * V B A G V B A K 2	hoc est V M A O V C A K
addatur B in G 2 & B Q		auferatur V B A G	
B B in A 2	D in A † B in G 2 † B Q	V B A K 2	V B A G † V C A K
auferatur D in A		addatur V C A K	
seu quod B in A 2 — D in A idē est B 2 — D) in A	B in G 2 † B Q G 2 † B) in B	— V C A K seu V B A K 2 — V C A K hoc est V C F A K V F A K	V B A G *
æqualitas ad proportionem		proportio ad æqualitate	
B 2 — D	G 2 † B B A	A F A G A B A K	

C

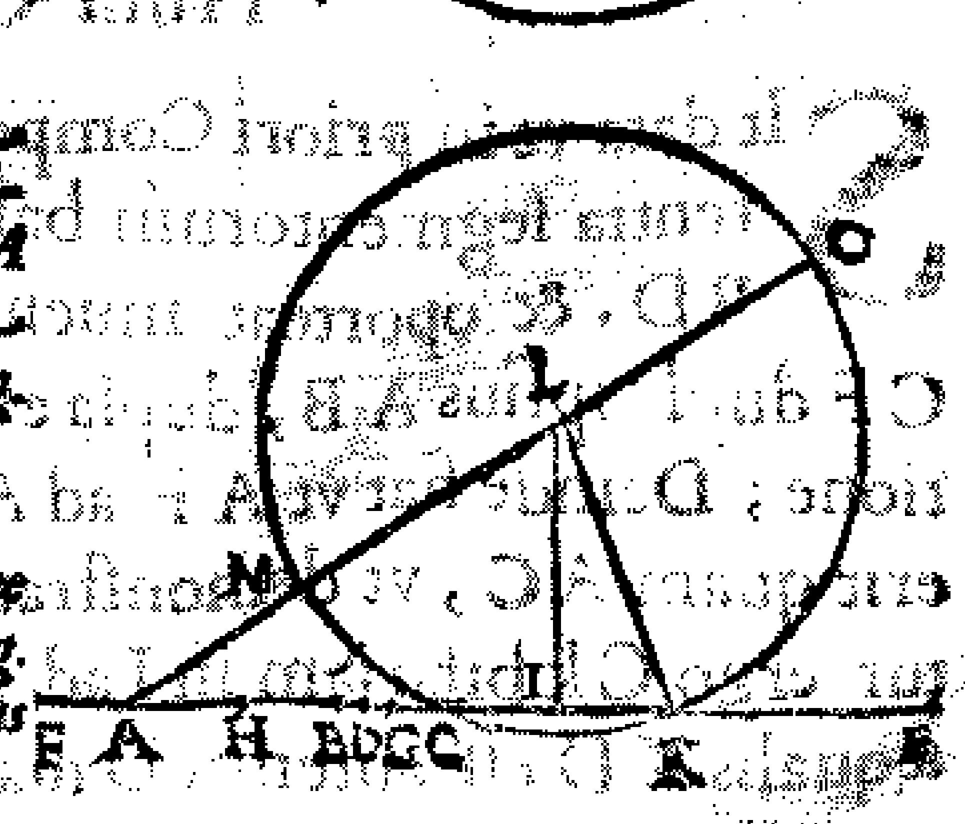
Finis Resolutionis. Initium Compositionis





D * *Similiter rectang. B A E idem est, quod in resolutione B in (A 2 — G 2 — B. nam ipsum rectang. B A E continetur sub B A, & excessu, quo A K dupla superat G A compositam ex G B, B A, hoc est ex G D dupla, & ipsa B A. cui quidem rectangulo respondet ex resolutione rectang. B, in (A 2 — G 2, — B.*

† *Nota quod rectang. B A G. idem est quod in resolutione B in G 2 † B Q. nam ipsum rectang. B. A G. æquale est rectang. A B. G. plus quadrato A B. hoc est rectangulo A B D. bis, plus quad. A B. quæ quidem in resolutione sunt B in G 2 † B Q.*



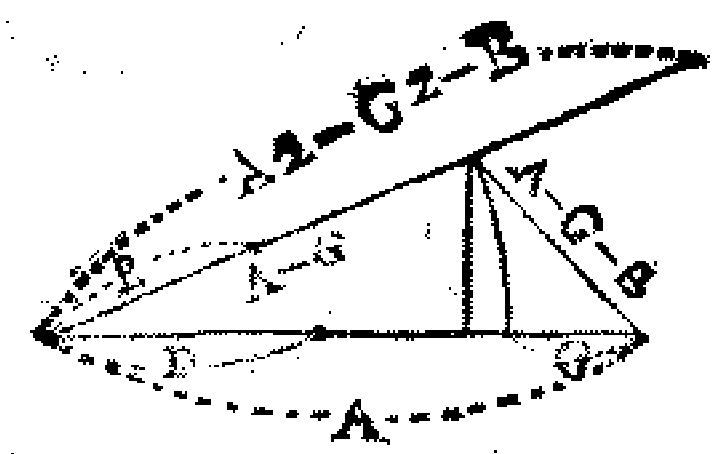
Eundem

Eundem casum alia breuiori via, & resoluam, & componam, in eoque resoluendo proportione vtar, non æqualitate. A

Eiusdem Casus secunda Resolutio.

Iisdem datis, positisque, vt in antecedente resolutione, & resumpta eiusdem resolutionis figura. Quoniam est * vt differentia crurum trianguli ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, erunt proportionales.

Theor. 7 huius



B D A A2—G2—B

Et duplatis antecedentibus, proportionales erunt

B2 D A2 A2—G2—B B

Et per conuersionem rationis proportionales erunt

B2 B2—D A2 G2 ✣ B.

Rursus subduplatis antecedentibus, erunt proportionales

B B2—D A G2 ✣ B

Et conuertendo erunt proportionales

B2—D B G2 ✣ B A

Denique permutando proportionales erunt

B2—D G2 ✣ B B A

Hæc autem permutatio non erat necessaria, cum etiam in penultima proportionalium serie, primi tres termini cogniti existant, sed quoniam in eandem proportionem recidit hæc resolutio quemadmodum & antecedens; volui vt etiam eorum Porismata eadem verborum textura exempli arcentur. C

Porisma.

Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli præstat differentiæ segmentorum basis, ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius, ita est differentia crurum ad basim.

Ex hoc Porismate idem apparet quod ex præcedenti, eadem ergo Determinatio, quæ illic, intelligatur hic quoq; apposita, ac demonstrata.

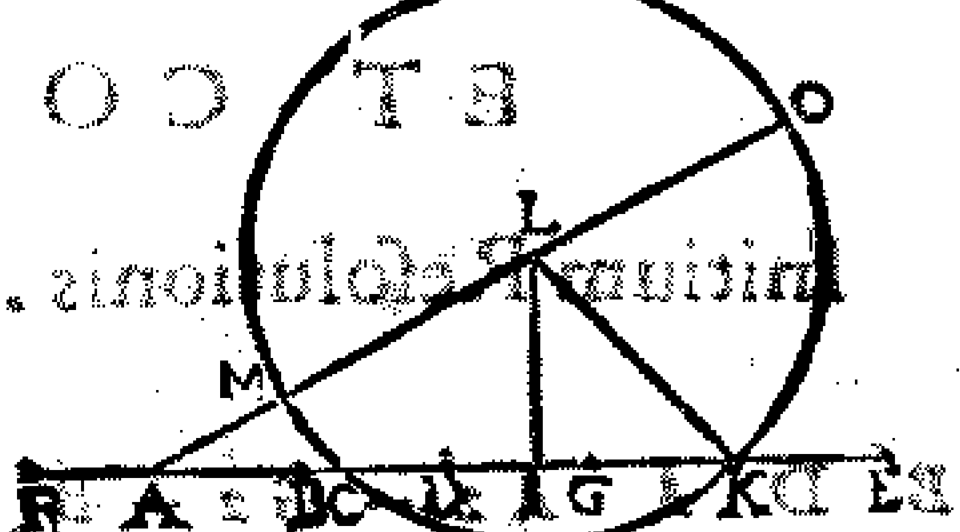
Primi Casus Compositio secunda.

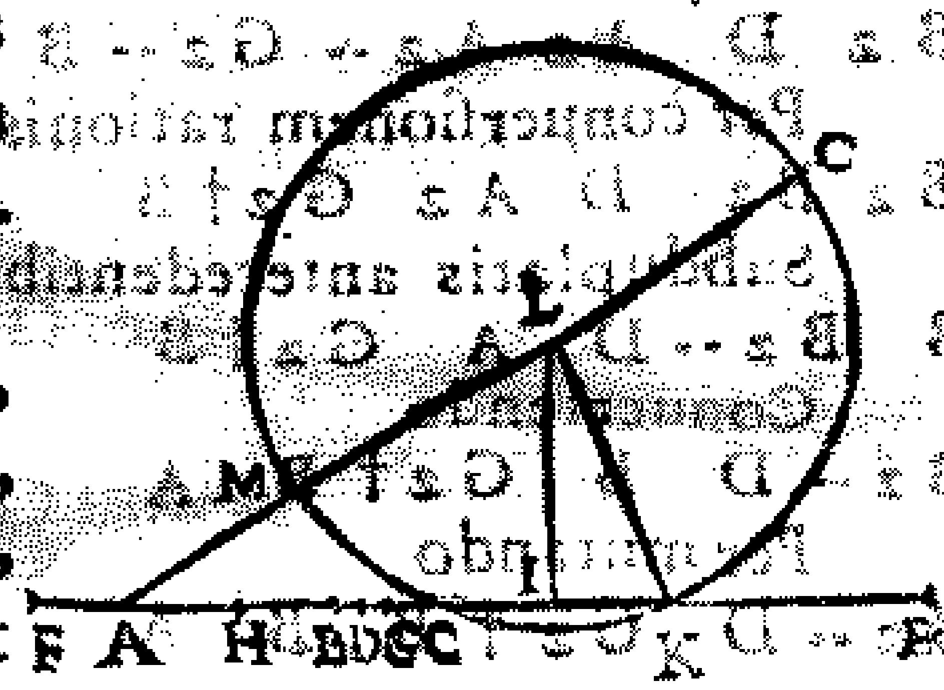
Sit data vt in priori Compositione differentia crurum trianguli AB, differentia segmentorum basis AC, & excessus, quo basis superat crus maius BD, & oporteat inuenire triangulum. Producatur CA in F, vt sit CF dupla ipsius AB, dupla enim AB maior est, quàm AC, ex determinatione; Deinde fiat vt AF ad AG, ita AB ad aliam, quæ sit AK, ea maior erit quam AC, vt demonstratum est sub antecedenti Compositione. Secetur ergo Ck bifariam in I ad rectos angulos à recta IL, in qua ponatur KL æqualis KD est autem kD maior, quàm kI, vt sub eadem Compositione demonstrauimus, & iungatur AL. Hæc constructio eadem est, quæ in præcedenti compositione; quoniam vtraque fit per rationem vnius, eiusdemque D

Po-

A Positis his. In triangulo igitur L A k differentia segmentorum basis A I, I K est ipsa A C data, cum sint æquales C I, I k, ex constructione. Vt autem ostendantur reliqua, centro L interuallo L k circulus describatur, secans A L in M, productum vero in O; is circulus transibit per C, cum sint æquales C I, I K. deinde producatur A K in E, vt sit k E æqualis k G. Quoniam igitur E G dupla est ipsius K G, & G B dupla ipsius G D, tota E B erit dupla totius k D, hoc est ipsius k L; sed & M O dupla est ipsius L k, ergo æqua-

B les erunt B E, M O.





Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, erit permutando vt A F ad A B, ita A G ad AK, & conuertendo vt A B ad A F, ita A K ad A G, & duplatis antecedentibus vt F C ad A F, ita erit A K bis ad A G, & per conuersionem rationis vt F C ad A C, ita A k bis ad A E, & rursus subduplatis antecedentibus, vt A B ad A C, ita erit A K ad A E, sed vt A C ad A M, ita est A O ad A K; ergo in perturbata proportione erit vt A B ad A M, ita A O ad A E; atque M O ostensa est æqualis B E, ergo & A M * æqualis erit A B. restat igitur vt basis A k superet crus maius L A, excessu B D; id autem ita fit manifestum: Theor. 4. huius

C Quoniam enim L k superatur ab A k, excessu A D, ex constructione, ab L A verò excessu A B, vt demonstrauimus, L A superabitur ab A k, reliquo excessu B D. Constructum est igitur triangulum E A K, &c. quod faciendum erat.

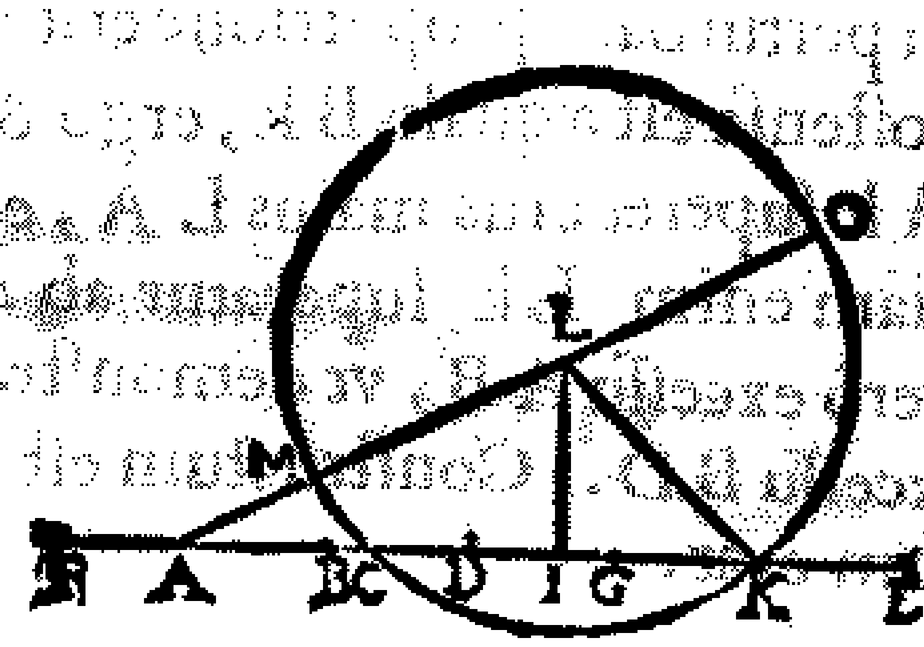
Scholium.

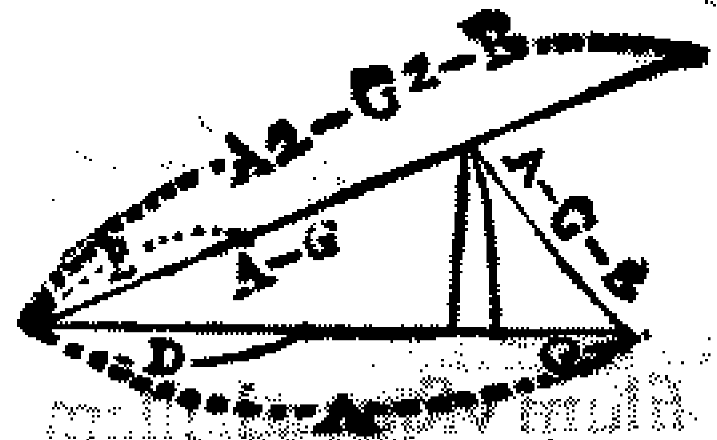
Hæc demonstratio procedit per resolutionis filum vsque ad illam seriem quatuor proportionalium A B, A C, A K, A E inclusiue, ordine vt hic iacent dispositarum, illinc enim Resolutio sumpsit initium. Sed quoniam A M conferenda est cum A B, ad quod omne consilium dirigi debet, opus

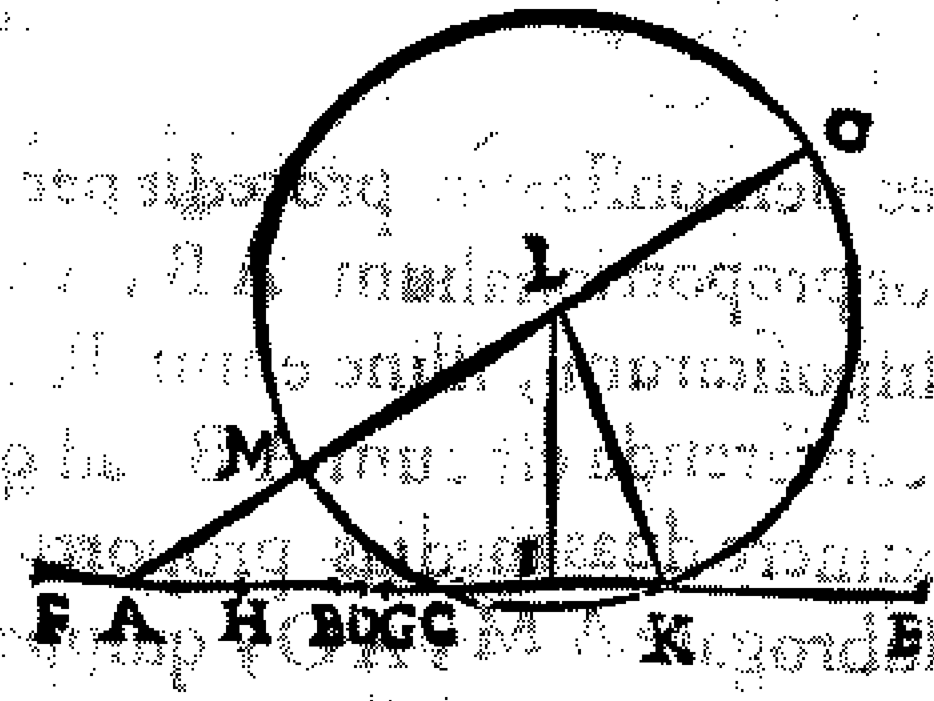
D fuit eximere duas medias proportionales A C, A k, & in earum locum alias duas subrogare A M, A O, quippe quæ prioribus ad constitutionem proportionalium manentibus extremis A B, A E sunt æquiualentes; cùm rectangulum C A K * æquale sit rectangulo M A O, quæ quidem subrogatio fit per argumentationem ex æquali in proportione perturbata, vt cernitur. 36 tertij

CONSPECTVS RESOLVTIONIS, ET COMPOSITIONIS.

Initium Resolutionis.	Finis Compositionis.
	AM AO
B D A A2--G2--B	AB AC AK AE
Duplatis antecedentibus	Subduplatis antecedentibus
B2 D A2 A2--G2--B	FC AC AK2 AE
Per conuersionem rationis	Per conuersionem rationis
B2 B2--D A2 G2†B	FC AF AK2 AG
Subduplatis antecedentibus	Duplatis antecedentibus
B B2--D A G2†B	AB AF AK AG
Conuertendo	Conuertendo
B2--D B G2†B A	AF AB AG AK
Permutando	Permutando
B2--D G2†B B A	AF AG AB AK
Finis Resolutionis.	Initium Compositionis.







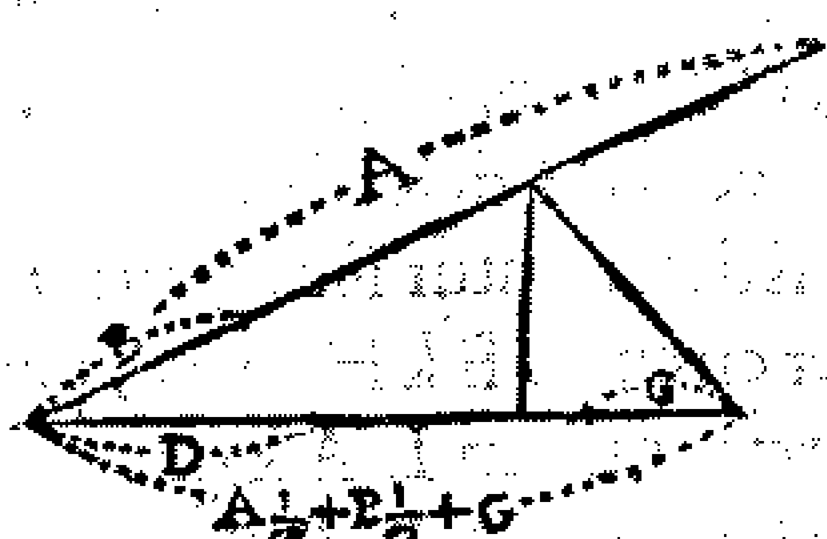
Alias duas Resolutiones, & Compositiones eiusdem Casus proferam, quarum altera per æqualitatem, altera per proportionem procedet; sed aliter atque in præcedentibus, in ijs enim quæsita est basis trianguli; in his de aggregato crurum quæram.

Pri-

A

Primi Casus Resolutio tertia.

Iisdem datis, nempe differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis D, & excessus quo basis superat crus maius G. Oportet inuenire triangulum.



Coroll. 1 Probl. 2 primi.

Aggregatum crurũ de quo quæratur estò A, ergo duplum cruris maioris erit $A + B$; quare simplum $A\frac{1}{2} + B\frac{1}{2}$ & cum basis superet crus maius excessu G, erit basis $A\frac{1}{2} + B\frac{1}{2} + G$. & quoniam rectangulum sub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem æquale est rectangu-

B lo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base; ideo

B in A æquabitur D in $A\frac{1}{2}$ + D in $B\frac{1}{2}$ + D in G.

Et duplicatis omnibus vt fractiones vitentur

B in A 2 æquabitur D in A + D in B + D in G 2

Auferatur vtrinque D in A, vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

B in A 2 − D in A æquabitur D in B + D in G 2

Seu quod idem est B 2 − D) in A æquabitur B + G 2) in D

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

B 2 − D B + G 2 D A

Porisma.

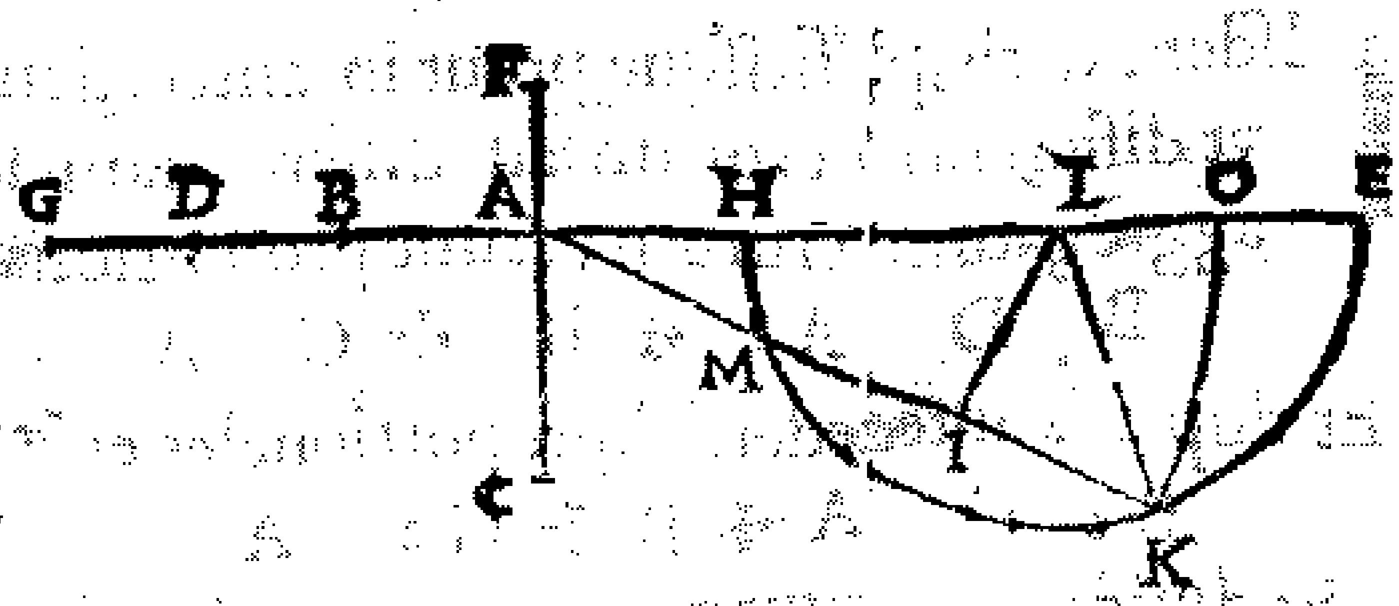
C Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli superat differẽtiam segmentorum basis ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius, ita est differentia segmentorum basis ad aggregatum crurum.

Datur ergo aggregatum crurum.

Idem apparet ex hoc Porismate, quod ex præcedẽtibus, nempè duplam differentiam crurum, maiorem esse differentia segmentorum basis; quare intelligatur hic quoque eadem determinatio, quæ supra.

Primi Casus Compositio tertia.

D Sit data differentia crurum trianguli, A B, differentia segmentorum basis A C, & excessus quo basis superat crus maius B D. Oportet inuenire triangulum. Positis in directũ A B, B D, duplicetur B D in G, & C A producatur in F, vt sit C F dupla ipsius A B, est autẽ A B dupla maior, quàm A C, ex Determinatione. Deinde fiat vt A F ad A G, ita A C ad aliam, quæ sit A E, ea maior erit, quàm A G,



quia & A C maior est, quàm A F, atque ablatis A B ab A G, & A H, æquali ipsi A B ab A E, reliqua H E maior erit, quàm reliqua B G, & cum secetur H E bifariam in L, erit quoque L E maior, quàm B D, quæ dimidia est ipsius G B. in ipsa igitur L E sumatur L O æqualis B D, & centro L interuallo L E, vel L H describatur circulus: similiter centro A interuallo A O alius circulus describatur secans priorem in K, & iungantur A K, L K; ipsam autẽ A k secet circulus E k H in M, perpendicularis vero L I in I. Itaque constructũ est triangulum L A k quemadmodum Porisma docet; factum est enim vt A F excessus, quo A B dupla superat A C ad A C compositam, ex A B, & B D dupla; ita A C ad A E aggregatum crurũ trianguli A L K. Huius igitur trianguli crura L A, L K differunt per A k æqualem datæ A B, ex constructione; basis verò A k superat crus maius A L excessu L O æquali ipsi B D, pariter ex constructione. Superest igitur vt differentia segmentorum basis ostendatur æqualis datæ A C, id autem repetendo resolutionis vestigia, ita perspicuũ fiet. A B

3 Tertij Quoniam enim L I perpendicularis est ad A k* erunt æquales M I, I K; quare differentia segmentorum A I, I K, erit A M; Et quoniam est vt A F ad A G, ita A C ad A E, rectangulum F A E sub extremis, æquale est rectangulo C A G sub medijs, sed rectangulum F A E, idem valet, quod rectangulum F C A E minus rectangulo C A E, hoc est idem valet, quod rectangulum H A E bis, minus rectangulo C A E; ergo rectangulum H A E bis, minus rectangulo C A E, æquale erit rectangulo C A G, addito vtrique parti rectangulo C A E, rectangulũ H A E bis, æquale erit rectangulo C A G, plus rectangulo C A E, hoc est æquale erit rectangulo C A, G E; sed rectangulum C A, G E duplum est rectanguli C A O; nam cum sint æquales A B, A H; & æquales quoque L E, L H, erit E B dupla ipsius A L, sed & B G dupla est ipsius L O, ergo tota E G dupla erit totius A O, & consequenter rectangulum C A, G E duplum rectanguli C A O. rectangulum igitur H A E bis, hoc est M A K, *bis*, æquale erit rectangulo C A O bis, vel C A *k* bis, vnde & rectangulum M A K semel, æquale rectangulo C A K semel, quare & recta M A æqualis rectæ A C, quod erat ostendendum. Constructum est igitur L A K, &c. quod faciendum erat. C

Primi Casus Resolutio quarta.

Theor. 7 huius Isdem datis, positisque prout in antecedenti Resolutione. Quoniam* est vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, erunt proportionales. D

B D   A ½ + B ½ + G   A

Et duplatis antecedẽtibꝰ, proportionales erũt

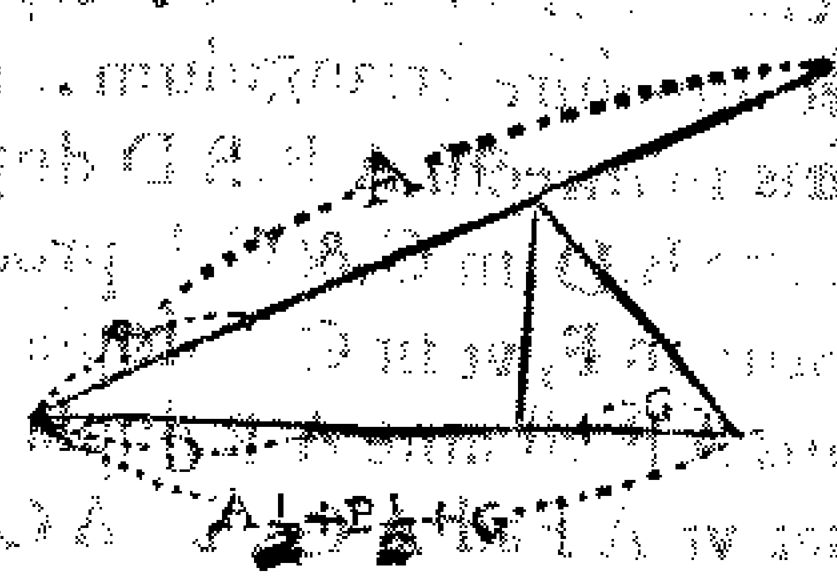
B 2 D   A + B + G 2   A

Et diuidendo erunt quoque proportionales

B 2 — D   D   B + G 2   A

Et permutando erunt proportionales

B 2 — D   B + G 2 D   A.



Hæc

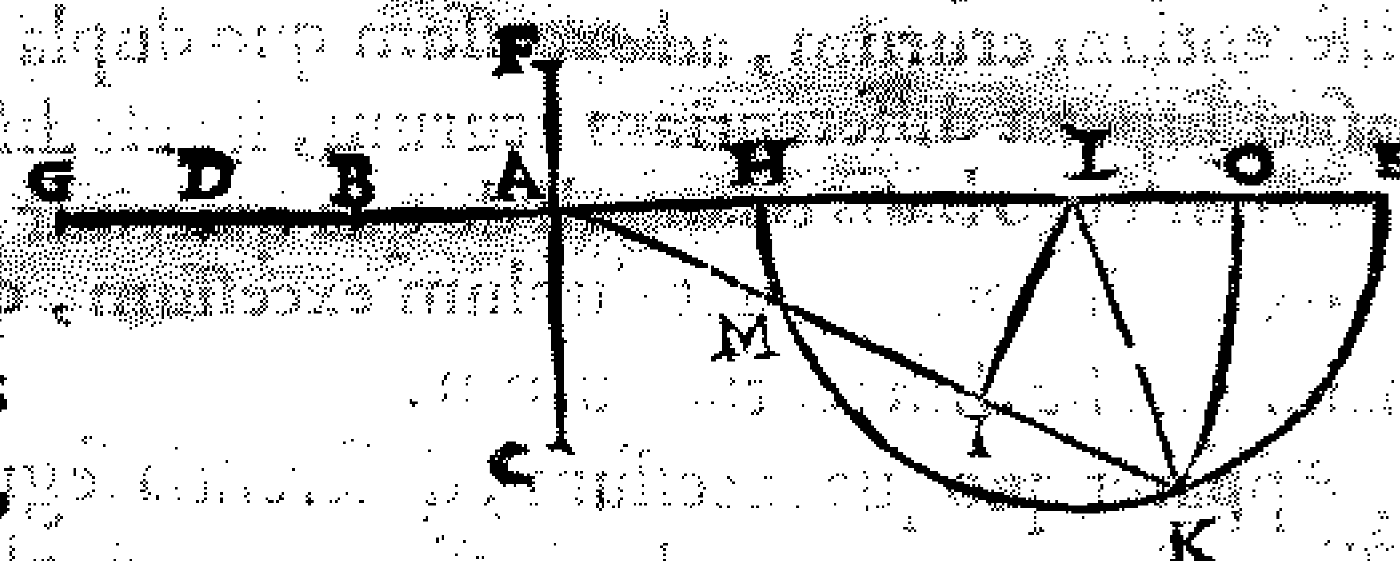
A Hæc permutatio quamuis non sit necessaria, cum & in penultima proportionalium serie primi tres termini cogniti existant; tamen facta est, vt cum sit eadem proportio, quæ in antecedenti Resolutione, sit quoque idem & Porisma.

Porisma.

Vt excessus quo dupla differentia crurum trianguli superat differentiam segmentorum basis, ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius; ita est differentia segmentorum basis ad aggregatum crurum.

Primi Casus Compositio quarta.

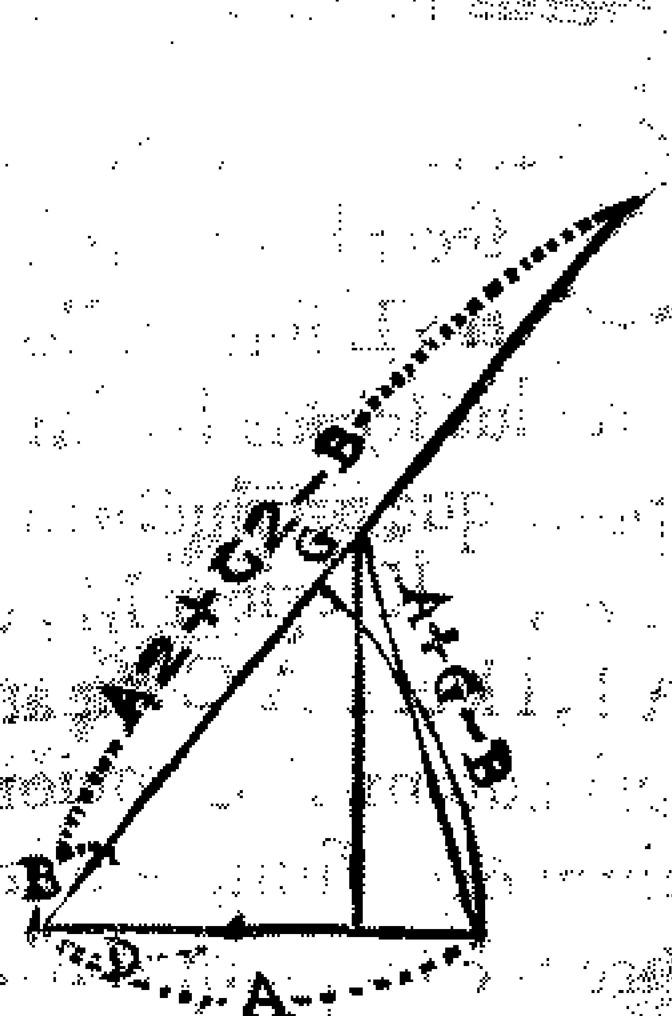
B Isdem datis quæ in antecedenti compositione, eademque constructione facta. ostendendum est A M differentiam segmentorum basis æquari A C datæ; cætera enim, vt illic, ex constructione patet.



Quoniam enim vt A F ad A G, ita est A C ad A E, ex constructione, erit permutando, vt A F ad A C, ita A G ad A E, & componendo vt F C ad A C, ita G E ad A E, sed F C dupla est ipsius A B, vel A H ex constructione, & G E
C dupla ipsius A O, vt ostensum est in præcedenti compositione, ergo subduplatis antecedentibus erit A H ad A C, vt A O, hoc est A k ad A E, sed & A H ad A M, est quoque vt A k ad A E, ergo vt A H ad A C ita erit eadem A H ad A M, quare A M æqualis erit A C, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L A k in quo A H differentia crurũ æqualis est datæ A B, & A M differentia segmentorum basis, æqualis A C, atque L O excessus, quo basis A k superat crus A L, æqualis B D. quod facere oportebat.

Resolutio Secundi Casus.

D Einde excessus, qui est inter crus maius, & basim sit penès ipsum crus, atq; differentia segmentorum basis sit maior, quàm dupla differentia crurum.



Sit igitur data differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis D, quæ sit maior; quàm dupla B, & excessus, quo crus maius superat basim sit G. oportet inuenire triangulum.

Basis trianguli esto A, ergo crus maius erit A + G, crus minus A + G — B, differunt enim crura per B, atque adeo aggregatum crurum erit A 2 + G 2 — B, & quoniam rectangulũ sub differentia crurum, & aggregato corundẽ* æquale Theor. 6 huius est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base, ideo A

B in A 2 + B in G 2 — B Q æquabitur D in A.

Quoniam autem ponitur D maior, quàm dupla B, planum D in A maius erit plano B 2 in A, vel quod idem est B in A 2, itaque poterit B in A 2 auferri A D in A. auferatur ergo vtrinque, vt cognita ad incognitis separentur, ergo

B in G 2 — B Q æquabitur D in A — B in A 2.

Seu quod idem est G 2 — B) in B æquabitur D — B 2) in A

Et reuocata ad proportionem æqualitate, erunt proportionales

D — B 2 G 2 — B B A

Porisma.

Vt excessus quo differentia segmentorum basis trianguli superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia inter crus maius, & basim superat differentiam crurum, ita est differentia crurum, ad basim. B

Datur ergo basis trianguli de qua quæritur.

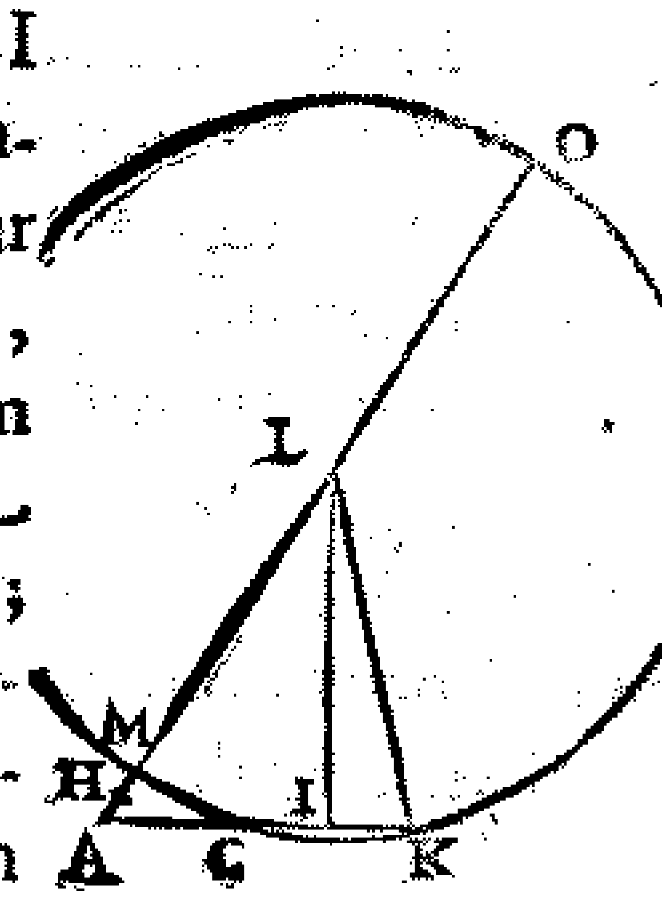
Ex Porismate apparet duplum excessum, quo crus maius superat basim, maiorem esse differentia crurum.

Apparet quoque excessum, differentia segmentorum basis superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia cruris maioris, & & basis superat differentiam crurum, minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis. primus enim excessus ad secundum se habet vt differentia crurum ad basim. sic Porisma indicat.

Hæc omnia ostendenda sunt vt data intra terminos coerceantur, non enim ex quibuscunque datis Problema construi posse manifestum est. Dico igitur Lemmata ad determinationes pertinentia sic propono. C

Lemma I.

Si basis trianguli fuerit crure maiore minor; differentia autem segmentorum basis fuerit maior, quàm dupla differentia crurum; Duplus excessus, quo crus maius superat basim, maior erit quàm differentit crurum.



Sit triangulum L A k, in quo perpendicularis L I secet basim A k in duo segmenta A I, I k, & centro L interuallo L K, cruris minoris, describatur circulus secans basim A k in C, crus vero L A in M, ipsumque productum in O. Differentia igitur crurum L A, L K erit A M, differentia vero segmentorum A I, I k erit A C. sit autem basis A K minor crure L A; ipsa autem A C maior, quàm dupla A M. Dico duplum excessum, quo crus A L superat basim A k, maiorem esse, quàm A M. Secetur enim A M bifariam. in H, erit igitur L H dimidia ipsius A O; Et quoniam* est vt A M ad A C, ita A k ad A O, duplatis antecedentibus erit, vt A M dupla D

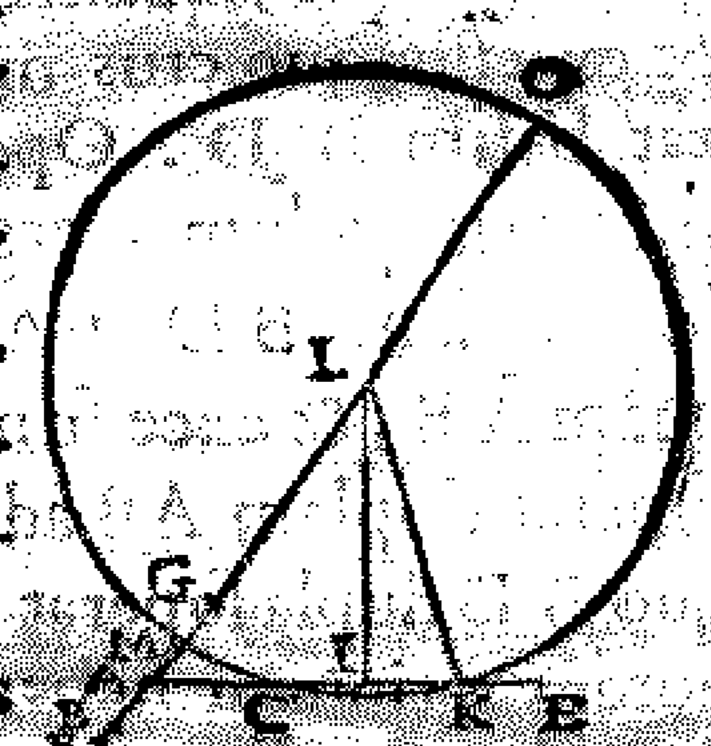
Theor. 7 huius

ad

A ad A C, ita dupla A K ad A O, sed A M dupla ponitur minor, quàm A C, ergo & A k dupla minor erit quàm A O; & consequenter A K simpla minor, quàm L H, dimidia videlicet ipsius A O; quare excessus, quo L A superat A K maior erit, quàm A H, & per consequens duplus est excessus maior, quàm dupla A H, hoc est, quàm A M. quod erat ostendendum.

Lemma II.

Iisdem positis. Excessus, quo differentia segmentorum basis superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia cruris maioris, & basis superat differentiam crurum, minorem habebit rationem, quàm differentia crurum ad differentiam segmentorum basis.



B RESumatur antecedentis Lemmatis figura, & M A duplicetur in B, ac etiam producatur in F, vt sit M F æqualis A C. producatur quoque A K in E, vt sit A E æqualis A L; & sumatur B G dupla ipsius K E. Dico B F ad A G, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Hoc demonstrabitur progrediendo per filum resolutionis directo ordine, non inuerso. hac ratione.

Quoniam enim æquales sunt B A, A M, & æquales quoque M L, L O, erit B O dupla ipsius A L, hoc est

C ipsius A E. Et quoniam rectangulum M A O, hoc est B A O, seu quod idem valet rectangulum A B O, minus quadrato A B æquale est rectangulo C A K, sed cùm sit B O dupla ipsius A E; rectangulũ A B O æquale est duplo rectanguli B A E, hoc est duplo rectanguli B A K, & duplo rectanguli B A, k E; hoc est & simplo rectangulo A B G, est enim B G dupla ipsius k E, ergo duplum rectanguli B A k, plus rectangulo A B G minus quadrato A B, æquale erit rectangulo C A k, hoc est, rectangulo M F, A K; auferatur vtrinque duplum rectanguli B A K, ergo rectangulũ A B G minus quadrato A B, hoc est, rectangulum B A G æquale erit rectangulo M F A K, minus duplo rectanguli B A K, hoc est, minus rectangulo M B A k, seu quod idem est, æquale erit rectangulo F B A k. Cùm igitur rectangulum

D B A G æquale sit rectangulo F B A k, reuocata ad proportionem æqualitate; erit vt F B ad A G ita B A, hoc est A M, ad A K, sed A M ad A K, minorem rationem habet, quàm A M ad A C, ergo & F B ad A G, minorem rationem habebit, quàm A M ad A C. quod erat ostendendum.

His igitur demonstratis patet, non ex quibuscumque datis Problema construi posse; ideo præfiniendi sunt limites, intra quos data consistant.

Determinatio I.

OPortebit duplum excessum, quo crus maius superat basim maiorem esse differentia crurum.

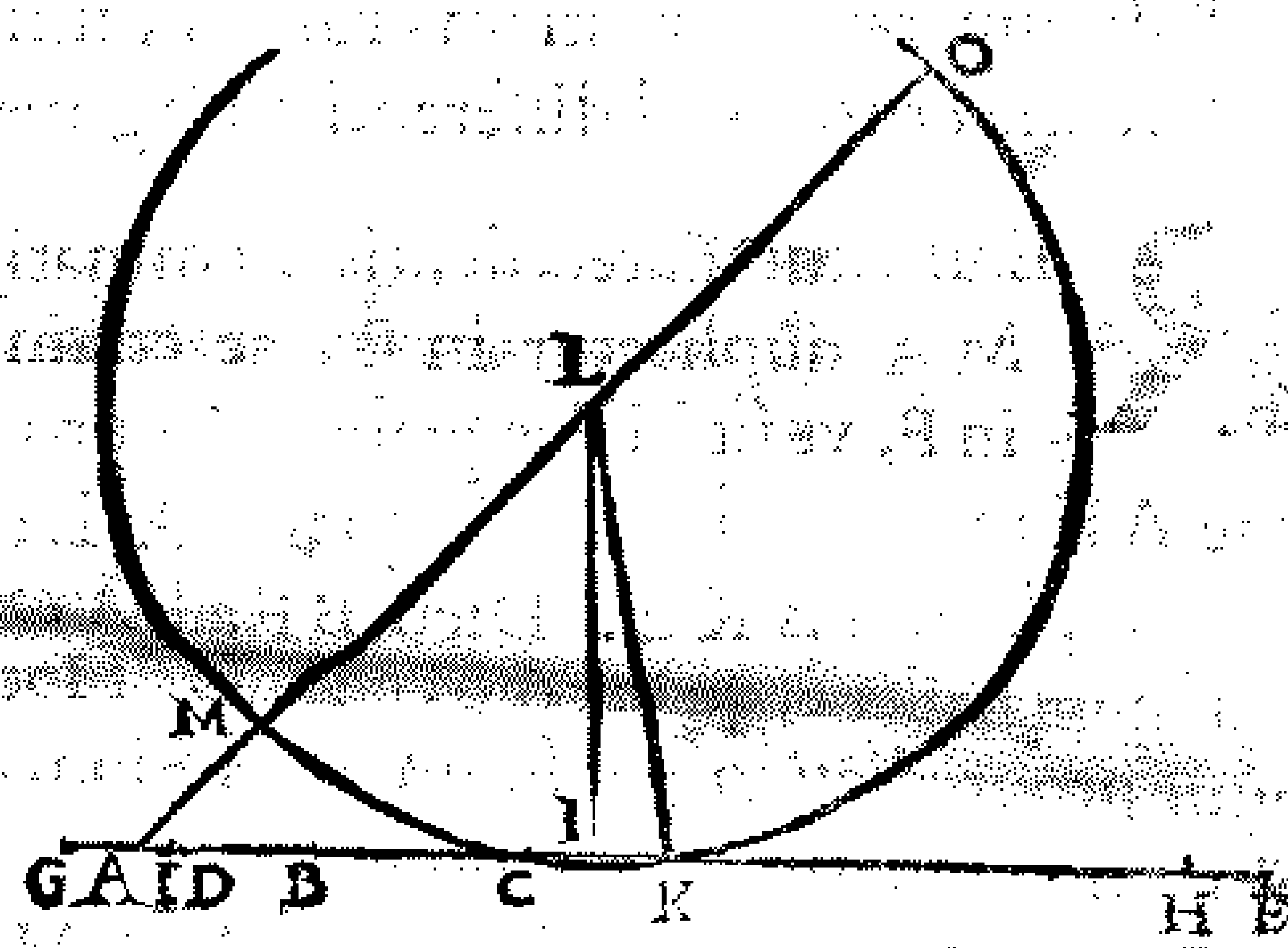
De-

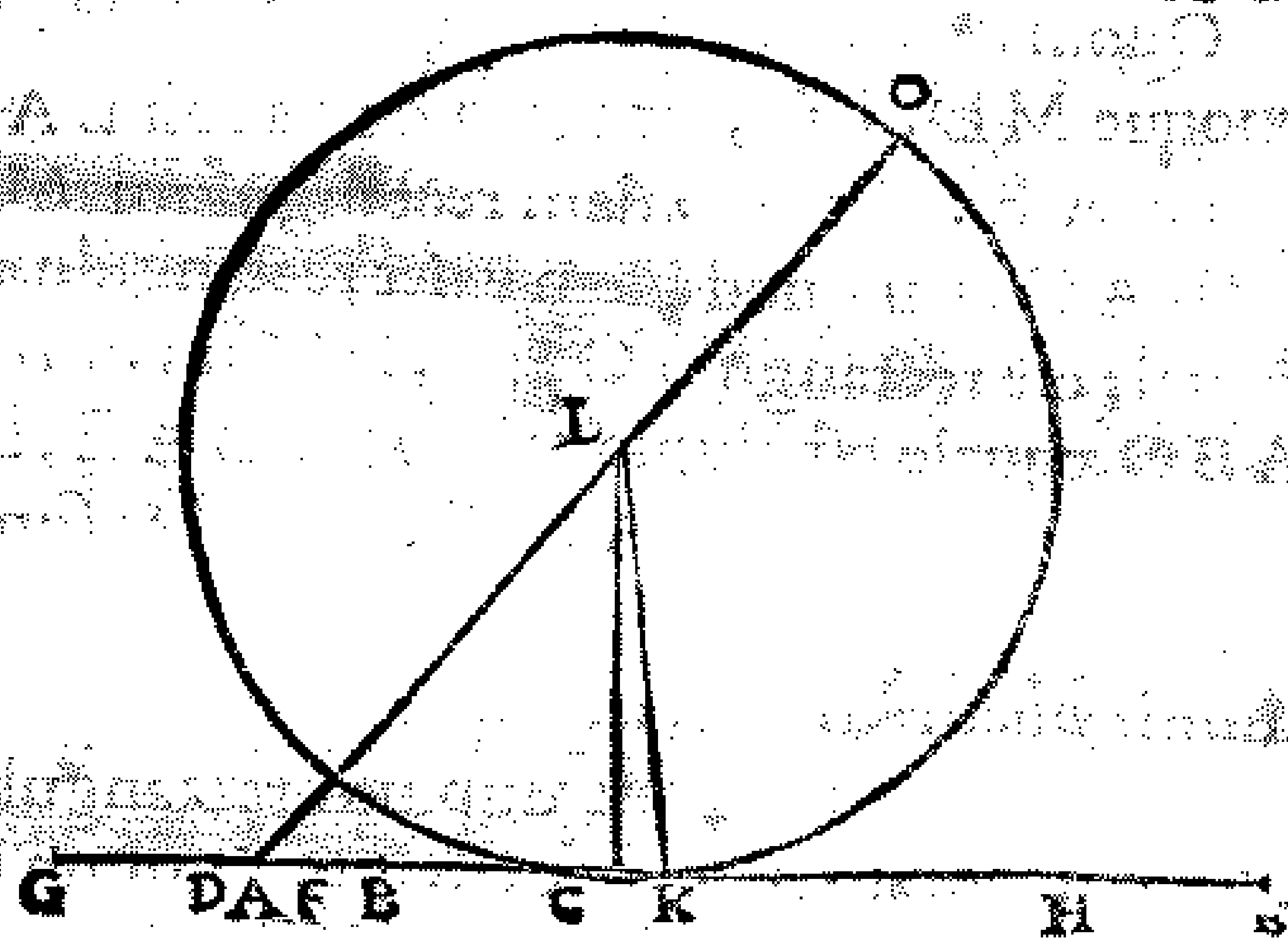
Determinatio II. A

OPortebit quoque excessum quo differentia segmentorum basis superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia cruris maioris, & basis superat differentiam crurum, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum, ad differentiam segmentorũ basis.

Compositio secundi casus.

SIt data differentia crurum trianguli A B, differentia segmentorum basis A C, B quæ sit maior, quàm dupla A B, & excessus quo crus maius superat basim B D. Oportet inuenire triangulum, ergo oportebit duplam B D maiorem esse quàm A B, & excessum, quo A C superat duplam A B ad excessum, quo B D dupla superat A B, minorem rationem habere, quàm A B ad A C. Ponatur ergo C F æqualis duplæ A B, & duplicetur C B D in G, & fiat vt A F ad A G, ita A B ad aliam quæ sit A k, ea ex præcepto Porismatis debet fieri basis trianguli construendi, atque habebit A B ad A k minorem rationem, quàm A B ad A C quoniam & A F ad A G, minorẽ rationẽ habet quàm A B ad A C ex determinatione, quare A k maior erit, quàm A C. Secetur ergo C K bifariam in I à perpendiculari I L, in D qua ponatur k L æqualis K D, & iungatur L A.





Posuimus K L æqualem k D, pro crure minore trianguli construendi; nam cum crus maius debeat superare crus minus excessu A B, basim vero excessu B D minori in prima figura quàm A B, basis A K maior esse debet crure minore excessu D A. In secunda autem figura, crus maius trianguli construendi, debet superare crus minus, excessu A B, basim vero, excessu B D qui maior est, quàm A B, ergo basis A K minor esse debet crure minore, excessu D A. Triangulum igitur L A k constitutum est quemadmodum Porisma docet; est enim vt A F excessus, quo A C superat duplam A B ad A G excessum, quo B D dupla superat A B, ita A B ad A K basim trianguli

A guli L A k; in eo auté triangulo esse ea, quæ requiruntur, sic demonstrabitur.

Centro L interuallo L K describatur circulus secans A L in M, productam vero in O, is circulus transibit per C cum sint æquales C I, I k; differentia igitur segmentorum basis A I, I k erit ipsa A C data. Duplicetur autem G K in E, & fiat E H æqualis G A. Quoniam igitur E G dupla est ipsius k G, & G B dupla ipsius G D, erit & reliqua E B dupla reliquæ k D, vel K L, atque adeo B E, M O æquales erunt.

Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum B A G sub medijs, æquale erit rectangulo F A k, sub extremis; hoc est rectangulo C A K, minus rectangulo C F, A k, seu minus duplo rectanguli B A k, recta enim C F dupla est ipsius A B, ex constructione, addatur vtrique parti duplum re-

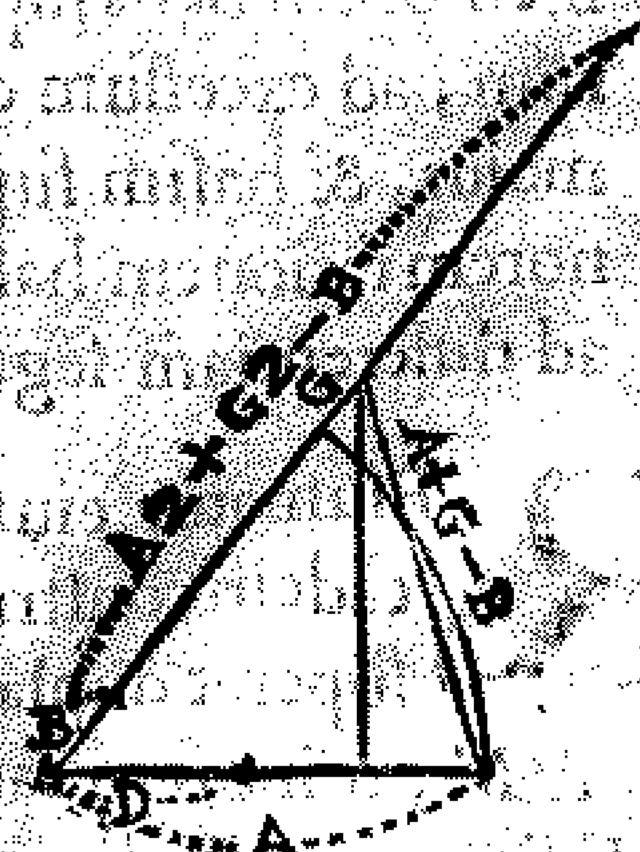
B ctanguli B A k, ergo rectangulum B A G, vnà cum duplo rectanguli B A K, hoc est vna cum rectangulo B A H; seu quod idem valet, rectangulum B A G H, vel B A E æquale erit rectangulo C A k, hoc est M A O, atqui sunt æquales M O, B E, vt est demonstratum, ergo * & A M differentia crurum A L, L K, æqualis erit ipsi A B. Superest igitur vt crus A L maius sit base A K, excessu B D; id autem ita fit manifestum. Theor. 7 huius

Quoniam enim in prima figura crus L k superatur à crure A L, excessu A B, vt ostendimus, à base vero A K excessu A D, ex constructione, basis A k superabitur à crure A L reliquo excessu B D, in secunda vero figura basis A k superatur a crure L K, excessu D A, ex constructione, ipsumque crus L k superatur à crure L A, excessu A B, ergo basis A k superabitur à crure

C A L vtroque excessu D A, A B; hoc est excessu B D, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L A K, in quo A M differentia crurum A L, L k æqualis est datæ A B, & differentia segmentorum basis A I, I K, est ipsa A C data, atque crus maius A L superat basim A k excessu B D quod erat faciendum.

Aliter eundem casum breuiori via & resoluam & componam, omissaque æqualitate, proportione vtar.

Alia Resolutio Secundi casus.



SIt data differentia crurum trianguli vt prius B; differentia segmẽtorum basis D, & excessus quo

D crus maius superat basim, G, & oporteat inuenire triangulum. Basis trianguli esto A, ergo crus maius erit A ✠ G, crus minus A ✠ G — B, vnde aggregatum crurum A 2 ✠ G 2 — B. Et quoniam est * vt differentia segmentorum basis ad differentiam crurum, ita aggregatum crurum ad basim; erunt proportionales. Theor. 9 huius

D B A 2 ✠ G 2 — B A

Et duplatis consequentibus, proportionales erunt.

D B 2 A 2 ✠ G 2 — B A 2

Et

Et quoniam dupla differentia crurum ponitur minor, quàm differentia segmentorum basis, hoc est B 2 ponitur minor quàm D, poterit B 2 auferri à D, ergo à diuisione rationis argumentabor; hoc est diuidendo proportionales erunt A

D — B 2 B 2 G 2 — B A 2

Et rursus subduplatis consequentibus, erunt proportionales

D — B 2 B G 2 — B A

Atque permutando proportionales erunt.

D — B 2 G 2 — B B A

Hæc permutatio licet non sit necessaria, cum in præcedenti quoque proportionalium serie dentur primi tres termini; tamen addita est, quò commodius Porisma, ac Determinationes ordinentur. B

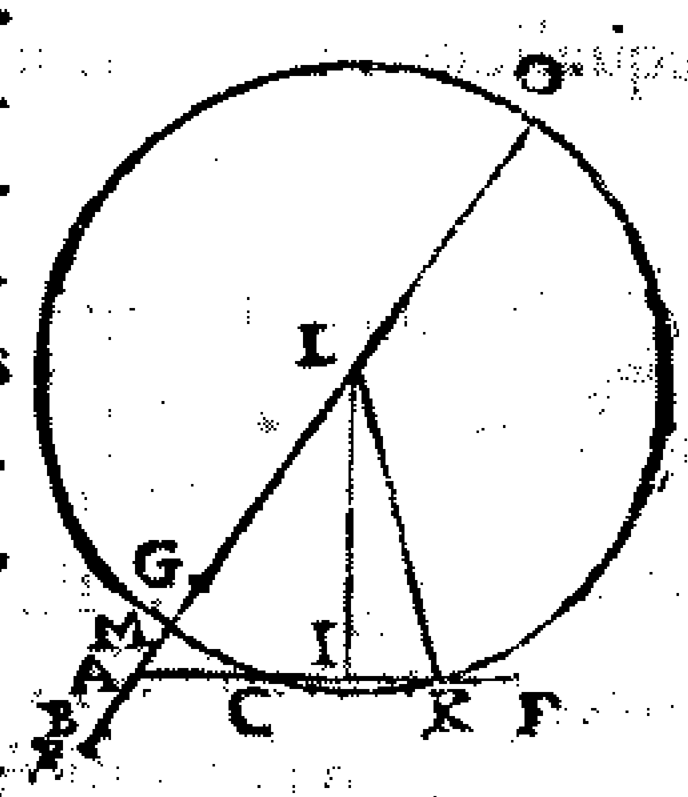
Porisma.

Vt excessus, quo differentia segmentorum basis trianguli superat duplam differentiam crurum ad excessum, quo dupla differentia inter crus maius, & basim superat differentiam crurum, ita est differentia crurum ad basim.

Illud ipsum Porisma est, quod ex antecedente Resolutione deducitur. Eadem ergo Lemmata, eædemque determinationes, quæ illic, hic quoque intelligantur præpositæ. Sed quoniam secundum illud Lemma, quod ad secundam Determinationem huius Casus pertinet, ostenditur per repetitionem vestigiorum Resolutionis, eaque resolutio procedit per æqualitatem, hæc autem per proportionem; idem Lemma hic etiam, sed aliter, omissa æqualitate, per proportionem demonstrabo. C

Lemma.

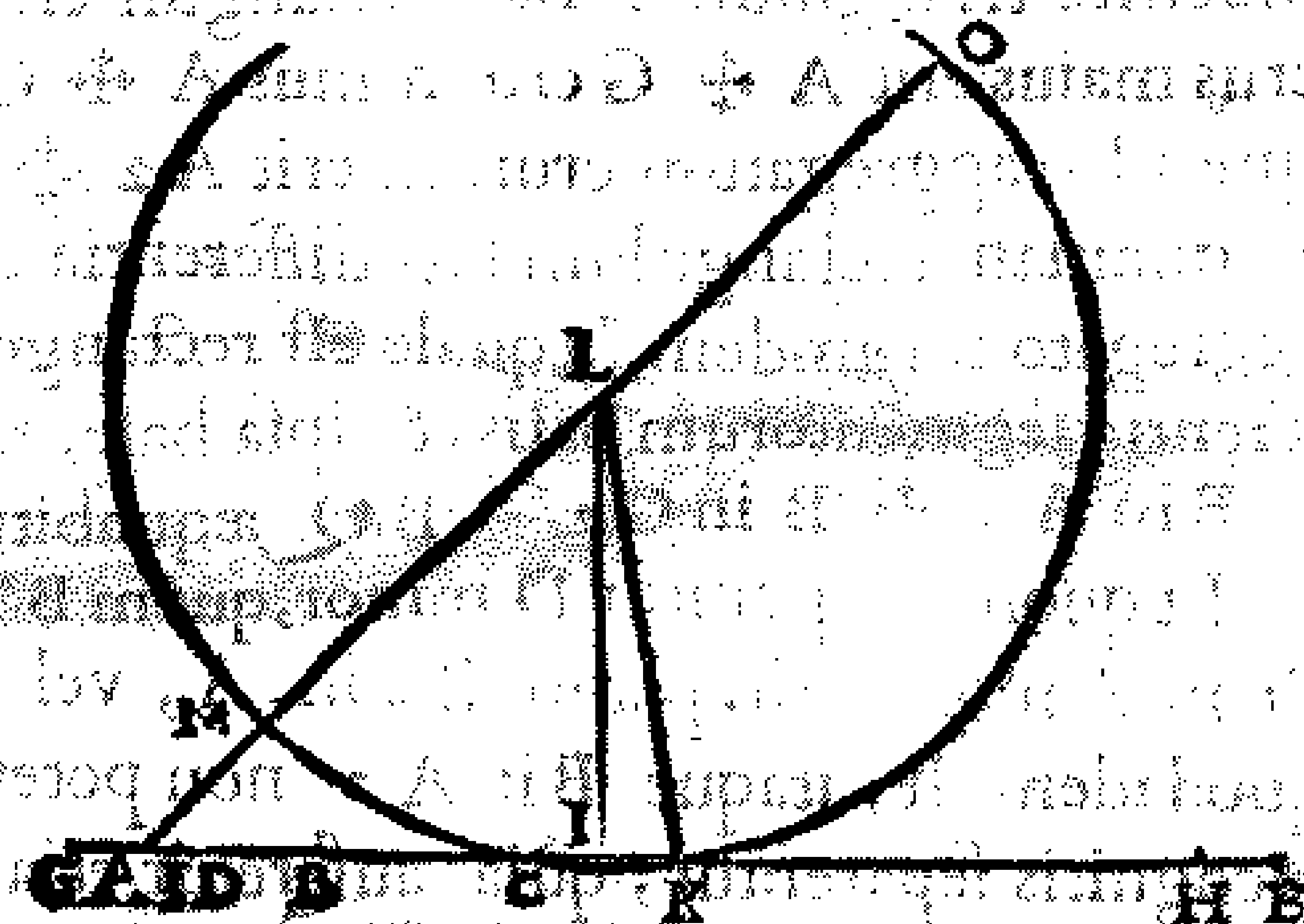
Si basis trianguli fuerit crure maiore minor, differentia autē segmentorum basis fuerit maior, quàm dupla differentia crurum. Excessus quo differentia segmentorum basis superat duplam differenciam crurum, ad excessum quo dupla differentia inter crus maius, & basim superat differentiam crurum, minorem rationem habebit quàm differentia crurum ad differentiam segmentorum basis.* D

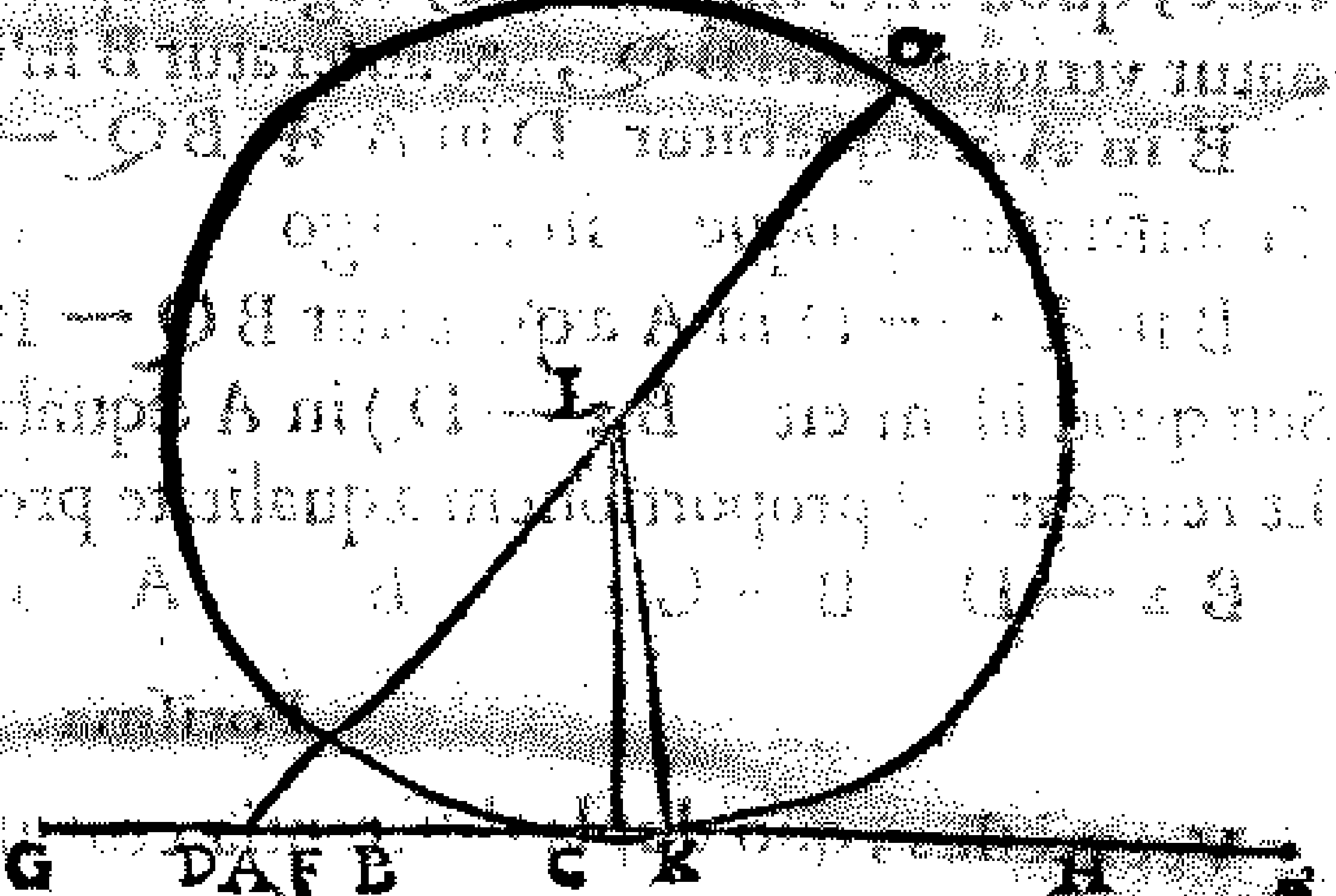


Resumatur eiusdem Lemmatis figura, & fiat eadem constructio. Dico B F excessū quo AC, superat duplam A M ad A G, excessum quo dupla K E superat A B, vel A M, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Quoniam enim A L superat A K dimidia B G; est enim B G dupla ipsius, K E, superabit dupla A L, hoc est recta B O duplam A k tota B G, quare G O dupla erit ipsius A K. Et quoniam est vt A C, hoc est F M ad A M, ita A O ad A k; duplatis conse-

A consequentibus, erit vt F M ad M B, ita A O ad G O, & diuidendo, vt F B ad B M; ita A G ad G O, rursus subduplatis consequentibus erit F B ad A M, ita A G ad A K, & permutando, vt F B ad A G, ita A M ad A k, sed A M ad A K, minorem rationem habet, quàm A M ad A C, ergo & F B ad A G, minorem rationem habebit, quàm A M, ad A C, quod erat ostendendum.

Alia Compositio secundi casus.



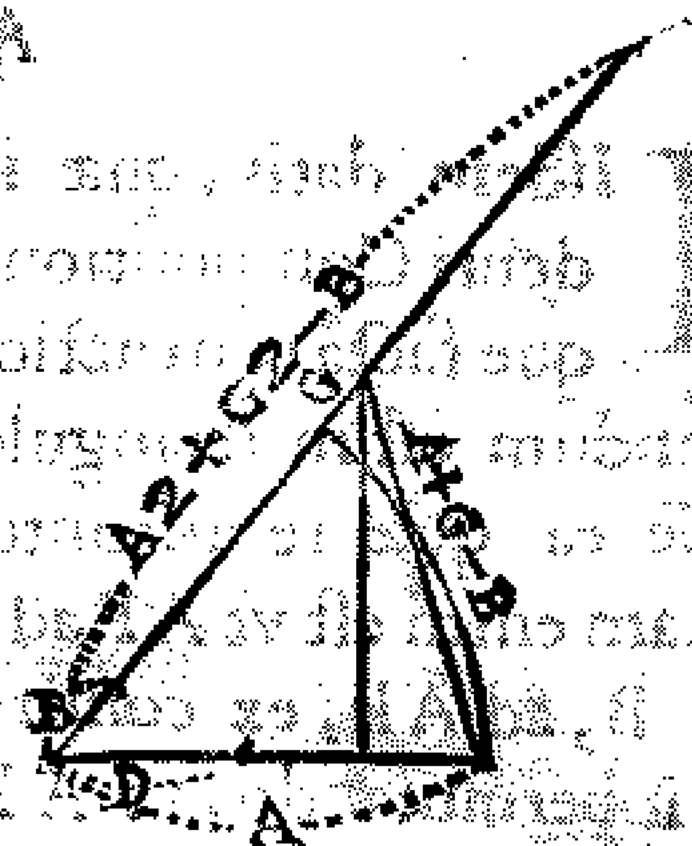


Iisdem datis, quæ in antecedenti Compositione, eademque facta costructione, Ostẽdendum est in triangulo L A k,
B esse ea quæ requiruntur. Quoniam enim est vt A F ad A G, ita A B, ad A k, ex constructione, erit permutando, vt A F ad A B, ita A G ad A K, & duplatis consequentibus, vt A F ad F C, ita A G ad A K, & componendo, vt A C ad F C, ita erit G H, hoc est A E, ad A H; & rursus subduplatis cõsequentibus, vt A C ad A B, ita erit A E ad A k. Vt autem
C A B conferatur cum A M, deleãtur extremæ A C, A K proportionalium, & in earum locum substituantur A M, A O, quippe quæ ad constitutionem proportionalium, manentibus medijs A B, A E sunt æquiualentes: propter quod rectangulũ M A O, æquale est rectangulo, C A k; sed ad eas delendas, aliasque substituendas oportet prius commutare extremas proportionalium, cum medijs; nam argumentatio ex æquali in proportione perturbata eximit medias proportiona-
D lium, aliasque substituit, non autem eximit extremas. Conuertantur itaque proportionales vt extremę cum medijs commutentur; ergo, vt A B ad A C, ita erit A k ad A E; sed vt A C ad A M, ita est A O ad A k, ergo in perturbata proportione erit, vt A B ad A M, ita A O ad A E; atque sunt æquales M O, B E, vt ostensum est in antecedenti Compositione, ergo * & A M differentia crurum A L, L K, æqualis erit A B datæ. differentia autem segmentorum basis A I, I k est ipsa A C data: & basim A K superari à crure A L, excessu B D ostendetur eadem ratione, qua in antecedenti compositione. Constructum est igitur triangulum L A k, &c. quod faciendum erat. Theor. 4 huius

Re-

Resolutio Tertij Casus.

RVrsus sit excessus, qui est inter crus maius, & basim penes ipsum crus, sed differentia segmentorum basis sit minor, quàm dupla differentia crurum; sit igitur data differentia crurum trianguli B differentia segmentorum basis D minor, quàm dupla B, & excessus, quo crus maius superat basim sit G. Oportet inuenire triangulum. Basis trianguli esto A, ergo crus maius erit A + G crus minus A + G − B, atque adeo aggregatum crurum erit A 2 + G 2 − B. Et quoniam rectangulum sub differentia crurum, & Theor. 6 huius aggregato eorumdem, *æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base, ergo



B in A 2 + B in G 2 − B Q æquabitur D in A

Et quoniam ponitur D minor, quàm B 2, planum D in A minus erit, plano B 2 in A, vel B in A 2, quod idem est; itaque B in A 2 non poterit vtrinque auferri, vt cognita ab incognitis separentur, quia auferretur etiam à D in A, maius videlicet à minore, quod esset impossibile, ergo vt separentur cognita ab incognitis, addatur vtrique parti B Q, & auferatur B in G 2, ergo

B in A 2 æquabitur D in A + B Q − B in G 2

Et auferatur quoque D in A. ergo

B in A 2 − D in A æquabitur B Q − B in G 2.

Seu quod idem est B 2 − D) in A æquabitur B − G 2) in B.

Et reuocata ad proportionem æqualitate proportionales erunt

B 2 − D B − G 2 B A

Porisma.

Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis; ita est differentia crurum ad basim.

Ex hoc Porismate apparet, duplum excessum, quo crus maius superat basim, minorem esse differentia crurum.

Apparet etiam, excessum, quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum, quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis; primus enim excessus ad secundum se habet, vt differentia crurum ad basim. sic Porisma indicat. Quæ quoniam ad determinationes pertinent, ostendenda sunt. Lemmata igitur ad id opus sic propono.

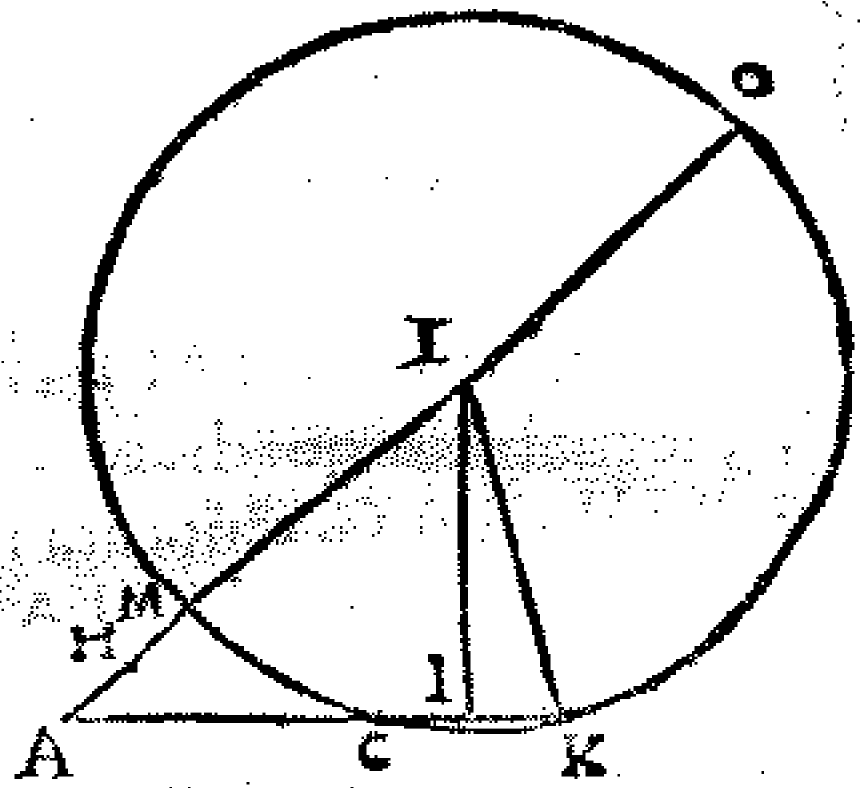
Lem-

A

Lemma I.

Si basis trianguli fuerit crure maiori minor, ac etiam differentia segmentorum basis minor, quàm dupla differentia crurum. Duplus excessus quo crus maius superat basim, minor erit, quàm differentia crurum.

SIt triangulum L A K, in quo perpendicularis L I secet basim A K in duo segmēta A I, I K, & centro L interuallo L K, cruris minoris, describatur circulus secans basim A K in C, crus vero K L in M, ipsumque



B continuatum in O. differentia igitur crurum L A, L K erit A M, differentia vero segmentorum A C. Sit autē basis A K minor crure maiori A L, & A C minor, quàm dupla A M. Dico duplum excessum, quo A L superat A k, minorem esse, quàm A M. Secta enim A M bifariam in H erit A O dupla ipsius L H. Et quoniam est vt A M ad A C, ita A K ad A O, duplatis antecedentibus, erit vt A M dupla ad A C, ita dupla A K ad A O, sed dupla A M ponitur maior quàm A C, ergo & A k dupla, maior erit, quàm A O, & consequenter A k simpla, maior quam L H, dimidia videlicet ipsius A O; sed A k ponitur minor, quàm A L; ergo ipsa A L superat A K excessu minori, quàm A H, & per cōsequens duplus excessus, quo A L

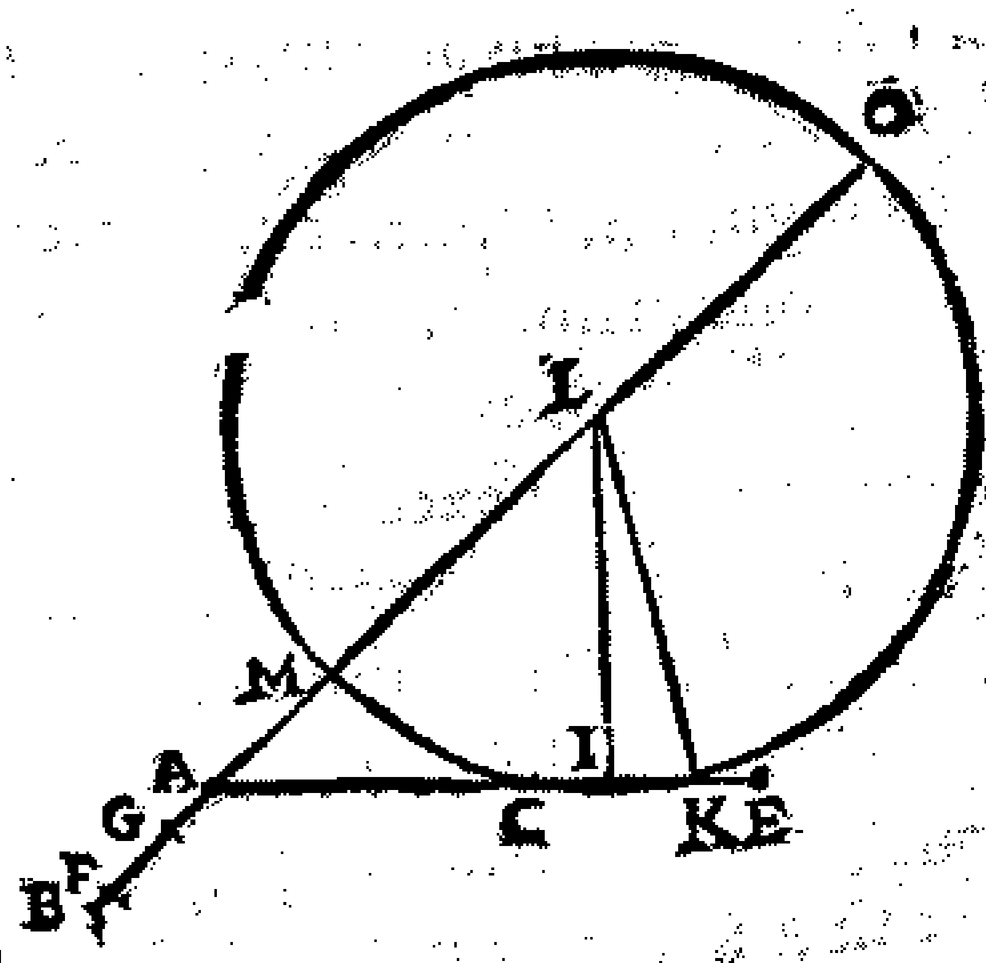
C superat ipsam A k, minor erit, quàm A M, quæ est dupla ipsius A H, quod erat ostendendum.

Lemma I I.

Ijsdem positis. Dico insuper excessum, quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differētia crurū superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis.

REsumatur enim antecedentis Lem-matis figura, & duplicetur M A in

D B, ab eaq. abscindatur M F æqualis A C, & producatur A k in E, vt sit A E æqualis A L, & rectæ k E: fiat dupla B G. ea minor erit quam A B, ex antecedente Lemmate. Ostendendum est igitur B F ad G A minorem rationem habere, quàm A M ad A C, idque fiet per resolutionis filum procedendo, directo tamen ordine. Quoniam igitur æquales sunt A B, A M, & æquales quoq; M L, L O, erit B O dupla



H ipsius

ipsius A L, vel A E. Et quoniam rectangulum M A O, hoc est B A O, seu quod idem valet rectangulum A B O, minus quadrato A B, æquale est rectangulo C A k, rectangulum autem A B O æquatur duplo rectanguli BAE, cum sit B O dupla ipsius A E, hoc est æquatur duplo rectanguli B A K, & duplo rectanguli B A, K E, ergo duplum rectanguli B A K vnà cum duplo rectanguli B A, k E (minus quadrato A B æquale erit rectangulo C A K; addatur vtrobique quadratum B A, & auferatur duplum rectanguli B A, k E, hoc est rectangulum A B G. est enim B G dupla ipsius k E, ergo duplum rectanguli B A k æquabitur rectangulo C A k, & quadrato B A, minus rectangulo A B G; ablato vtrinque rectangulo C A k, duplum rectanguli B A K, minus rectangulo C A k, hoc est rectangulum M B, A k minus rectangulo C A k, vel M F, A K, seu quod idem valet, rectangulum B F, A k, æquabitur quadrato B A, minus rectangulo A B G, hoc est æquabitur rectangulo B A G. reuocata igitur ad proportionem æqualitate erit* vt B F ad A G, ita Ab, vel A M ad A K, sed A M ad A K minorem rationem habet, quam A M ad A C, & ergo B F ad A G, minorem rationē habebit, quàm A M ad A C. quod erat ostendendum. A

*16 sexti B

His igitur demonstratis præponendæ sunt huiusmodi Determinationes.

Determinatio I.

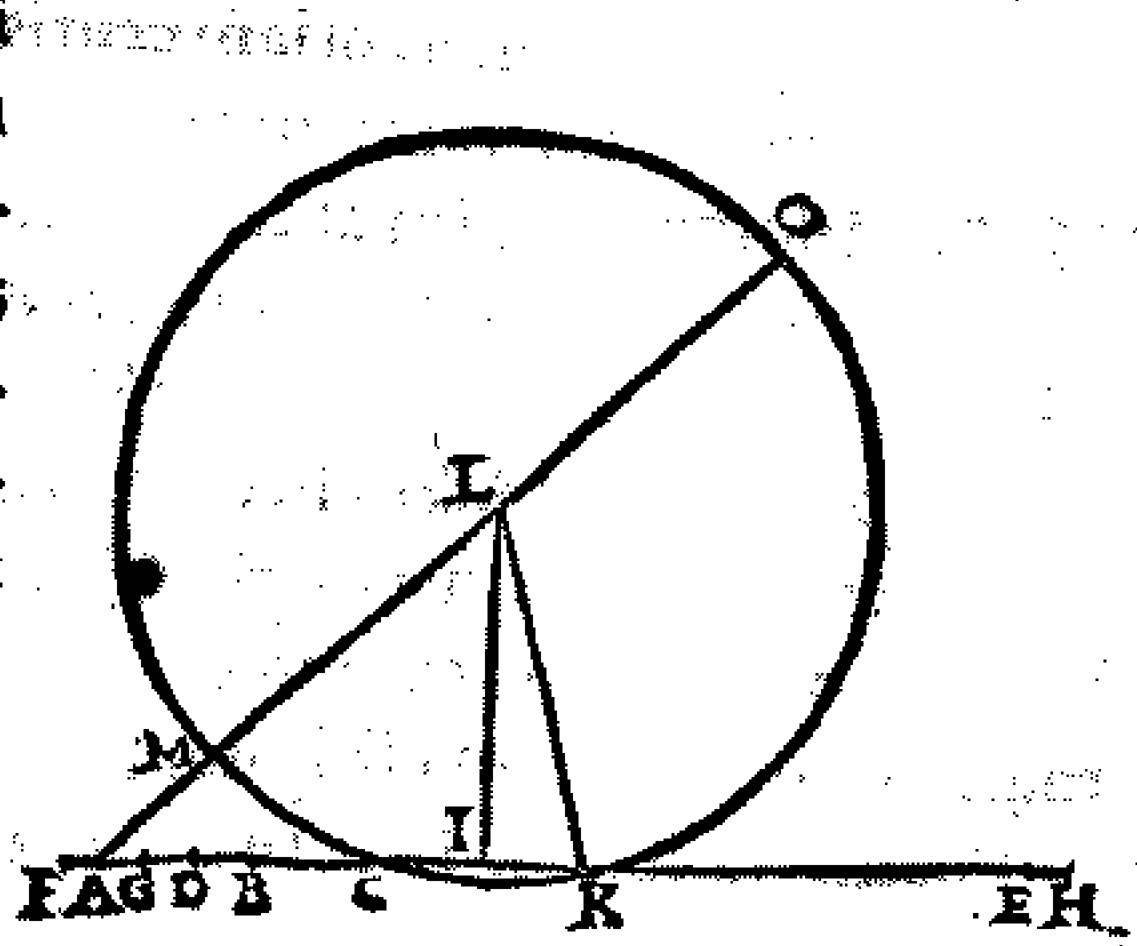
OPortebit duplum excessum, quo crus maius superat basim, minorem esse differentia crurum.

Determinatio I I.

OPortebit quoque excessum, quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum, quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem rationē habere, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis. C

Compositio tertij casus.

SIt data differentia crurum trianguli A B; differentia verò segmentorum basis A C, quæ sit minor, quàm dupla A B, excessus autem, quo crus maius superat basim sit B D. Oportet inuenire triangulum. Oportet autem, ex Determinatione prima, B D duplam, minorem esse, quàm A B; ex Determinatione vero secunda, oportet excessum, quo A B dupla superat A C ad excessum, quo AB superat duplam BD, minorē rationē habere, quàm AB ad AC. Ponatur igitur C F D



æqualis duplæ AB, & duplicetur BD in G, & fiat vt A F ad AG, ita A B ad aliā quæ sit A K, ea ex præcepto Porismatis debet fieri basis trianguli construendi, atque

A atque habebit A B ad A k minorem rationem, quàm A B ad A C, quoniam & A F ad A G minorem rationem habet, quàm A B ad A C ex determinatione; quare A k maior erit, quàm A C. Secetur ergo C k bifariam in I perpendiculariter à recta I L, in qua ponatur K L æqualis k D, & iungatur L A. posita est K L æqualis K D, pro crure minore crianguli construendi; nam cum crus maius trianguli debeat superare crus minus, excessu A B; basim vero excessu B D; basis A K maior esse debet crure minori, excessu D A; itaque triangulum L A k constructum est, quemadmodum Porisma docet; est enim vt A F excessus, quo dupla A B superat A C ad A G excessum, quo A B superat duplam B D; ita A B ad A k basim trianguli L A K. in eo autem triangulo esse ea, quæ requiruntur, sic demonstrabitur.

B Centro L interuallo L k describatur circulus secans A L in M, ipsamque productam in O, is circulus transibit per C cum sint æquales CI, I k. Differentia igitur segmentorum basis A I, I k, erit ipsa A C data. Duplicetur autem G K in E, & A k in H. Quoniam igitur E G dupla est ipsius K G, & B G dupla ipsius G D, erit & reliqua E B dupla, reliquæ K D, vel K L, atque adeo B E, M O æquales erunt.

Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum F A k sub extremis, æquale erit rectangulo B A G sub medijs, sed rectangulum F A K æquale est rectangulo C F, A K, minus rectangulo C A k, seu æquale est rectangulo B A k bis, minus rectangulo C A k (est enim C F dupla ipsius A B) ergo rectangulum B A K bis, minus rectangulo C A K æquabitur re-

C ctangulo B A G; addatur vtrique parti rectangulum C A k, ergo rectangulum B A k bis, hoc est rectangulum B A H, æquabitur rectangulis C A K, B A G; auferatur vtrinque rectangulum B A G, ergo rectangulum B A H, minus rectangulo B A G, seu quod idem valet rectangulum B A, G H, vel B A E æquale erit rectangulo C A K; hoc est rectangulo M A O, sed æquales sunt M O, B E, vt est demonstratum, ergo &c* A M æqualis erit A B. Et quoniam L K superatur ab A K excessu A D, ex constructione, ab A L vero excessu A M æquali A B, vt ostendimus, ipsa A k superabitur ab A L reliquo excessu D B. Constructum est igitur triangulum L A K in quo A M, differentia crurum æqualis est datæ A B, & differentia segmentorum basis A I, I K est ipsa A C data: atque excessus quo crus L A superat basim A k est

D B D. quod erat faciendum.

Theor. 3 huius

Alia Resolutio tertij Casus.

Isdem datis. quæratur basis trianguli, vt in antecedenti Resolutione, & resumatur eadem figura. Quoniam igitur* proportionales sunt, differentia crurum trianguli, differentia segmentorum basis, ipsa basis, & aggregatum crurum, hoc est

Theor. 7 huius

B D A A 2 ✠ G 2 -- B

Duplatis antecedentibus, erunt quoque proportionales

B 2 D A 2 A 2 ✠ G 2 -- B

 Et

Et per conuersionem rationis proportionales erunt

B 2 B 2 -- D A 2 B -- G 2

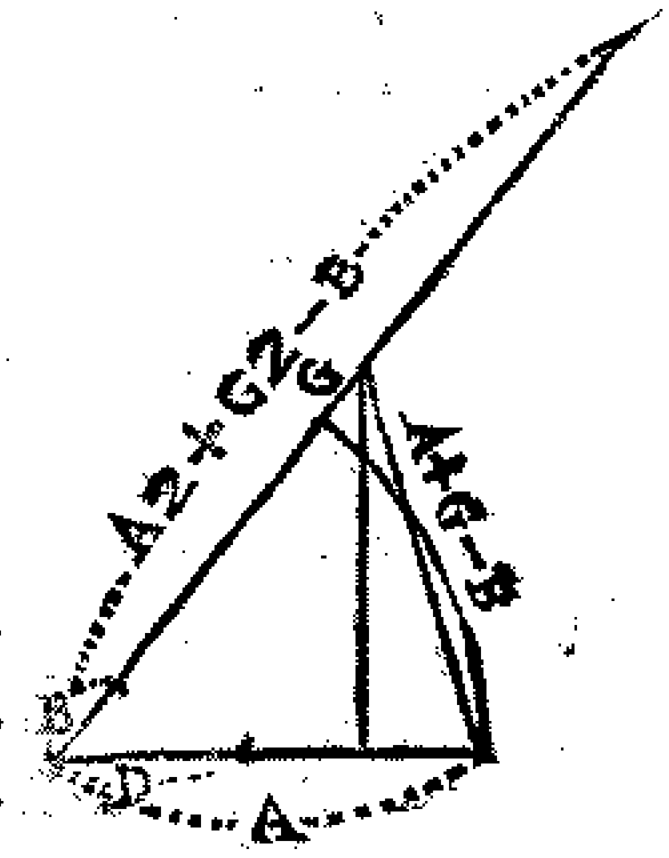
Et rursus subduplatis antecedentibus, proportionales erunt

B B 2 -- D A B -- G 2

Et conuertendo B 2 -- D B B -- G 2 A

Et permutando B 2 -- D B -- G 2 B A

Hæc permutatio non erat necessaria, sed addita est ob eas, quas in resolutione secunda, & quarta primi Casus, & in Resolutione secunda secundi, attuli rationes.



Porisma.

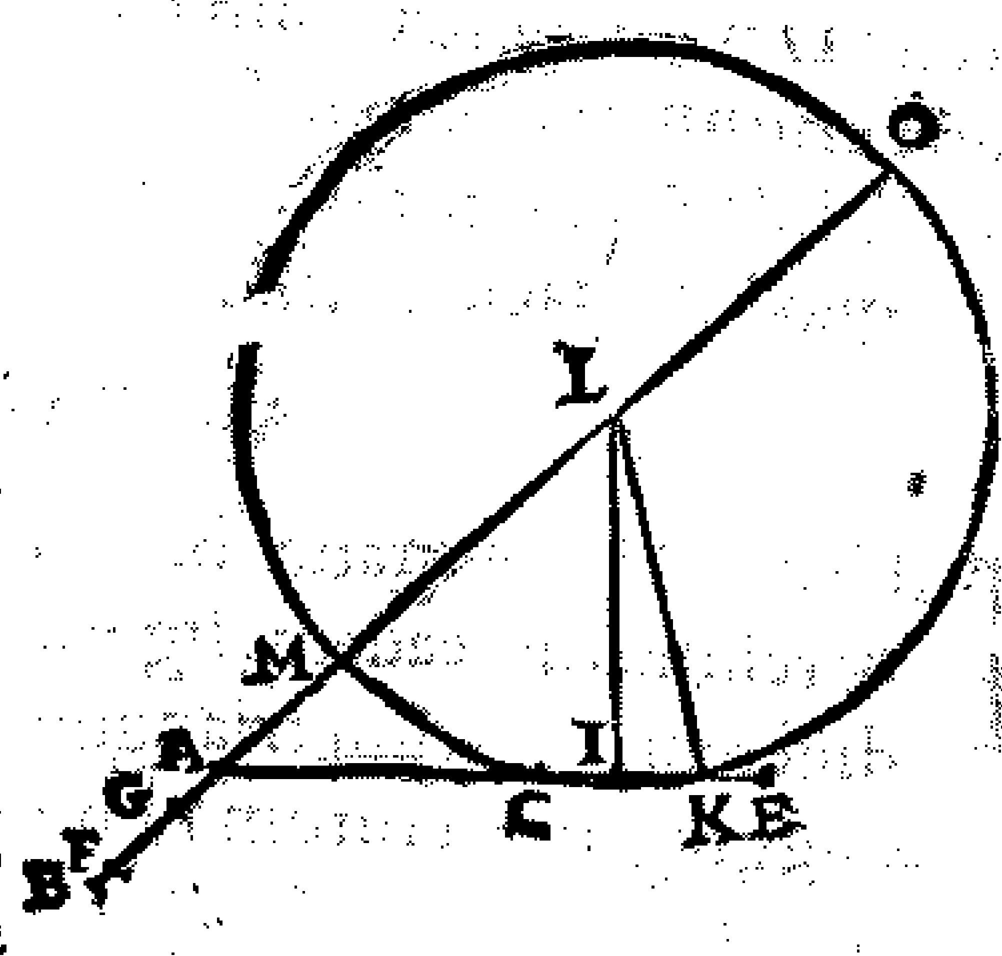
Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli superat differentiam segmentorum basis, ad excessum, quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis; ita est differentia crurum ad basim.

Illud ipsum Porisma, quod per antecedentem resolutionem inuentum est, neque ideo opus est Lemmata illa, ac Determinationes, quæ post eam Resolutionem sequuntur repetere. Verùm quoniam Lemma illud secundum per filum resolutionis ostenditur, hìc etiam idipsum alia via per alium huiusce Resolutionis filum demonstrabo.

Lemma.

Si basis trianguli fuerit crure maiori minor, & differentia segmentorum basis minor quoque, quàm dupla differentia crurum. Excessus quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem rationem habebit, quàm differentia crurum, ad differentiam segmentorum basis.

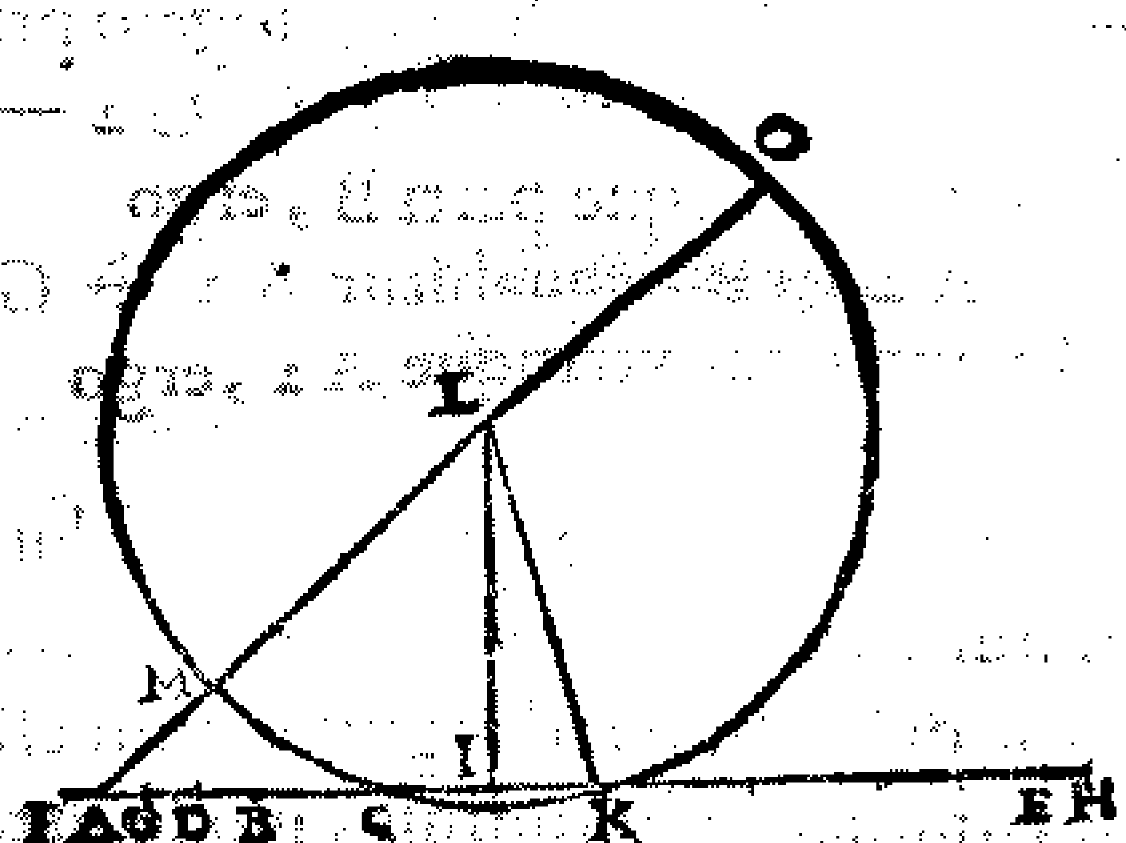
Resumpta eiusdem Lemmatis figura, eademque facta constructione. Ostendendum est B F excessum quo M A dupla superat A C, ad excessum A G, quo M A superat duplam k E, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Quoniam enim æquales sunt A B, A M, & æquales quoque M L, L O, erit B O dupla ipsius A L, sed cum A L superet A K dimidia B G; est enim B G dupla ipsius k E superabit dupla A L, hoc est ipsa B O dupla A K, tota BG; quare GO ipsius AK dupla erit. Et quoniam est, vt AM ad A C ita AK ad AO, duplatis antecedētibus erit, vt BM ad AC hoc est ad MF, ita GO



ad

A ad O A, & per conuersionem rationis, vt BM ad BF, ita GO ad GA, & rursus subduplatis antecedentibus, vt AM ad BF, ita erit AK ad AG: & conuertendo, vt BF ad AM, ita AG ad AK; ac denique permutando erit, vt BF ad AG, ita AM ad Ak; sed AM ad Ak, minorem rationem habet quàm AM ad AC; ergo & BF ad AG minorem rationem habebit quàm AM ad AC, quod erat ostendendum.

Alia Compositio tertij casus.



IIsdem datis, quæ in antecedenti Compositione, factaq. eadem con-
B structione. Quoniam igitur est, vt AF ad AG, ita AB ad AK; erit permutando, vt AF ad AB, ita AG ad Ak; & conuertendo, vt AB ad AF, ita AK ad AG, & duplatis antecedentibus, vt CF ad FA, ita AH ad HG, & per conuersionem rationis, vt CF ad CA, ita AH ad HG, hoc est ad AE. & rursus subduplatis antecedentibus erit, vt AB ad AC, ita Ak ad AE, sed vt AC ad AM, ita est AO ad Ak, ergo in perturba-
C ta proportione erit, vt AB ad AM, ita AO ad AE, atque æquales sunt MO, BE, vt demonstratum est in antecedenti compositione: ergo & * reliqua AM reliquæ AB æqualis erit. Et cum Lk superetur ab LA, excessu AM æquali AB, vt ostendimus, ab AK vero, excessu AD, ex constructione, ipsa Ak superabitur ab AL, reliquo excessu DB. Constructum est igitur triangulum LAk, cuius crurum LA Lk differentia AM, æqualis est datæ AB, & differentia segmentorum AI, Ik, est ipsa AC data, atque crus LA superat basim Ak, dato excessu BD, quod erat faciendum. * Theor. 4. huius

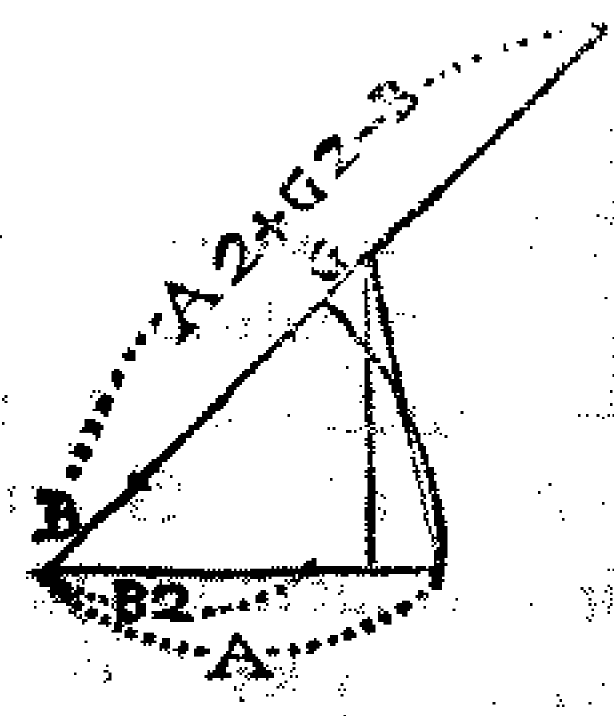
Scholium.

D IN hac quoque demonstratione, vt AM cum AB conferri possit, opus fuerit eximere proportionalium medias AC AK, & in eorum locum alias AM, AO subrogare, prioribus ad constitutionem proportionalium (manentibus extremis AB, AE) æquiualentes, vt factum est in secunda Compositione primi Casus, & in secunda secundi, & sic cum aliquid simile occurret faciendum erit.

Resolutio quarti, & vltimi Casus.

DEnique existente excessu, qui est inter crus maius, & basim, penes ipsum crus, sit differentia segmentorum basis æqualis duplæ differentiæ crurum, vtpotè sit differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis B 2, & excessus, quo crus maius superat basim G. A
Oportet inuenire triangulum. Basis trianguli esto A, crus igitur maius erit A + G, crus verò minus A + G — B aggregatum ideo crurum A 2 + G 2 — B; sed cũ sit vt B ad B 2; ita A ad A 2, *erit A 2 aggregatum crurum, atque adeo eidem aggregato prius inuento æquale; hoc est A 2 æquabitur A 2 + G 2 — B

Theor. 7 huius



Addatur vtrique parti B, ergo B

A 2 + B æquabitur A 2 + G 2

Et auferatur vtrinque A 2, ergo

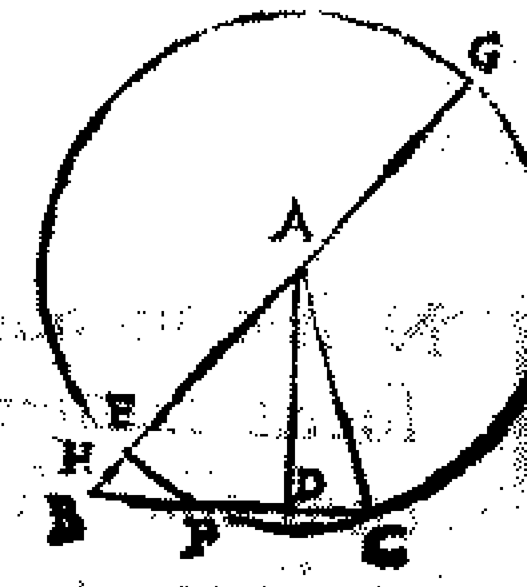
B æquabitur G 2.

In hac æquatione quamuis Resolutio ritè sit peracta, quæsitum non comparatur cum dato, vt tali comparatione ex ipsum innotescat, atque adeo possit definiri; quod argumentum est, basim trianguli, de qua quæritur, posse esse cuiusque longitudinis, modo datam differentiam segmentorum basis excedat, cùm basis maior sit, quàm ipsa differentia. Apparet tamen ex resolutione, duplum excessum, quo crus maius superat basim, æqualem esse differentiæ crurum, idque quoniam ad determinationem pertinet demonstrandum est. Lemma igitur ad id opus ita propono. C

Lemma.

Si differentia segmentorum basis fuerit dupla differentiæ crurum. Crus maius excedet basim, excessu dimidiæ differentiæ crurum æquali.

SIt triangulum A B C, in quo perpendicularis A D secet basim B C in duo segmenta B D, D C, & centro A, interuallo A C, quod sit crus minus, describatur circulus secans basim B C in F; crus verò A B in E, ipsumq. productum in G; sit autem B F differentia segmentorum basis, dupla B E differentiæ crurum. Dico A B excedere ipsam B C, excessu æquali dimidiæ B E. Secetur enim B E bifariam in H. Quoniam igitur est vt B F ad B E, ita B G ad B C, & est B F dupla ipsius B E, erit & B G dupla ipsius B C; sed & ipsius A K dupla est B C, cum sint A F, E H æquales ipsis A G, H B, vtraque vtrique, ergo B C æqualis erit A H. itaque A B superat ipsam B C excessu H B æquali dimidiæ B E, quod erat ostendendum. D

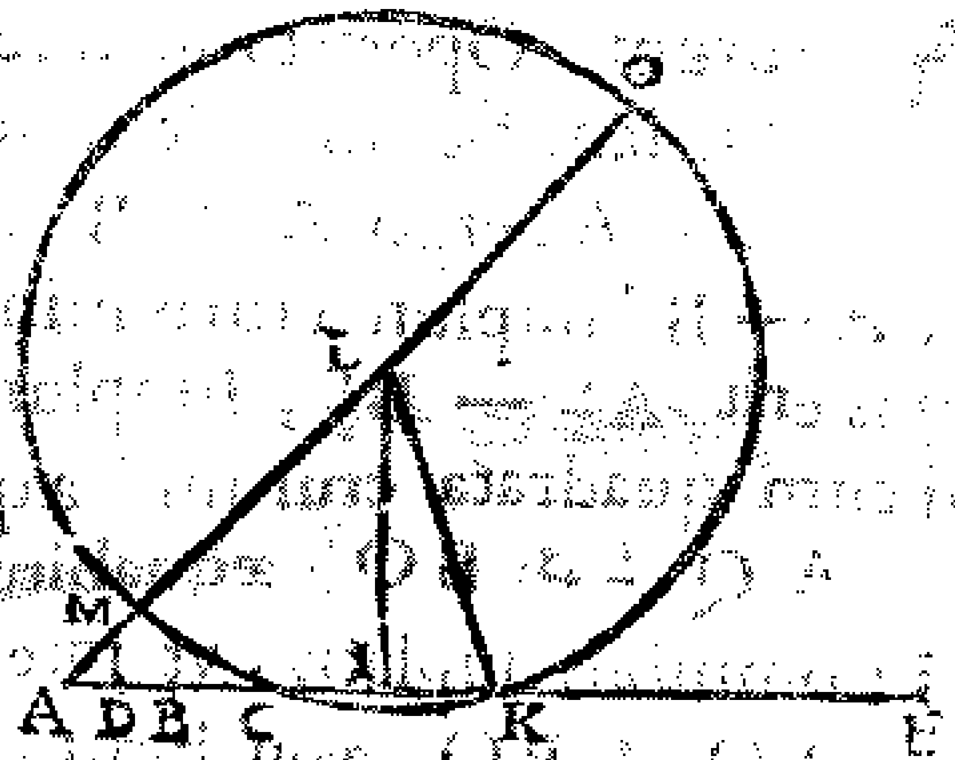


Deter-

Determinatio.

Oportebit, excessum, quo crus maius trianguli superat basim, æqualem esse dimidiæ differentiæ crurum.

Compositio quarti Casus.



Sit data differentia crurum trianguli A B, differentia segmentorum basis A C, quæ sit dupla ipsius A B, & excessus quo crus maius superat basim B D, is debet esse æqualis dimidiæ A B, ex Determinatione. Oportet inuenire triangulum. Producatur A C quantum libuerit in K, & C k secetur bifariam in I ad rectos Angulos à recta I L, in qua ponatur K L æqualis K D, & iungatur A L. Dico, triangulum L A k Problema efficere. Duplicetur enim A K in E, & centro L interuallo L k describatur circulus secans A L in M, ipsamque productam in O. is circulus * transibit per C; cum sint æquales C I, I k, ex constructione. Et quoniam A E dupla est ipsius A K, & A B dupla ipsius A D; erit & reliqua E B dupla reliquæ k D, vel K L, sed & M O dupla est eiusdem K L, ergo M O æqualis erit B E Et quoniam est vt A B ad A C, ita A K ad A E; sunt enim consequentes antecedentium duplæ, & vt A C* ad A M; ita est A O ad A k; erit in perturbata proportione, vt A B ad A M, ita A O ad A E: atque sunt æquales B E, M O, vt est demonstratum, ergo & A M* A B æquales erunt, & cum L k superetur ab A k excessu A D, ex constructione, ab A L vero excessu A B, basis A K superabitur à crure L A, reliquo excessu D B. Atque differentia segmentorum basis A I, I K, est ipsa A C data. Constructum est igitur triangulum L A k, &c. quod faciendum erat.

3. tertij

Theor. 7 huius

theor. 4 huius

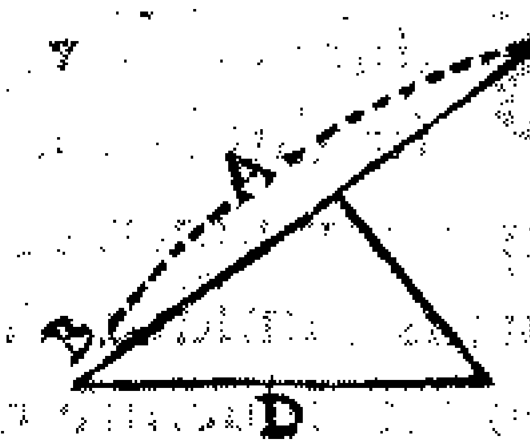
Is Casus, vt dixi in principio Problematis, vix inter Problemata annumerari potest, manentibus enim ijsdem datis, innumera triangula construi possunt, vt ex supradictis patet; basis enim A k fit ad libitum, eaque potest fieri & maior, & minor. requiritur tantum vt datam A C differentiam segmentorum basis excedat. Conuenientior huic Problemati locus erat in primo libro, cum in Resolutionibus omnium eius casuum simplices æquationes existant; sed quoniam pluribus Determinationibus indiget, in eoque libro nulla sit de Determinationibus tractatio, visum fuit illud in hoc secundo libro collocare.

Pro-

Problema VIII.

Data base trianguli, angulum rectum subtendente, & differentia crurum. Inuenire triangulum,

Resolutio.



SIt D data basis trianguli rectanguli, B differentia crurum. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam factum. & trianguli illius aggregatum crurum estò A, ergo A ✢ B * erit duplum cruris maioris, A — B * duplum cruris minoris, vnde simplum crus maius erit $A\frac{1}{2}$ — $B\frac{1}{2}$, simplum crus minus $A\frac{1}{2}$ — $B\frac{1}{2}$

Carol. 1 Probl. 8 Lib. 4

47 Primi Sed cum quadrata crurum * æqualia sint quadrato basis

A Q $\frac{1}{4}$ ✢ B Q $\frac{1}{4}$ æquabitur D Q

Et omnibus duplatis, vt integra fiat Potestas

A Q ✢ B Q æquabitur D Q 2.

Et ablato vtrinque B Q, vt cognita ab incognitis separentur

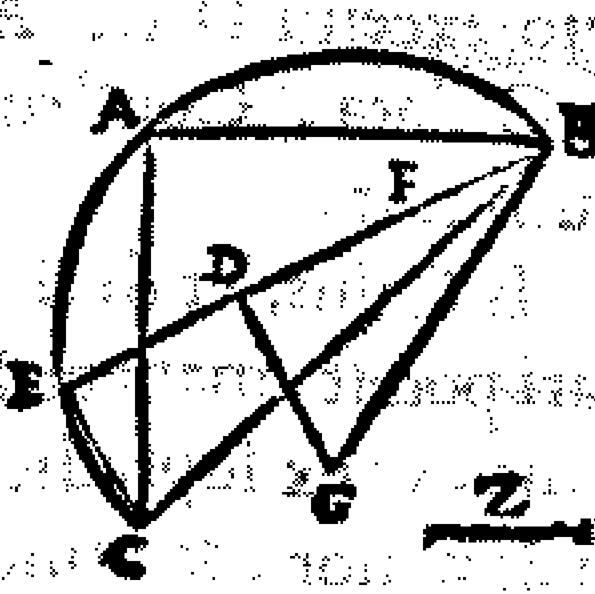
A Q æquabitur D Q 2 — B Q

Porisma:

Duplum quadratum basis subtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato differentiæ crurum æquale est quadrato aggregati crurum.

Datur ergo aggregatum crurum de quo quærebatur.

Compositio.



SIt data basis trianguli angulum rectum subtendens A B, differentia crurum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi A B perpendicularis, & æqualis A C, & iungatur B C. à quadrato igitur B C quod est duplum quadrati A B, debet auferri quadratum Z. sic Porisma iubet, ergo describatur in B C semicirculus, in quo aptetur C E æqualis Z, & iungatur E B, erit angulus C E B rectus in semicirculo, & ob id

47 primi quadratum E B * æquale erit quadrato C B, minus quadrato E C, hoc est æquale erit duplo quadrato A B, minus quadrato Z. Itaque ex præcepto Porismatis aggregatum crurum trianguli construendi debet æquari rectæ E B, ita tamen, vt differentia eorundem crurum æquetur ipsi Z, vt Problema exigit. ergo sumatur in E B recta B F æqualis E C, vel Z; reliqua vero F E secetur bifariam in D à perpendiculari D G æquali ipsi D E, vel D F, & iungatur G B. Composita igitur ex cruribus G D, D B trianguli D G B æqualis est ipsi E B, differentia verò eorundem crurum, hoc est

A est BF æqualis ipsi Z. Itaque constructum est triangulum DGB, quemadmodum Porisma docet. ipsum autem triangulum Problema efficere hoc modo demonstrabitur. Quoniam enim rectus est angulus CEB in semicirculo, quadratum EB æquale erit quadrato CB, minus quadrato EC, hoc est æquale erit duplo quadrati AB, minus quadrato FB, addatur vtrique parti quadratum FB, ablatum enim fuit in Resolutione, ergo quadratum EB vnà cum quadrato FB, hoc est duplum * quadratorum ED, DB, æquale erit duplo quadrati AB; quare & simplum simplo, sed quadrata ED, DB, hoc est GD, DB * æqualia sunt quadrato GB, ergo quadratum GB quadrato AB æquale erit, vnde & recta GB æqualis rectæ AB. Constructum est igitur triangulum DGB rectangulum in D, cuius basis GB æqualis est ipsi AB, & FB differentia crurum GD, DB æqualis ipsi Z, quod faciendum erat.

Theor. 4 primi

47 primi

B

Problema IX.

Data base trianguli angulum rectum subtendente, & aggregato crurum. Inuenire triangulum.

Resolutio.

C Sit D data basis trianguli rectanguli, B aggregatum crurum. Oportet inuenire triangulum. Ponatur iam factum esse, & differentia crurum trianguli esto A, ergo B + A erit duplum cruris maioris, & B -- A duplum cruris minoris. vnde simplum crus maius erit $B\frac{1}{2} + A\frac{1}{2}$: simplum crus minus $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$. horum quadra simul * æqualia sunt quadrato basis, ergo

47 primi

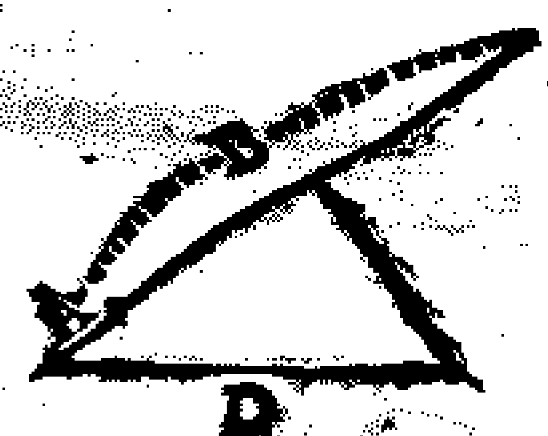
$BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ æquabitur DQ

Et omnibus duplatis, vt Potestas integra fiat

$BQ + AQ$ æquabitur $DQ\,2$

Et ablato vtrinque BQ

AQ æquabitur $DQ\,2 - BQ$



D

Porisma.

Duplum quadratum basis subtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato aggregati crurum, æquale est quadrato differentiæ crurum.

Datur ergo differentia crurum, de qua quærebatur.

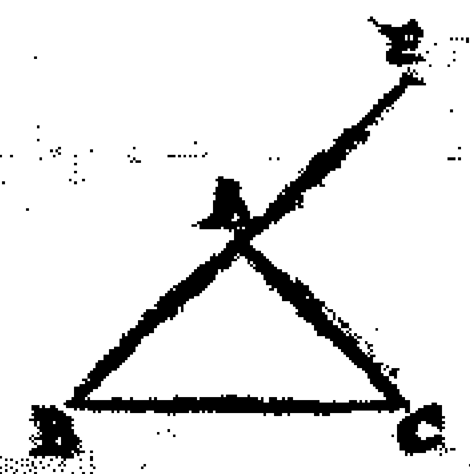
Ex Porismate apparet si crura trianguli sunt inæqualia, duplum quadratum basis, maius esse, quadrato aggregati crurum; si verò sunt æqualia, duplum illud quadratum huic quadrato æquale esse; nam cum sint crura æqualia, nulla est eorum differentia, & consequenter nullum differentiæ quadratum, sed quadratum differentiæ crurum æquale est excessui, quo duplum quadratum basis superat quadratum aggregati crurum; sic Poris-

ma

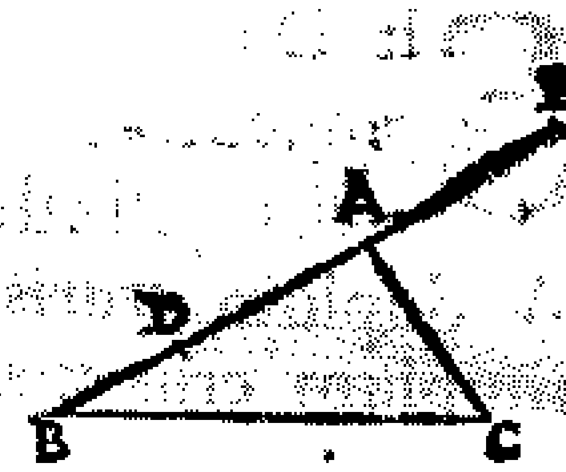
ma indicat, ergo & excessus ille nullus erit; in hoc enim casu nihil nihilo adæquatur. Cum igitur nullus sit excessus inter duplum quadratum basis, & quadratum aggregati crurum, duplum illud quadratum huic quadrato æquale erit secundum Porisma. Hæc omnia demonstranda sunt, vt Problemati ea quam decet determinatio præponatur.

Lemma.

Recta cuius quadratum æquale est duplo quadrato basis subtendentis angulum rectum trianguli, non est minor aggregato crurum.



Sit triangulum ABC rectangulum in A, cuius basis BC. Dico rectam cuius quadratum æquale est duplo quadrato ex BC, non esse minorem composita ex cruribus, BA, AC. Producatur enim BA in E, vt sit AE æqualis AC, & sint primum æqualia crura AB, AC. Quoniam igitur quadratum BC æquale est quadratis BA, AC, hoc est BA, AE duplum quadratum BC æquabitur duplo quadratorum BA, AE, hoc est æquabitur quadrato BE, quare & recta cuius quadratum æquale est duplo quadrato BC, æqualis erit ipsi BE. Non igitur minor.



Deinde sint inæqualia crura AB, AC à maiori ergo quod sit AB, abscindatur AD æqualis AC, vel AE. quadrata igitur BE, BD * æqualia erunt duplo quadratorum BA, AE. hoc est duplo quadrati BC, ergo duplum quadrati BC, maius erit quadrato BE tantum, vnde & recta, cuius quadratum æquale est duplo quadrato BC, maior quam recta BE. quare constat propositum.

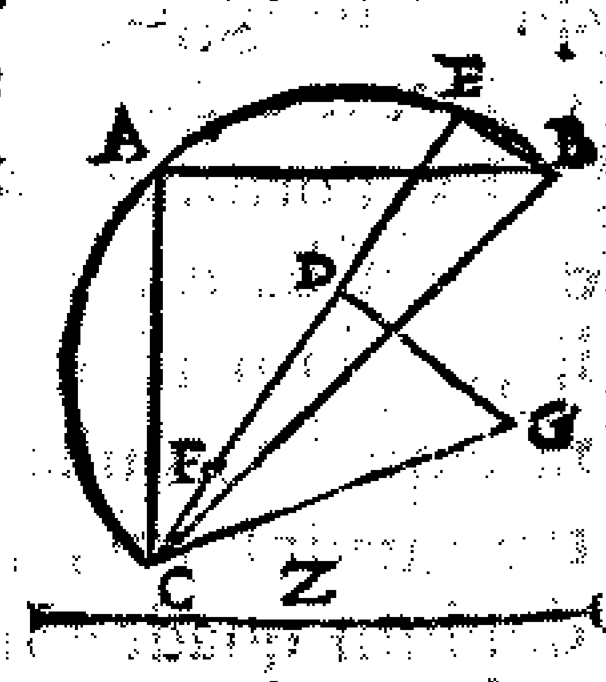
* Theor. 4 primi

Hoc demonstrato, Problema ita determinandum erit.

Determinatio.

Oportebit basim minorem esse aggregato crurum. Rectam autem, cuius quadratum æquale est duplo quadrato basis, non esse minorem.

Compositio.



Sit data basis trianguli angulum rectum subtendens AB; aggregatum crurum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & connectatur CB, à cuius quadrato (est enim duplum quadrati AB) auferendum est quadratum Z; sic Porisma iubet, ergo in BC describatur semicirculus, & in eo aptetur CE æqualis Z; recta enim BC, ex Determinatione, non est minor quam Z; dein-

A de connectatur E B, erit igitur quadratum E B æquale quadrato C B, minus quadrato E C. hoc est æquale erit duplo quadrati A B, minus quadrato Z. Itaque ex præcepto Porismatis differentia crurum trianguli construendi debet æquari rectæ E B. Sumatur igitur in E C recta C F æqualis E B, & F E secetur bifariam in D ad rectos angulos à recta D G æquali ipsi D E, vel D F, & iungatur C G. Differentia igitur crurum C D, D G trianguli C D G, æqualis est ipsi E B, aggregatum verò æquale ipsi C E, hoc est Z. Itaque triangulum C D G constructum est quemadmodum Porisma docet. nunc ostendendum est in eo esse ea quæ Problema requirit. Quoniam enim rectus est angulus C E B in semicirculo; quadratum E B, vel C F æquale erit quadrato C B, minus quadrato
B E C, hoc est æquale erit duplo quadrato A B, minus quadrato E C, addito vtrobique quadrato E C quadratum C F vnà cum quadrato C E. hoc est * duplum quadratorum C D, D E, æquale erit duplo quadrati A B, Theor. 6 primi.
quare & simplum simplo. sed quadrata C D, D E. hoc est C D, D G æqualia sunt quadrato C G, ergo quadratum C G quadrato A B æquale erit. vnde & recta C G basis trianguli C D G æqualis rectæ A B. est autem & composita ex cruribus C D, D G æqualis ipsi C E, hoc est Z datæ, ex constructione. Constructum est igitur triangulum C D G quale construendum proponebatur.

Finis Libri Secundi.

MA

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

LIBER TERTIUS.

De ijs, quæ ad Resolutionem, & Compositionem pertinent, existentibus simplicibus laterum, aut quadratorum æquationibus; superioribus libris satis me dixisse censeo. venio nunc ad explicanda ea, quæ in Resolutionibus, & Compositionibus occurrunt, quando in æquationibus quadrata affectionibus implicantur. Sed prius dicam quomodo huiusmodi æquationes explicentur.

Multi sanè Auctores de explicandis quadratorum affectorum æquationibus scripserunt, ijque omnes præter Diofantum, ac Petrum Nonium, vna eademque Methodo, aut parum distanti vtuntur, quamuis diuersas afferant demonstrationes. Diofantus quidem non curat quadratum æquationis à comite, hoc est à data magnitudine in quam ductum est liberare, vt ex se subsistat, quemadmodum notat Bachetus, sed præcipit duci homogeneum comparationis in eundem Comitē quadrati, & reliqua perfici; vt suo loco dicetur: quo fit vt magnitudines ad plano plana ascendant, ac proinde longiori operatione, & ad Geometricas Compositiones minimè apta æquatio explicetur. Petrus autem Nonius sumit totam coefficientem longitudinem, non autē dimidiam prout communis Methodus docet; sumit quoq; quadruplum homogeneum comparationis, & sic explicata æquatione exhibet duplum latus quæsitum, ex quibus Compositio fit difficilior. hanc Methodum Nonius excogitauit, vt fractiones numerorum vitaret, quæ quoniam in Geometricis locum nō habent, nihil est quod nos cogat ea Methodo vti. Communi igitur Methodo, quæ est simplicissima vtar, eamq. Geometrica ratione demonstrabo, alijs tamen medijs, atque alij scriptores; per hæc enim media commodior à Resolutione ad Compositionē fit regressus, ipsaq. Compositio clarius, ac facilius demonstratur, vt exemplis manifestum fiet.

De

De æquationibus quadratorum affectorum explicandis.

A Tribus modis æquatio ritè ordinata variari poteſt. aut enim quadratū afficitur adiunctione plani, ſub latere & data coefficiéte longitudine; aut afficitur multa ipſius plani, aut denique planum ipſum afficitur multa quadrati. Tres igitur Canones proferam, quibus ratio explicandi æquationes continetur.

De explicanda æquatione, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, & data coefficiente longitudine.

Canon Primus.

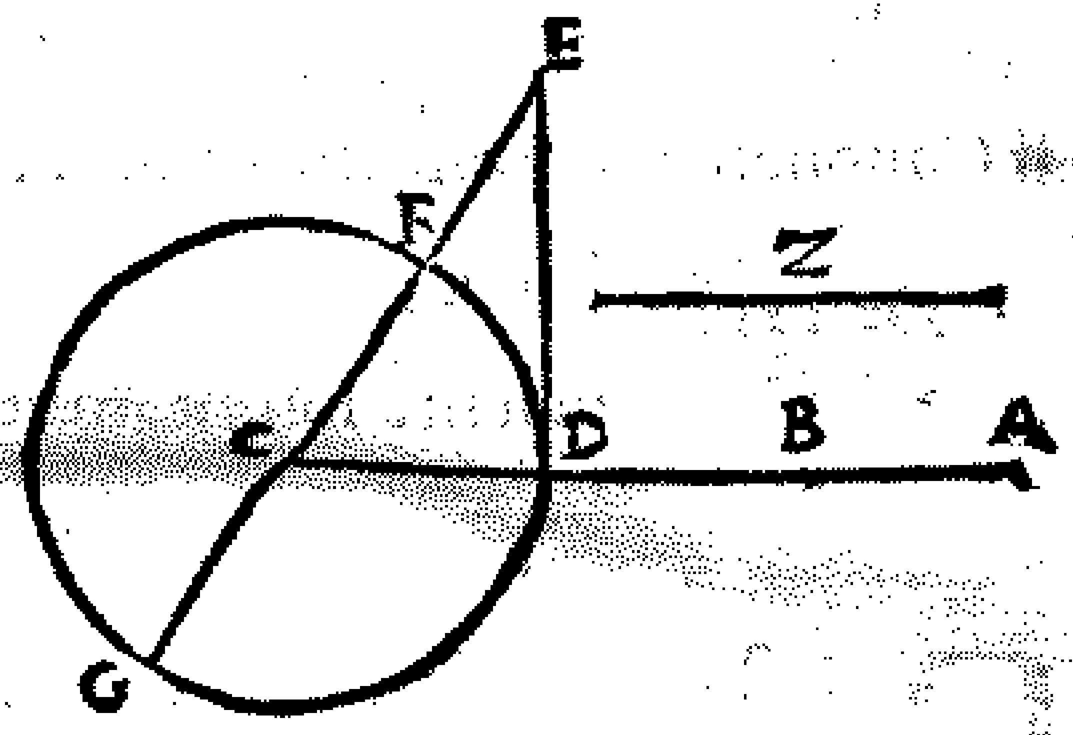
B Rectæ cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ coefficientis datæ, & dato homogeneo comparationis, dematur dimidia coefficiens; reliqua æquabitur lateri quæſito.

Proponatur A Q + B in A æquari Z Q, explicata ſecundum Canonem æquatione.

L.V.(B Q ¼ + Z Q) − B ½ æquabitur A lateri quæſito.

Demonſtratio Canonis primi.

C Sit A B caſus quæſitum, B C, data coefficiens longitudo, & quadratum ex Z datum comparationis homogeneum. Poſitis in directum A B, B C ſecetur B C bifariam in D, & ex D erigatur perpendicularis D E, æqualis vero ipſi Z, & connectatur E C, ex qua abſcindatur C F æqualis C D. Dico reliquam F E æqualem eſſe A B. Deſcribatur enim ex centro C ad interuallum C F, vel C D circulus ſecās E C productam in G, is circulus tanget rectam D E in D. & quoniam quadratum A B vnà cum rectāgulo A B C ponitur æquale quadrato Z: eſt autem* æquale & rectangulo B A C; ideo rectangulū B A C æquale erit quadrato Z, hoc eſt quadrato D F, ſed & rectangulum F E G* æquale eſt quadrato D E. ergo rectangula F E G, B A C æqualia erūt, at iſi ſunt æquales F G, B C, ergo & reliquæ* E F, A B æquales erunt, quod erat oſtendendum. Patet igitur Canonem rectè eſſe inſtitutum.



6 ſecundi *36 tertij* *Theor. 8 ſecunda*

D

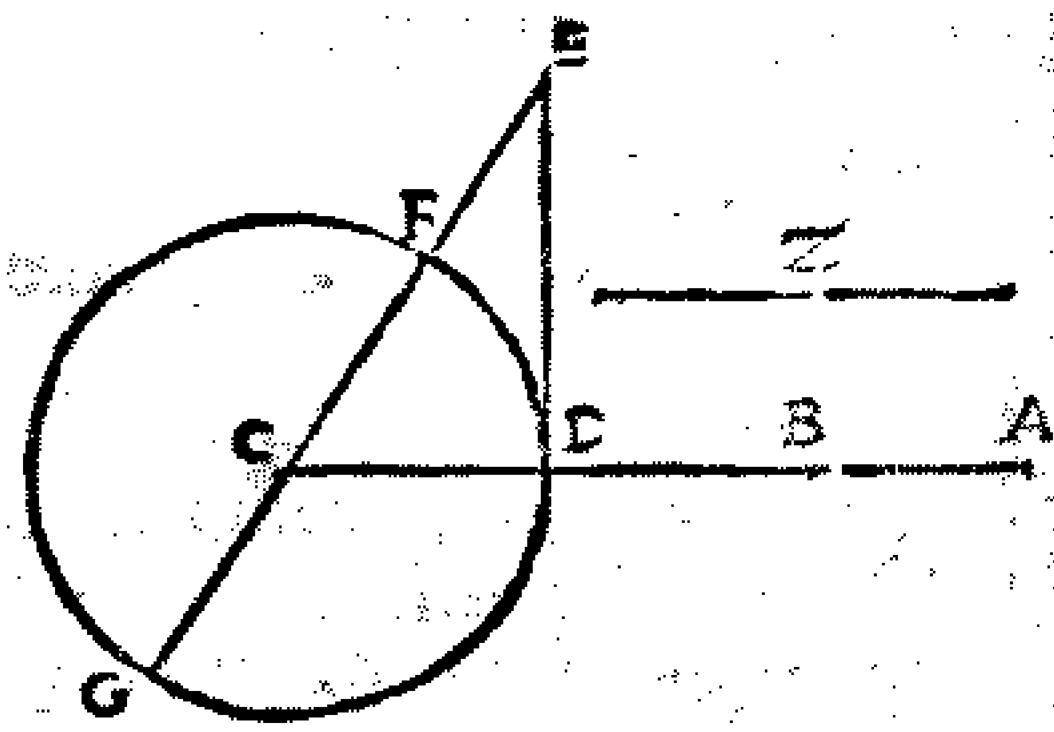
De explicanda æquatione, in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere, & data coefficiente longitudine.

Canon Secundus.

Rectæ cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ coefficientis datæ, & dato homogeneo comparationis, addatur dimidia coefficiens. Cōpoſita æquabitur lateri quæsito. Proponatur A Q -- B in A æquari Z Q. Explicata secundum Canonem æquatione.

L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ ✠ Z Q) ✠ B $\frac{1}{2}$ æquabitur A lateri quæsito.

Demonstratio Canonis secundi.



SIt quadratum ex Z datum comparationis homogeneum, A C latus quæsitum; & quia ponitur A Q -- B in A æquari Z Q erit B coefficiens, minor quàm A, hoc est data coefficiens longitudo, minor erit latere A C.

Sit igitur data coefficiẽs longitudo B C, eaq. secetur bifariã in D, & ex D erigatur perpendicularis D E, & æqualis ipsi Z, & connectatur E C, eaq. producatur in G, vt sit C G æqualis C D. Dico E G æqualem esse A C. Centro enim C interuallo C D, vel C G describatur circulus secans E C in F, is circulus tanget rectam E D in D. Et quoniam quadratum A C, minus rectangulo A C B, ponitur æquari quadrato z; quadratum autem A C, minus rectangulo A C B, æquale est rectangulo C A B, ergo rectangulum C A B æquale erit quadrato z, hoc
3 tertij est quadrato D E, sed & rectangulum G E F * æquale est quadrato D E, ergo rectangula G E F, C A B æqualia erunt, atque sunt æquales F G, B C, ergo &
Theor. 1. secundi * tota E G toti A C æqualis erit, quod erat ostendendum, ex quo manifestum est Canonem rectè esse institutum.

De explicanda æquatione, in qua planum sub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa quadrati.

Canon Tertius.

REcta, cuius quadratũ æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ coefficientis datæ, præstat dato comparationis homogeneo, dempta vel addita dimidiæ coefficienti, reliqua vel composita, latus quæsitũ erit. Proponatur B in A -- A Q æquari z Q. explicata secundũ Canonẽ æquatione.

B $\frac{1}{2}$ -- L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- Z Q) æquabitur A lateri quæsito.

Vel B $\frac{1}{2}$ ✠ L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- z Q) æquabitur A lateri quæsito.

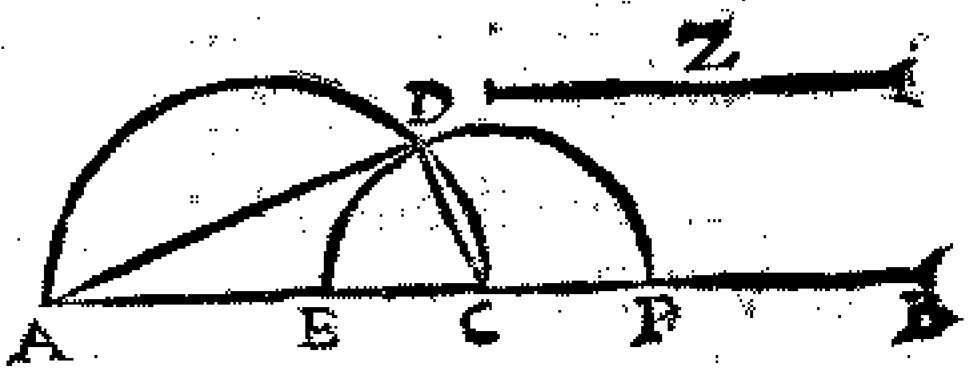
Antequam demonstratio Canonis fiat, ostendendũ est, rectũ cuius quadratũ æquale est dato comparationis homogeneo nõ esse maiorẽ dimidia coefficiẽte. Proponatur B in A -- A Q æquari Z Q Dico z non esse maiorem dimidia B.

Reuocetur enim ad proportionem æqualitas, erunt tres proportionales B -- A, z, A; sed dupla media non est maior, quàm composita ex extremis; composita autem ex extremis est B, ergo dupla z, non erit maior ipsa B, nec simpla z maior dimidia B, quod erat ostendendum.

Demon-

A

Demonſtratio Canonis tertij.



SIt quadratum ex Z datum comparationis homogeneum, A B data coefficiens longitudo, quæ ſecetur bifariam in C, erit Z non maior quam A C, vt proximè demonſtrauimus. in ipſa igitur A C deſcribatur ſemicirculus & in eo accommodetur A D æqualis Z, & iungatur D C. angulus igitur A D C in ſemicirculo rectus erit, quare quadratum A C * æquale erit quadratis A D, D C, vnde quadratum D C erit exceſſus, quo quadratum A C, dimidiæ videlicet coefficiẽtis præſtat quadrato A D, hoc eſt qua- 47 primi
B drato Z, quod eſt datum homogeneum comparationis. Centro igitur C interuallo C D deſcribatur circulus ſecans rectam A B hinc inde in punctis E F. Dico latus de quo quæritur, minus quidem eſſe A E, maius autem A F, hoc eſt rectangulum B A E, minus quadrato A E, æquari quadrato Z, & rurſus rectangulum B A F, minus quadrato A F, æquari eidem quadrato Z, in huiuſmodi enim æquationibus latus quæſitum de duplici termino explicabile eſt. Quoniam igitur A D tangit circulum E D F in D, cum ſit rectus angulus A D C rectangulum F A E* æquale erit quadrato A D, vel qua- 36 tertij
drato z, ſed rectangulum F A E, hoc eſt B E A, æquale eſt rectangulo B A E, minus quadrato A E, ergo rectangulum B A E, minus quadrato A E, æquale erit quadrato z, atque adeo latus quæſitum erit A E, quod eſto
C primum.

Rurſus quoniam rectangulum E A F æquale eſt quadrato A D, hoc eſt quadrato z; ipſum autem rectangulũ E A F hoc eſt B F A, æquale eſt rectangulo B A F, minus quadrato A F, ergo rectangulum B A F, minus quadrato A F, æquabitur quadrato z, itaq; latus quæſitum erit A F, quod ſecũdo loco erat oſtendendum. ex his igitur manifeſtum eſt Canonem rectè eſſe inſtitutum.

Diophantus autem in explicandis quadratorum affectorum æquationibus hac vtitur Methodo.

Canon explicandi æquationem in qua quadratum afficitur affirmatè.

D

DAtum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & producto addatur quadratum dimidij coefficientis, & à radice quadrata aggregati auferatur dimidium coefficientis; reliquum vero applicetur ad comitem quadrati, & proueniet latus quæſitum.

Proponatur A Q in D + B in D in A æquari z Q in D, & explicentur æquatio ſecundum Canonem, ergo L. V. (z Q in D Q + $\frac{\text{B Q in D Q}}{4}$) -- $\frac{\text{B in D}}{2}$ æquabitur A lateri quæſito.
D

Longa quidem operatione, & ad Geometricas Compoſitiones inutili explicata eſt hæc æquatio, per ipſam enim operationem magnitudines ad plano plana ascẽdentes, geometriæ terminos trãscendunt; vtraque tamen Methodus, tam Diophantea, quàm cõmunis eodẽ recidunt; nam L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ + BQ \text{ in } DQ}{D}\,\frac{1}{4}$) idem est quod L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ + BQ \text{ in } DQ}{L.\ DQ}\,\frac{1}{4}$) seu quod L. V. ($ZQ + BQ\,\frac{1}{4}$) similiter $\frac{B \text{ in } D}{D}\,\frac{1}{2}$ idem est quod $B\,\frac{1}{2}$. igitur L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ + BQ \text{ in } DQ}{D}\,\frac{1}{4}$) $- \frac{B \text{ in } D}{D}\,\frac{1}{2}$ idem est quod L. V. ($ZQ + BQ\,\frac{1}{4}$) $- B\,\frac{1}{2}$, cui quoque (æquatione communi Methodo explicata) æquatur A.

Repetatur enim eadem æquatio, quæ supra; hoc est AQ in D + B in D in A, æquetur ZQ in D. hæc æquatio non potest dici ritè ordinata, donec AQ liberetur à comite D, ergo applicentur omnia ad D. igitur AQ + B in A æquabitur ZQ, & explicata communi Methodo æquatione L. V. ($ZQ + BQ\,\frac{1}{iv}$) $- B\,\frac{1}{ij}$, æquabitur A. Siue igitur Methodo Diophantea, siue communi æquatio explicetur, opus eodem recidit, sed Diophantea quidem Methodus longa est, & Geometricis compositionibus inutilis; communis autem breuis, & commoda, idem intelligendum est de reliquis duobus, quæ sequentur æquationibus, & ne eadem repetantur, hæc dixisse sufficiat.

Canon explicandi æquationem in qua quadratum efficitur negatè.

Datum comparationis homogeneum ducatur in Comitem quadrati, & producto addatur quadratum dimidij coefficientis, & radici quadratæ aggregati, addatur dimidium coefficientis, idque compositum applicetur ad Comitem quadrati, & proueniet latus quæsitum.

Proponatur AQ in D − B in D in A, æquari ZQ in D; explicata secundum Canonem æquatione.

L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ}{D} + \frac{BQ \text{ in } DQ}{D}\,\frac{1}{iv}$) $+ \frac{B \text{ in } D}{D}\,\frac{1}{2}$ æquabitur A

Hoc est L. V. ($zQ + BQ\,\frac{1}{4}$) $+ B\,\frac{1}{2}$. æquabitur A

Eadem enim ratione, qua sub antecedenti canone ostendemus.

L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ}{D} + \frac{BQ \text{ in } DQ}{D}\,\frac{1}{4}$) $+ \frac{B \text{ in } D}{D}\,\frac{1}{2}$ idem esse quod L. V. ($zQ + BQ\,\frac{1}{iv}$) $+ B\,\frac{1}{2}$.

Canon explicandi æquationem, in qua quadratum negatur de afficiente homogeneo.

Datum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & productum auferatur à quadrato dimidij coefficientis, residui radix quadrata addatur, vel dematur dimidio coefficienti, summa vel residuum applicetur ad comitem quadrati, & proueniet latus quæsitum.

Proponatur B in D in A − AQ in D æquari zQ in D explicata secundum canonem æquatione.

$\frac{B \text{ in } D}{D}\,\frac{1}{2}$ + L. V. ($\frac{BQ \text{ in } DQ}{D}\,\frac{1}{iv} - \frac{ZQ \text{ in } DQ}{D}$) æquabitur A

Vel $\frac{B \text{ in } D}{D}\,\frac{1}{2}$ − L. V. ($\frac{BQ \text{ in } DQ}{D}\,\frac{1}{iv} - ZQ \text{ in } DQ$) æquabitur A

Atque hæc de æquationibus quadratorum affectorũ explicandis dicta sufficiãt.

Pro-

A

Problema I.

Dato vno ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataq. differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum.

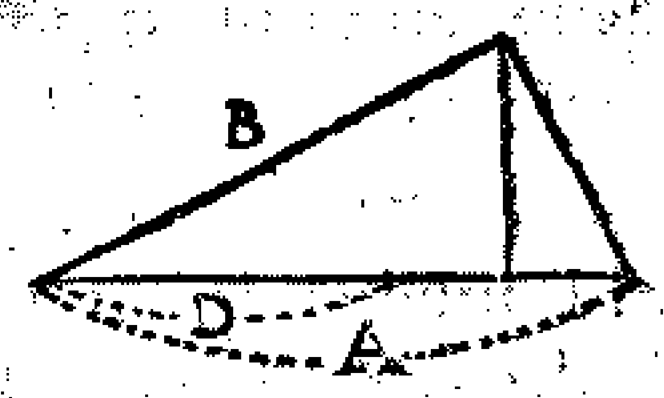
HOc Problema duos Caſus habet, aut enim datur crus maius, aut crus minus. Primo Caſu oportebit differentiam ſegmentorum baſis minorem eſſe crure, ſiquidem crus maius toto maiore ſegmento maius eſt; ſecundus Caſus Determinatione non indiget.

Reſolutio primi Caſus.

B

SIt datum crus maius trianguli rectanguli B, differentia ſegmentorum baſis D. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam factum, & baſis trianguli eſto A, ergo A + D erit * duplum ſegmenti maioris, & quoniam crus maius trianguli rectanguli medium eſt * proportionale inter baſim, & ſegmentum maius, rectangulum ſub baſe, & ſegmento maiori * æquale erit quadrato cruris maioris, & conſequenter rectangulum ſub baſe, & duplo ſegmento maiori æquabitur duplo quadrato cruris maioris, hoc eſt Corol. 2 Prob. 2 primi Corol. Prop. 8 sexti 17 sexti



A Q + D in A æquabitur B Q 2

C Et explicata ſecundum primum Canonem æquatione.

L. V. (B Q 2 + D Q $\frac{1}{4}$) -- D $\frac{1}{2}$ æquabitur A

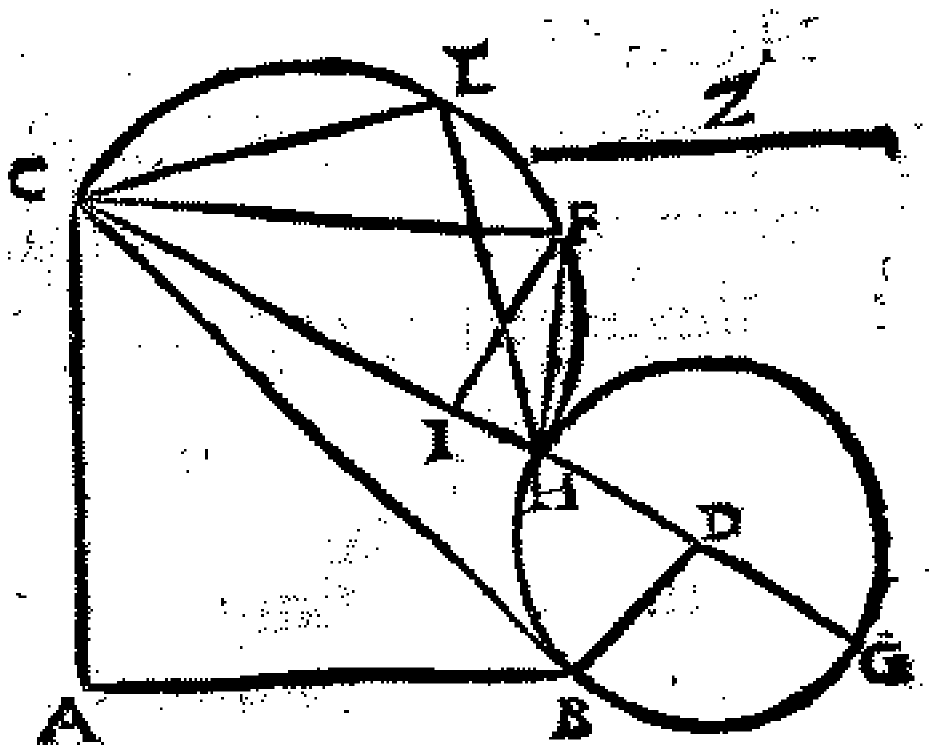
Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato cruris maioris trianguli rectanguli, vna cum quadrato dimidiæ differentiæ ſegmentorum baſis, contracta eadem dimidia differentia æqualis eſt baſi trianguli.

Datur ergo quæſita baſis trianguli.

Compoſitio primi Caſus.

D SIt datum crus maius trianguli rectanguli A B, data autem differentia ſegmentorum baſis Z. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, A C æquales, & connectatur C B, cui perpendicularis ducatur B D, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque C D: eius quadratũ æquale erit quadratis C B, B D, hoc eſt duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z. ab ipſa igitur C D auferenda eſt recta æqualis dimidiæ Z, reliqua verò ſumenda pro



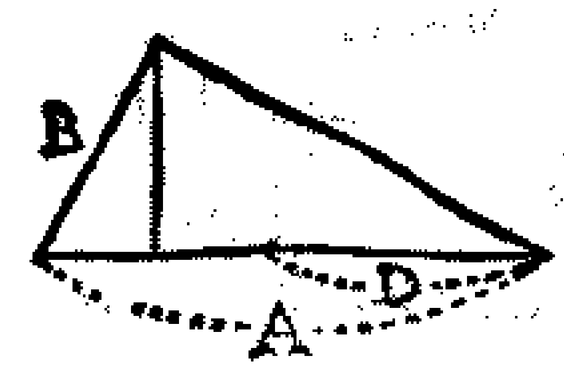
base trianguli construendi. sic habetur ex Porismate. centro igitur D inter- A
uallo D B describatur circulus secans C D in H. deinde in C H, describatur semicirculus, in quo accommodetur C F æqualis ab ipsa autem A B minor est, quàm C H, vt ostendetur infra. denique iuncta F H factum erit triangulum C F H, vt Porisma docet. à recta enim C D, cuius quadratum æquale est quadratis C B, B D. hoc est duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z ablata est D H æqualis dimidiæ Z, & reliqua C H basis est trianguli C F H. Nunc ostendendum est in eo triangulo esse ea, quæ Problema requirit.

Ducatur enim F I ad basim C H perpendicularis, & producatur C D
vsque ad circumferentiam circuli in G. Quoniam igitur in semicirculo est angulus C F H trianguli C F H, is est rectus, & crus F C æquale est A B
datæ, ex constructione, ipsumque crus maius esse crure F H manifestum B
est, nam secta bifariam circumferentia semicirculi CFH in L, & iuncta
47 Primi H L, quadratum C H* æquale erit duplo quadrati H L, sed quadratum C H (cum sit minus quadrato C B, est enim recta C H minor, quàm recta C B) minus est duplo quadrato A B, ergo duplum quadratum A B, maius erit duplo quadrato H L; quare & simplum maius simplo, vnde & recta A B, hoc est F C, maior quam recta H L, & consequenter multo maior, quàm F H superest igitur vt differentia segmentorum C I, I H ostendatur æqualis datæ Z. id per resolutionis regressum ita fit manifestum.

Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum sit rectus angulus C B D, ex constructione, rectangulum H C G æquale erit quadrato
C B, hoc est duplo quadrati A B, seu quod idem est duplo quadrati C F, C
Corol. 8. sexti sed cum sit C F* media proportionalis inter H C, C I, rectangulum sub H C, C I æquale est quadrato C F, & consequenter rectangulum sub H C, & dupla C I æquale duplo quadrati C F, ergo rectangulum H C G æquale erit rectangulo sub H C, & C I dupla; quare C G dupla erit ipsius C I, ac proinde æquales erunt C I, I G; atque adeo differentia segmentorum C I, I H erit H G quæ æqualis est Z datæ ex constructione. Constructum est igitur triangulum F C H quale construendum proponebatur. At verò rectam A B minorem esse, quàm C H manifestum est, si enim non est minor, erit tota C G minor, quàm A B dupla, quia H G, hoc est Z, minor est, quàm A B ex determinatione Problematis. Itaque rectangu-
lum H C G minus erit, rectangulo sub A B, & altera ipsius dupla, hoc est D
duplo quadrati A B, sed duplum quadrati A B æquale est quadrato C B, ergo rectangulum H C G, minus erit quadrato C B, sed hoc est falsum;
36 tertij sunt* enim æqualia, ergo A B minor est, quàm C H quod ostendisse oportuit.

Resolutio secundi Casus.

SIt datum crus minus trianguli rectanguli B, differentia segmentorum basis D, & oporteat inuenire triangulum.



Basis trianguli estò A, ergo A -- D erit* duplum seg-

A segmenti minoris, & quoniam crus minus trianguli * rectanguli medium est proportionale inter basim, & segmentum minus, rectangulum sub base, & segmento minore æquale erit quadrato cruris minoris, & consequenter rectangulum sub base, & duplo segmenti minoris, æquabitur duplo quadrato cruris minoris, hoc est

Corol. 1. Probl. 1 lib. 1.
Corol. propos. 8. sexti

A Q -- D in A æquabitur B Q 2

Et explicata iuxta secundum Canonem æquatione.

L. V. (B Q 2 + D Q $\frac{1}{4}$) + D $\frac{1}{2}$ æquabitur A

Porisma.

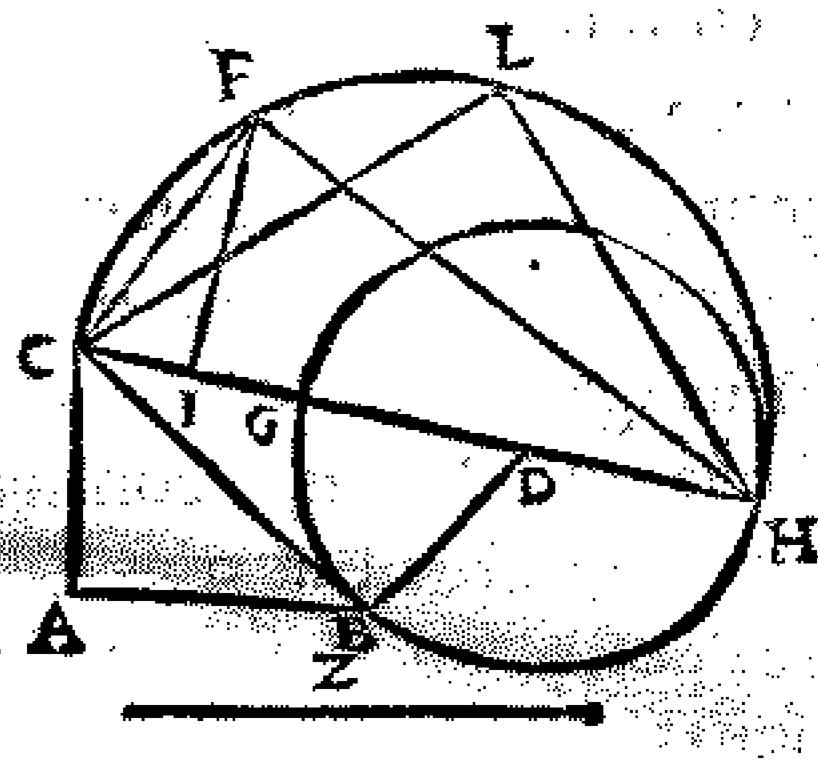
B Recta cuius quadratum æquale est duplo quadrato cruris minoris trianguli rectanguli, vna cum quadrato dimidiæ differentiæ segmentorum basis, protracta longitudine eiusdem dimidiæ differentiæ, æqualis est basi trianguli.

Datur ergo basi trianguli quæsita.

Compositio secundi casus.

SIt datum crus minus trianguli rectanguli A B, data differentia segmẽtorum basis Z, & oporteat inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, A C æquales, & connectatur C B, cui perpendicularis ducatur B D æqualis dimidiæ Z, & connectatur

C quoque C D, eius igitur quadratum æquale est quadratis C B, B D, hoc est duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z, ergo ipsa C D continuanda est longitudine dimidiæ Z, eaque sic continuata fieri debet basis trianguli construendi. sic Porisma docet. Centro igitur D interuallo D B describatur circulus secans C D in G, eandemque continuatam in H, & in C H semicirculus describatur, in quo accommodetur C F æqualis A B, & iungatur F H triangulum igitur



F C H constructum est, vt Porisma docet, recta enim C D, cuius quadra-
D tum æquale est quadratis C B, B D, hoc est duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z protracta longitudine D H, æqualis dimidiæ Z basis est trianguli F C H. Nunc ostendendum est in eo triangulo esse ea, quæ requiruntur.

Angulus C F H cum sit in semicirculo rectus est, & crus F C æquale est A B datæ, ex constructione, ipsumque crus minus esse crure F H, manifestum est, nam secta bifariam circumferentia semicirculi G F H in L, & iuncta H L quadratum C H * æquale erit duplo quadrati H L; sed quadratum C H (cum sit maius quadrato C B, est enim & recta C H maior, quàm recta C B) maius est duplo quadrati A B minus erit duplo quadrati H L; 47 primi

H L; quare & simplum minus simplo; vnde & recta A B hoc est F C, minor quam recta H L, & consequenter multo minor, quàm FH, hæc omnia ex constructione patent: differentiam vero segmentorum basis, æqualem esse Z datæ per repetitionem vestigiorum Resolutionis demonstrabitur hoc modo. A

Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum sit rectus angulus C B D, ex constructione, rectangulum H C G æquale erit quadrato C B, hoc est duplo quadrati A B; seu quod idem est duplo quadrati C F; sed cum sit C F * media proportionalis inter H C, C I, rectangulum sub H C, C I æquale est quadrato C F, & consequenter rectangulum sub H C, & dupla C I, æquale duplo quadrati C F; ergo rectangulum H C G, æquale erit rectangulo sub H C, & C I dupla quare C G dupla erit ipsius C I, ac proinde æquales erunt C I, I G atque adeo differentia segmentorum C I, I H erit H G quæ æqualis est Z datæ, ex constructione; Constructum est igitur triangulum C F H &c. quod faciendum erat. B

*Corol. Prop. 8 sexti

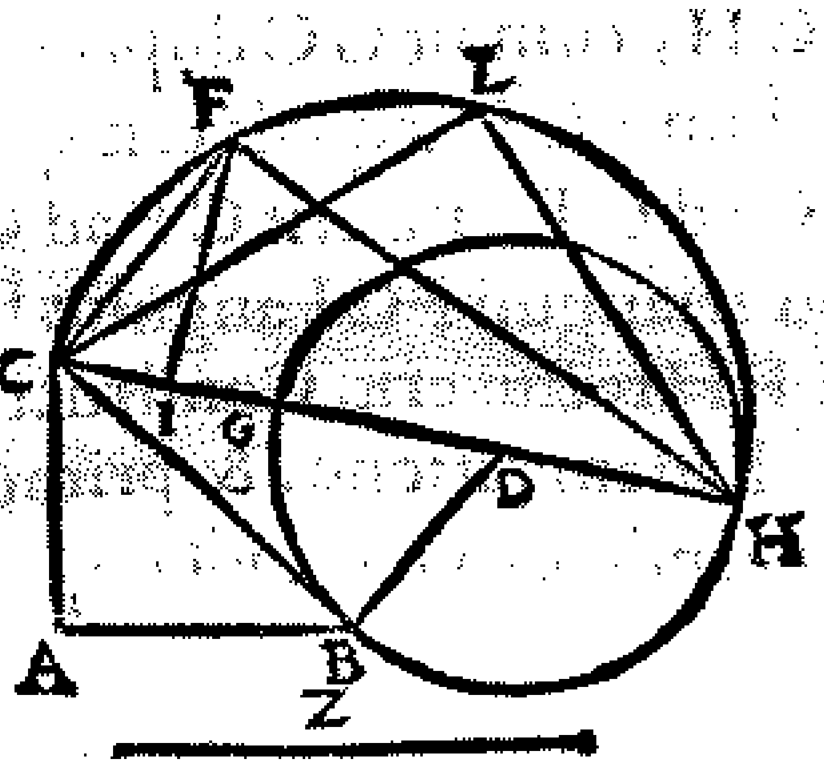
Scholium:

Omne Problema tot admittit Compositiones, ex vna eademque Resolutione pendentes, quot in eo conditiones requiruntur. componitur enim Problema vt ex sola constructione appareant conditiones Problematis omnes adimpletæ, præter vnam quæ postea per repetitionem vestigiorum resolutionis adimpleta ostenditur. Nam disponuntur in constructione Problematis omnia data excepto vno, secundum Porismatis ordinationem: disponitur similiter cum ijsdem datis etiam quæsitum tamquam datum; quoniam & ipsum datum est ex Porismate; quæ quidem sic disposita alia demonstratione non egent, cum ex constructione pateant. illud autem quod excipitur quoniam ex constructione non patet, per regressum Resolutionis demonstratur. Huius igitur Problematis, cum in eo tres conditiones requirantur, nempè vt triangulum quod construendum proponitur sit rectangulum, deinde vt alterum ex cruribus quæ sunt circa angulum rectum sit æquale datæ rectæ lineæ; postremo vt differentia segmentorum basis æquetur alteri datæ, tripliciter potest variari compositio ex vna, eademque resolutione pendens, aut enim excipitur data differentia segmentorum basis, aut crus datum, aut datus verticis angulus, qui est rectus. In antecedente compositione excepta est differentia segmentorum basis, constructum est enim triangulum ex crure, & angulo recto quæ data sunt, & ex base, vt data, quoniam reuersa & ipsa data est ex Porismate; ipsumque crus æquari cruri dato, & angulum verticis esse rectum, manifestum est ex constructione; differentiam vero segmentorum basis æqualem esse datæ differentiæ, ostensum est per repetitionem vestigiorum Resolutionis. Nunc in hac quæ sequitur secunda Compositione secundi Casus excipiam crus datum, atque ex differentia segmentorum basis, & angulo recto, & base iam per Resolutionem inuenta, construam triangulum iuxta rationem Porismatis, cuius trianguli crus æquale esse cruri dato retrograda Resolutionis via ostendetur; cætera vero ex constructione perspi- C D

spi-

A ſpicua erunt. in tertia denique compoſitione excipiam angulum rectum, & ex differentia ſegmentorum baſis, & crure, & baſe inuenta, triangulum componam, ſecundum præceptum Poriſmatis, cuius trianguli angulum verticis rectum eſſe, per Reſolutionis regreſſum demonſtrabo, reliqua ex conſtructione patebunt.

Secunda compoſitio ſecundi caſus.



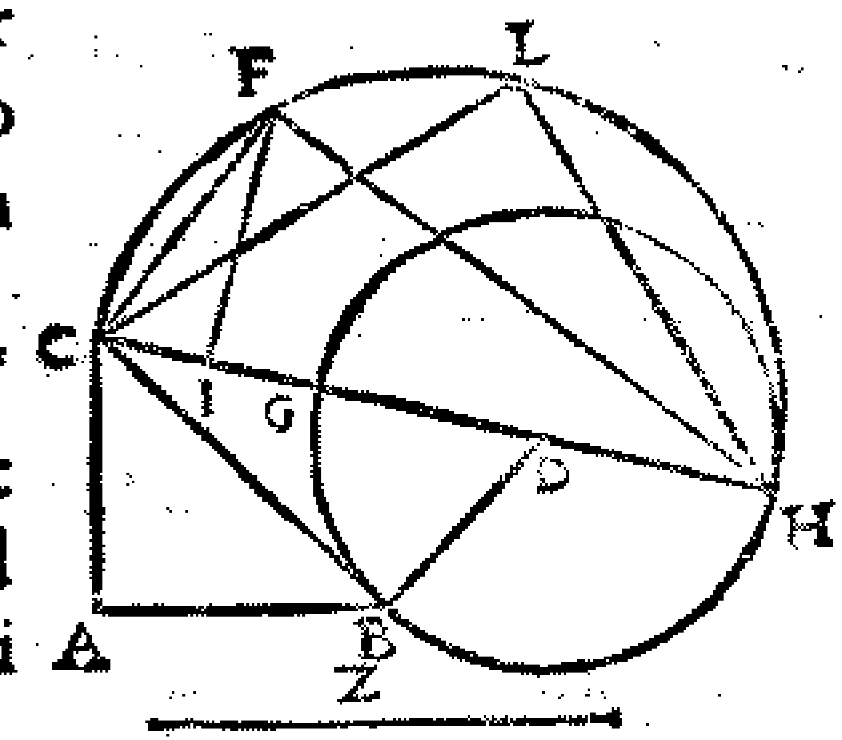
SIt igitur datum crus minus trianguli rectanguli A B. data differentia ſegmentorum baſis Z. & oporteat inuenire triangulum. in-
B clinatis, vt prius ad angulos rectos A B, A C æqualibus connectatur C B, eique perpendicularis ducatur B D æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque C D, & centro D interuallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in G, continuatam vero in H, & circa diametrum C H, alius circulus deſcribatur (hactenus eadem conſtructio, quæ in antecedenti compoſitione) deinde ſecetur C G bifariam in I à perpendiculari I F ducta vſque ad circumferentiã circuli, & iungantur C F, F H: Trianguli igitur F C H angulus G F H, cum ſit in ſemicirculo rectus eſt, & G H differentia ſegmentorum C I, I H æqualis eſt datæ Z hæc
C omnia ita ſe habent ex conſtructione; crus autem F C æquari ipſi A B, regreſſu reſolutionis demonſtrabitur hoc modo.

Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum ſit rectus angulus C B D, rectangulum G C H æquale erit quadrato C B, hoc eſt duplo quadrati A B, ſed cum ſit C F * media proportionalis inter H C, C I, rectangulum I C H æquale eſt quadrato C F, & conſequenter rectangulum G C H æquale duplo quadrati C F; eſt enim C G dupla ipſius C I, ergo quadratum C F, æquale erit quadrato A B: vnde & recta F C æqualis rectæ A B. Conſtructum eſt igitur triangulum F C H, &c. quod faciendum erat. Corol. 8. ſexti

Tertia Compoſitio ſecundi Caſus.

D

IIſdem datis inclinentur vt prius ad angulos rectos A B, A C æquales & connectatur C B, eique perpendicularis agatur B D, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque C D, & centro D interuallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in G, eamque continuatam in H (hactenus præcedens compoſitio) deinde ſecetur C G bifariam in I ad rectos angulos à recta I F indefinita, in qua ponatur C F æqualis C A; eſt autem C A maior, quàm C I, nam cum ipſa C A maior ſit quàm dimidia C B ea multo maior erit quàm dimidia C G, hoc eſt quàm C I denique connectatur F H. in triangulo igitur F C H crus F C æquale eſt C A, hoc eſt A B datæ, ex conſtructione, ſimimiliter & G H differentia segmentorum C I, I H æqualis datæ Z, ex constructione; superest igitur vt angulus C F H sit rectus; id autem repetendo resolutionis vestigia ita fit manifestum. Quoniam enim est rectus angulus C B D, recta C B tanget circulum in B, ac proinde rectãgulum G C H* æquale erit quadrato C B, hoc est duplum erit quadrati A B, seu quod idem est quadrati C F, sed idem rectangulum G C H duplum est rectanguli I C H, cum sit G C dupla ipsius C I; ergo rectangulum I C H æquale erit quadrato C F vt* igitur I C ad C F, ita erit C F ad C H; quare* similia erunt triangula F C I, F C H sed trianguli F C I angulus F I C rectus est, ergo & trianguli F C H angulus C F H rectus erit. Constructum est igitur triangulũ F C H, vt facere oportebat.



36 tertij

17 sexti

6 sexti

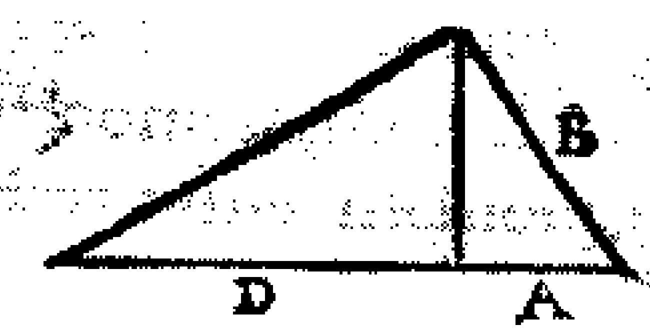
Eadem ratione. & primus Problematis Casus tripliciter cõponi poterat deducendo ex vna, eademque resolutione Compositiones.

Problema II.

Dato vno ex cruribus trianguli, angulum rectum ambientibus, datoque alterno basis segmento. inuenire triangulum.

Resolutio.

Sit datum vnum ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus B alternum autem basis segmentum D. oportet inuenire triangulum. Factum sit hoc, & alterum segmentũ basis de quo quæratur estò A. Quoniam autem crus B medium* proportionale est inter basim trianguli, & segmentum A, ergo proportionales erunt.



Corol. 8 sexti

D ✠ A B A

17 sexti

Quod autem fit sub extremis,* æquale est mediæ quadrato, ergo

D in A ✠ A Q æquabitur B Q

Et explicata æquatione

L. V. (B Q ✠ D Q $\frac{1}{4}$) — D $\frac{1}{2}$ æquabitur A

Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato vnius crurum trianguli angulum rectum ambientium, vna cum quadrato dimidij alterni segmenti basis, contracta dimidio eiusdem segmenti, æqualis est alteri segmento.

Datur ergo alterum segmentum de quo quærebatur.

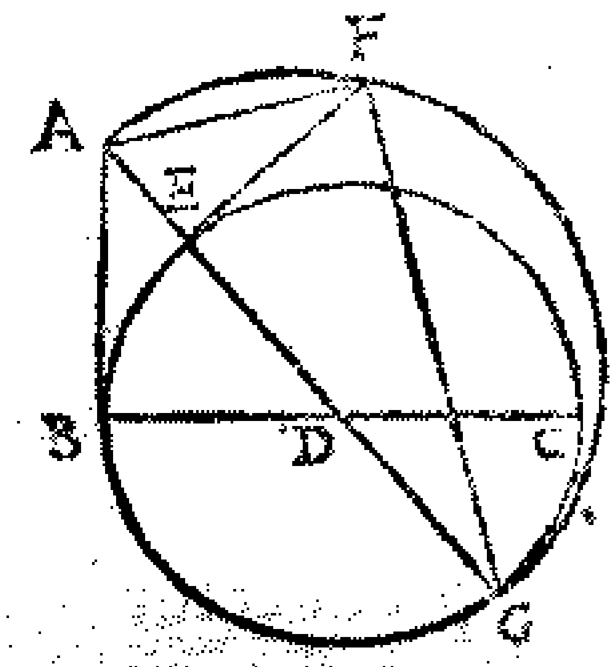
Atque hoc Problema cum in eo tres conditiones requirantur triplici via componi potest deducendo ab vna eademque resolutione compositiones.

Com-

A

Compositio Prima.

Sit datum vnum ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus A B segmentum autem basis alternum B C. Oportet inuenire triangulum. inclinentur ad rectos angulos A B, B C, & secetur BC bifariã in D, & iungatur A D. Quadratum igitur A D æquale est quadratis A B, B D, cruris videlicet, & dimidij segmenti. Itaque ab ipsa A D debet auferri recta æqualis B D. sic Porisma docet. Centro igitur D, interuallo D B; vel D C describatur circulus secans A D in E, productam autem in G, reliqua igitur A E debet æquari alteri segmento basis, vt Porisma indicat. Sed E G, cum sit æqualis dato segmento BC, tota A G fieri debet basis trianguli construendi. In ipsa igitur A G describatur semicirculus A F G, & ducatur perpendicularis E F vsque ad circumferentiam, & iungantur A F, F G. Triangulum igitur A F G constitutum est, quemadmodum Porisma iubet; à recta enim A D cuius quadratum æquale est quadratis A B, B D cruris videlicet, & dimidij segmenti alterni; ablata est D E æqualis ipsi B D dimidio segmenti, & ex reliqua A E factum est alterum segmentum basis, vt Porisma docet. Ipsum autem triangulum A F G esse quale Problema exigit, sic demonstrabitur.



B

Angulus enim A F G, cum sit in semicirculo, rectus est, & basis segmentum E G, æquale est datæ B C ex constructione. crus autem A F æquale esse A B datæ per repetitionem vestigiorum resolutionis; ita ostendetur. Quoniam enim rectangulum G A E * æquale est quadrato A B, recta enim A B tangit circulum; erunt tres * proportionales G A, A B, A E; quarum media erit A B, sed inter easdem G A, A E est quoque * media proportionalis A F: ergo A F æqualis est A B, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum A F G, &c. quod faciendum erat.

C

16 tertij

17 sexti

Corol. 8 sexti

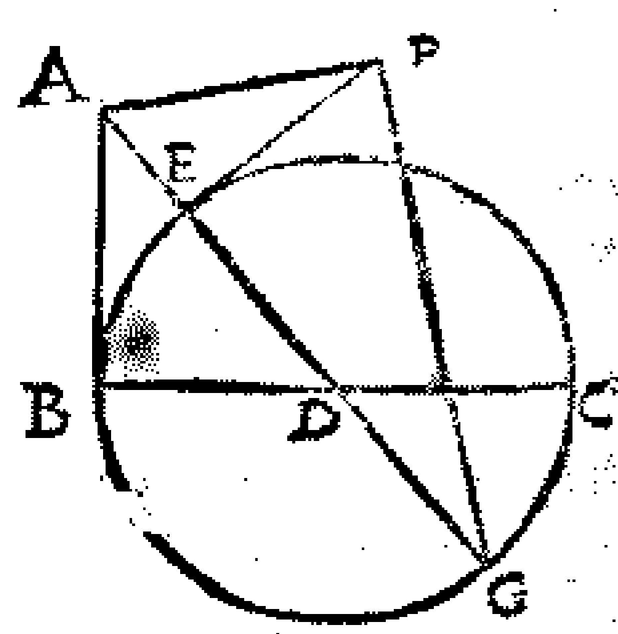
Compositio Secunda.

In præcedenti compositione exceptum est crus datum, ex dato enim basis alterno segmento, & angulo recto, & ex reliquo basis segmento quod per resolutionem inuentum est, constructum est triangulum, secundum præceptum Porismatis. in hac secunda Compositione constituam ipsum triangulum ex dato crure, & angulo recto, & ex segmento per resolutionem inuento alternum autem basis segmentum æquari segmento dato, per regressum resolutionis demonstrabo.

D

Sint igitur eadem data, & inclinentur ad angulos rectos A B, B C & secta B C bifariam in D iungatur A D, & centro D interuallo DB, vel DC, describatur circulus, quem A D secet in E, ipsi autem A D ducatur perpendicularis E F indefinita, in qua ponatur A F æqualis ipsi A B, & ex F ducatur ipsi A F perpendicularis F G occurrens A D productæ in G. In triangulo igitur

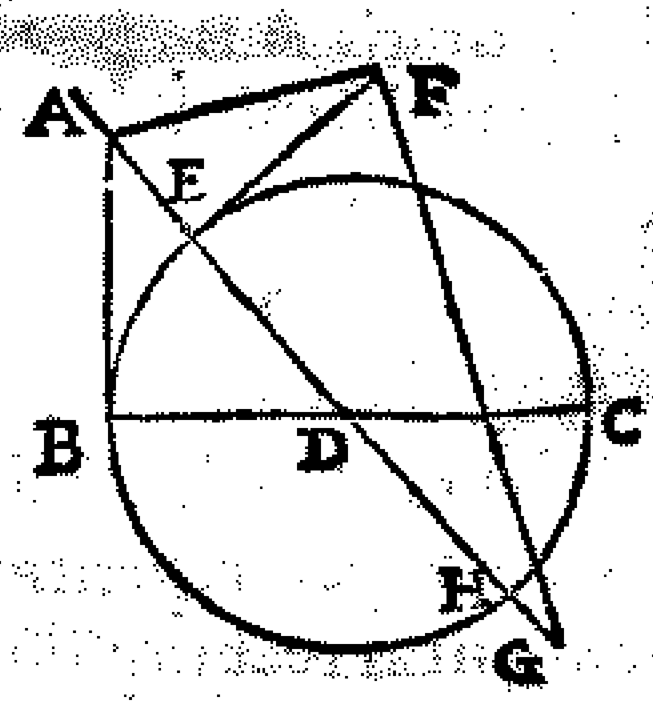
FA G



F A G crus A F continens, cum crure F G angulum rectum, æquale est ipsi A B, ex constructione, & angulus A F G rectus est, pariter ex constructione. segmentum autem E G æquari ipsi B C, per repetitionem vestigiorum resolutionis demonstrabitur hac ratione.

Corol. prop. 8 sexti. 17 sexti. Quoniam enim A F * media proportionalis est inter E A, A G, rectangulum E A G * æquale erit quadrato A F, hoc est quadrato A B, atque A B tangit circulum in B quod angulus A B D rectus est, ergo punctum G erit in circumferentia circuli B E C, quare E G diameter erit, ac proinde diametro B C æqualis.

Esse autem punctum G in circumferentia circuli B E C patet. si enim non est, erit aut in circulo, aut extra circulum. sit primum si possibile est in circulo & producatur A G vsque ad circumferentiam in H, itaque rectangulum E A H æquale erit quadrato A B, sed & rectangulum E A C ostensum est æquale quadrato A B, ergo rectangulum E A G rectangulo E A H æquale erit, quare & recta A G æqualis rectæ A H, pars toti quod est absurdum. Non est igitur punctum G in circulo.



Deinde sit si fieri potest punctum G extra circulum, ergo recta A G secabit circumferentiam, secet in H, rectangulum igitur E A H æquabitur quadrato A B, sed eidem quadrato æquatur & rectangulum E A G, ergo rectangula E A H, E A G æqualia erunt; quare & rectæ A H, A G æquales pars & totum quod itidem est absurdum. Non igitur punctum G est extra circulum, sed neque in circulo, ergo in circumferentia circuli erit, quod erat ostendendum.

Compositio Tertia.

Iisdem datis, inclinentur ad angulos rectos A B, B C & secta B C bifariam in D iungatur A D, & centro D interuallo D B, vel D C describatur circulus, quem A D secet in E, continuata vero in G, & ex E ipsi A D ducatur perpendicularis A F indefinita, in qua ponatur A F æqualis A B, & iungatur F C. In triangulo igitur F A G, crus F A æquale est A B datæ, & E G segmentum basis alternum æquale ipsi B C, diameter nempe diametro; superest igitur vt angulus A F G sit rectus; id autem per Resolutionis regressum ostendetur hoc modo.

Corol. 16 tertij. Quoniam enim recta A B * tangit circulum cum sit rectus angulus. A B C, rectangulum E A G æquale erit quadrato A B, hoc est quadrato A F, quare 4 sexti. vt A E ad A F, ita erit A F ad A G: vnde * similia erunt triangula E A F, F A G, sed rectus est angulus A E F trianguli E A F ergo, & angulus A F G trianguli F A G rectus erit quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum F A G quemadmodum facere oportebat.

Pro-

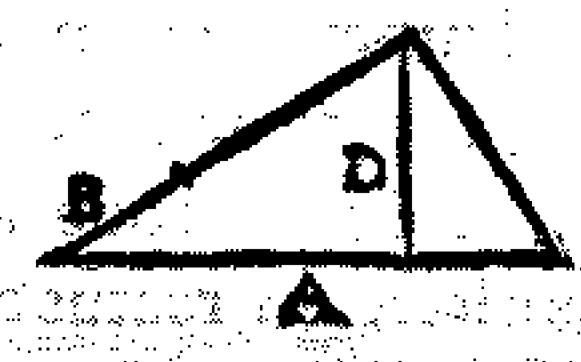
A
Problema III.

Data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari, inuenire triangulum.

Resolutio.

Sit data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium B, perpendicularis autem D. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam inuentum, eiusque basis, esto A.



Quoniam igitur ab angulo recto trianguli ducta est in basim perpendicularis, triangula ad perpendicularem* 8 sexti
B similia sunt toti triangulo, vt igitur basis totius trianguli ad crus vnum, ita erit crus alterum ad perpendicularem, ac proinde id quod fit sub extremis* æquabitur ei, quod fit sub medijs, hoc est 16 sexti

D in A æquabitur rectangulo sub cruribus,

Sed quadratum differentiæ crurum æquale est quadratis crurum, minus duplo rectangulo sub cruribus, ergo

B Q æquabitur A Q - D in A 2

quadratum enim basis, quod est A Q æquale est quadratis crurum, & duplum rectangulum sub base, & perpendiculari, quod est D in A 2, æquale duplo rectangulo sub cruribus, vt est demonstratum. Denique ex-
C plicata æquatione.

L. V. (B Q + D Q) - D æquabitur A.

Porisma.

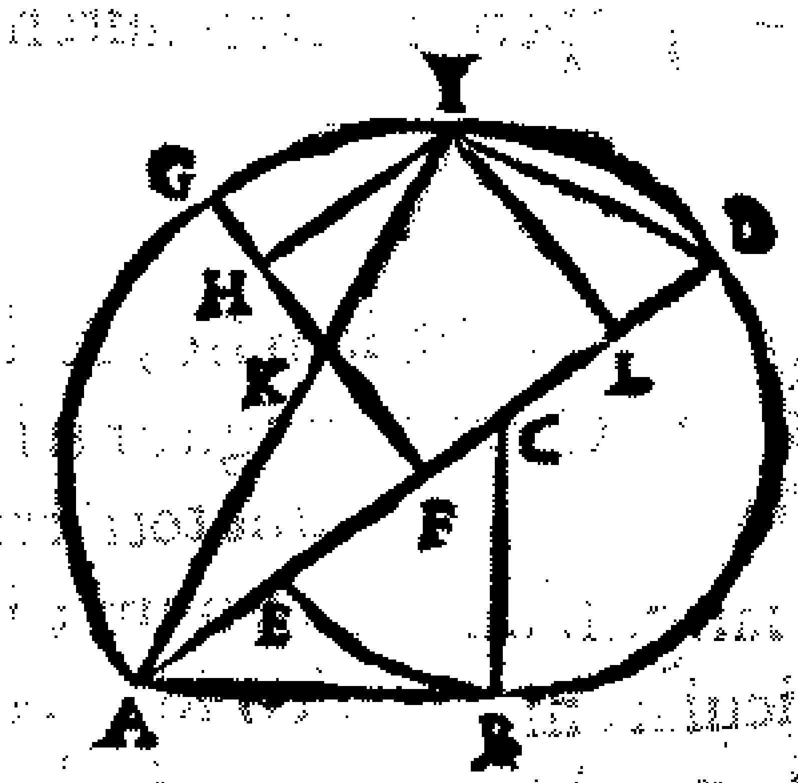
Recta, cuius quadratum æquale est quadratis differentiæ videlicet crurum trianguli circa angulum rectum, & perpendicularis, aucta ipsa perpendiculari, æqualis est basi trianguli.

Datur igitur quęsita basis trianguli.

Compositio.

D

Sit data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium A B, perpendicularis autem B C. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, B C, & connectatur A C: eius quadratum æquale erit quadratis A B, B C, differentiæ videlicet crurum, & perpendicularis; ipsa igitur A C, augenda est longitudine C B, & sic aucta debet fieri basis trianguli construendi. sic Porisma docet.



K ergo

ergo centro C interuallo CB describatur circulus secans A C continuatam in D. deinde in A D describatur semicirculus A G D, ex cuius centro, quod sit F, ducatur perpendicularis F G, in qua sumatur F H, æqualis C B, vel C D, ipsi autem A D parallela agatur H I, secans circumferentiam in I, & connectantur A I, I D. Constructum est igitur triangulum A I D, quemadmodum Porisma docet; recta enim A C, cuius quadratum æquale est quadratis datarum A B, B C, differentiæ videlicet crurum, & perpendicularis, aucta longitudine C B basis est trianguli A I D. Nunc ostendendum est ipsum triangulũ esse quale Problema requirit.

Sumatur enim I k æqualis I D, & circulus D B E secet rectam A C in E; & agatur basi A D perpendicularis I L; ea parallela erit, & æqualis rectæ H F, atque adeo æqualis quoque C B datæ. atque angulus A I D in semicirculo rectus est. hæc omnia ex constructione patent. ipsam autem A k differentiam crurum A I, I D æqualem esse A B datæ, per resolutionis regressum ita ostendetur.

Quoniam enim rectus est angulus A B C, ex constructione, & ideo A B tangit circulum in B quadratum A B* æquale erit rectangulo E A D, seu quod idem est quadrato A D, minus rectangulo A D E. hoc est minus duplo rectangulo A D, I L, est enim D E dupla ipsius I L, ex constructione; sed quadratum A D,* ęquale est quadratis A I, I D, & rectangulum A D, I L ęquale rectangulo A I D; nam cum sint* similia triangula A I D, I L D, & ob id, vt A D ad A I, ita I D ad I L, rectangulum A D, I L sub extremis ęquale erit rectangulo A I D sub medijs; ergo quadratum A B ęquale erit quadratis A I, I D, minus duplo rectangulo A I D; sed & quadratum A k differentię ipsarum A I, I D,* ęquale est quadratis A I, I D, minus duplo rectangulo AID, ergo quadratum A K quadrato AB, ęquale erit, quare & recta A K ęqualis rectę AB. Constructum est igitur triangulum AID, &c. quod facere oportebat.

36 tertij | 7 primi | 8 sexti | Th. 2. primi

Problema IV.

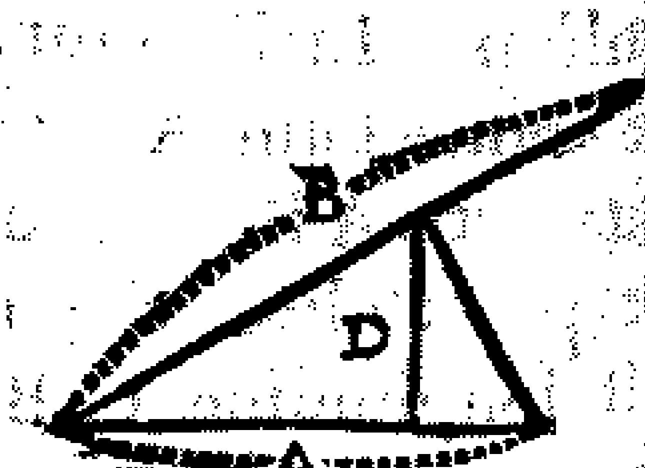
Dato aggregato crurum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari. inenire triangulum.

SIt data composita ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus B. perpendicularis autem D. oportet inuenire triangulum.

Resolutio.

FActum iam sit, & basis illius trianguli esto A. Quoniam igitur triangula ad perpendicularem* similia sunt toti triangulo, erit vt basis totius trianguli ad crus vnum; ita crus alterum, ad perpendicularem, & ideo id quod fit sub extremis* æquabitur ei, quod fit sub medijs, hoc est

8 sexti | 16 sexti



D in

A D in A æquabitur rectangulo sub cruribus,

Sed quadratum compositæ ex cruribus *æquale est quadratis crurum, vna cum duplo rectangulo sub cruribus, ergo *4 secundi

B Q æquabitur A Q + D in A 2

Quadratum enim basis, hoc est A Q æquale est quadratis crurum; duplum autem rectangulum sub base, & perpendiculari, hoc est D in A 2 æquale duplo rectangulo sub cruribus, vt est demonstratum. Denique explicata æquatione.

L. V. (B Q + D Q) -- D æquabitur A

Porisma.

B Recta, cuius quadratum æquale est quadratis aggregati videlicet crurum, angulum rectum ambientium, perpendicularis, contracta ipsa perpendiculari, æqualis est basi trianguli.

Datur ergo basis trianguli, de qua quærebatur.

Ex Porismate apparet triplam perpendicularem non esse maiorem rectà, cuius quadratum æquale est quadratis aggregati crurum, & perpendicularis; nam si ab ea recta auferenda est perpendicularis, & ex reliqua facienda basis trianguli construendi, vt Porisma docet, ipsa basis non debet esse minor, quàm dupla perpendicularis, in triangulo enim rectangulo si crura sunt æqualia, basis dupla est ipsius perpendicularis, si inæqualia, maior est quàm dupla

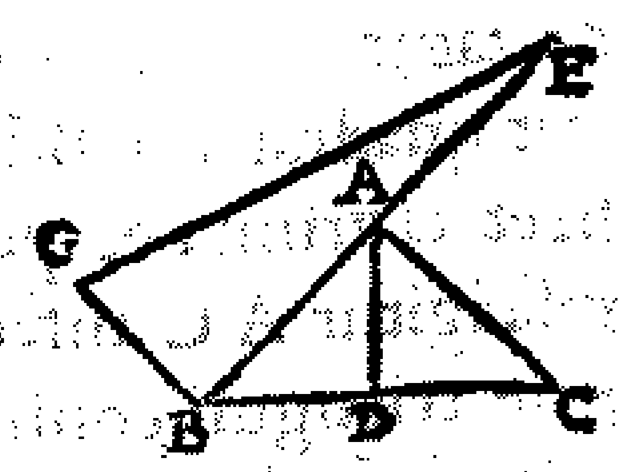
C perpendicularis. Hæc demonstranda sunt, & Problemati adijcienda determinatio, ne data suos limites egrediantur.

Lemma.

Tripla perpendicularis trianguli rectanguli ab angulo recto in basim cadens, non est maior, quàm recta, cuius quadratum æquale est quadratis aggregati crurum, & perpendicularis.

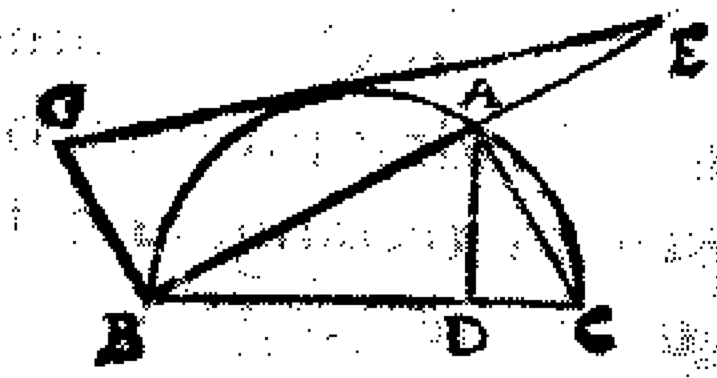
Sit triangulum rectangulum A B C, à cuius angulo recto B A C cadat in basim B C perpendicularis A D, & B A producatur in E longitudine A C, & ducatur ipsi B E

D perpendicularis B G; æqualis autem ipsi A D, & connectatur G E; eius quadratum æquale erit quadratis B E, B G, hoc est aggregati crurum, & perpendicularis. Dico igitur triplam A D; non esse maiorem rectà G E: Aut enim æqualia sunt crura B A, A C, aut inæqualia, sint primum æqualia, ergo æquales erunt & B D, D A, D C: vnde quadratum B A duplum erit quadrati A D, sed quadratum B E quadruplum est quadrati B A, cum sit B E dupla ipsius B A, ergo quadratum B E octuplum erit quadrati A D, sed quadratum G E æquale est quadratis G B, B E, & est recta G B æqualis rectæ A D, ergo quadratum G E nonuplum



 erit

erit quadrati A D, & consequenter recta G E tripla rectæ A D. Tripla igitur A D non est maior, quam G E.



Sed sint inæqualia crura B A, A C, ergo & B D, D C erunt inæquales. Describatur autem in B C semicirculus B A C, eius circumferentia transibit per A, propter angulum rectum B A C, & recta D A non erit ex centro, quare B C maior erit quam A D dupla, & consequenter quadratum B C maius quadruplo quadrati A D, & rectangulum B C, A D maius duplo quadrati A D, & per consequens duplum rectanguli B C, A D maius quadruplo quadrati A D, atque adeo quadratum B C, vnà cum duplo rectanguli B C, A D maiora erunt octuplo quadrati A D, sed quadratum B C æquale est quadratis B A, A C, & duplum rectanguli B C, A D æquale duplo rectanguli B A C, est enim propter* similitudinem triangulorum A B C, D A C, vt B C ad B A, ita A C ad A D, & ideo rectangulum sub extremis B C, A D, æquale rectangulo B A C sub medijs; ergo quadrata B A, A C vnà cum duplo rectanguli B A C, hoc est* quadratum B E, quæ est æqualis compositæ ex B A, A C, maius erit octuplo quadrati A D, atque adeo quadratum G E, cui æqualia sunt quadrata G B, B E maius erit nonuplo quadrati A D, vnde & recta G B maior erit, quam tripla A D: quare constat propositum.

8 sexti

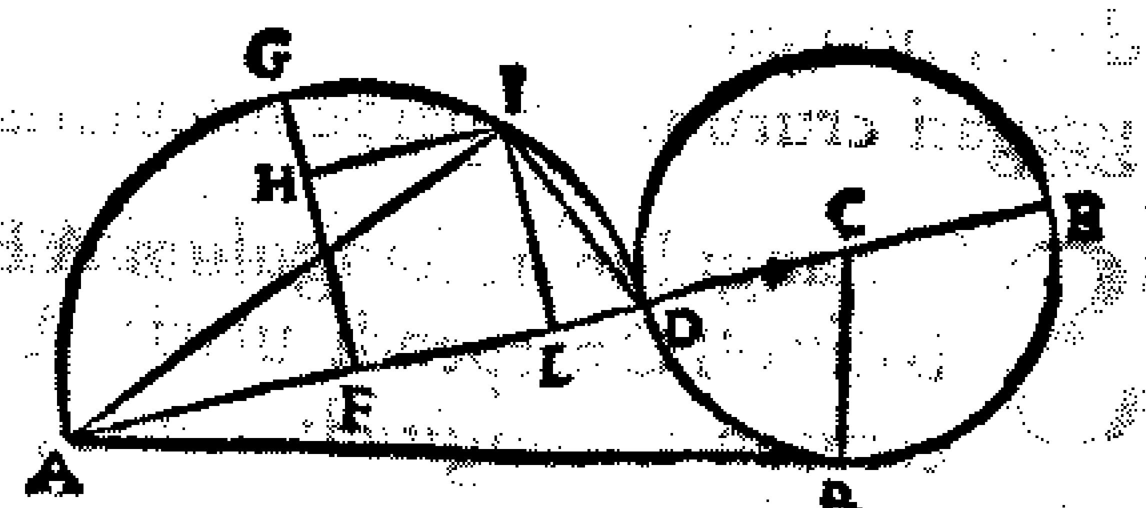
4 secundi

Hoc igitur demonstrato, Problema ita determinandum erit.

Determinatio.

Oportebit triplam perpendicularem non esse maiorem recta, cuius quadratum æquale est quadratis aggregati crurum, & perpendicularis.

Compositio Problematis..



Sit datum aggregatũ crurum trianguli angulum rectum ambientiũ A B, perpendicularis autem B C. Oportet inuenire triangulũ. Inclinentur ad angulos rectos A B, B C, & connectatur A C, eius quadratum æquale erit quadratis A B, B C aggregati videlicet crurum, & perpendicularis, ab ipsa igitur A C auferenda est recta æqualis C B; reliqua vero sumenda pro base trianguli construendi; sic Porisma præcipit ergo centro C interuallo C B describatur circulus secans A C in D, in reliqua vero A D describatur semicirculus A G D, ex cuius centro quod sit F ducatur perpendicularis F G, in qua sumatur F H æqualis C B, vel C D, est autẽ C B non maior, quàm F G; nam ex determinatione Problematis tripla C B non est maior, quam A C, ergo nec dupla C B maior erit, quàm A C; nec simpla C B maior quàm F G. Ipsi autem A D parallela agatur H I secans circumferentiam

in

A in I, & connectantur A I, I D. Itaque constructum est triangulum A I D, quemadmodum Porisma docet: recta enim A C, (cuius quadratum æquale est quadratis datarum A B, B C, aggregato videlicet crurum, & perpendicularis) contracta longitudine C B basis est trianguli A I D. Nunc ostendendum est illud triangulum Problema efficere.

Producatur enim A C vsque ad circumferentiam circuli in E, & in A D cadat perpendicularis I L: ea parallela erit, & æqualis rectæ H F; atque adeo æqualis quoque datæ C B. est autem & angulus A I D in semicirculo rectus. Hæc omnia patent ex constructione. Compositam autem ex cruribus A I, I D, æqualem esse A B datæ, repetendo resolutionis vestigia, ita ostendetur.

B Quoniam enim rectus est angulus A B C, & ideo A B tangit circulum, in B, quadratum A B * æquale erit rectangulo E A D, seu quod idem est qua- 16 tertij
drato A D vnà cum rectangulo A D E, hoc est vnà cum duplo rectãgulo A D I L; est enim D E dupla ipsius I L, ex constructione; sed quadratum A D * æ- 47 primi
quale est quadratis A I, I D, & rectangulum A D, I L æquale rectangulo A I D: nam cum sint * similia triangula A I D, I L D, & ob id, vt A D ad 8 sexti
A I, ita I D ad I L, rectangulum A D, I L sub extremis; æquale est rectangulo A I D sub medijs; ergo quadratum A B, æquale erit quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectangulo A I D; sed & quadratum compositæ ex A I, I D, * æquale est quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectanguli A I D, ergo 4 secundi
quadratum compositæ ex A I, I D, æquale erit quadrato A B: vnde & ipsa
C composita ęqualis rectę AB. Constructum est igitur triangulum A I D, &c. quod erat faciendum.

Problema V.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte ęquale sit quadrato partis reliquę.

HÆc est Propositio vndecima libri secundi Elementorum, seu trigesima sexti, quę iubet datam rectam lineam extrema, ac media ratione secare.

Resolutio.

D SIt data recta linea secanda B, vt rectangulum sub tota, & altera parte ęquale sit quadrato partis reliquę.

Secta iam sit, & pars maior esto, A, ergo minor pars erit B -- A. Et cum rectangulum sub tota & minori parte ęquale sit quadrato partis maioris

BQ -- B in A ęquabitur AQ

Addito vtrique parti B in A, vt cognita ab incognitis separentur.

BQ ęquabitur AQ + B in A

Et explicata ęquatione L. V. (BQ + BQ $\frac{1}{4}$) -- B $\frac{1}{2}$ ęquabitur A.

Porisma.

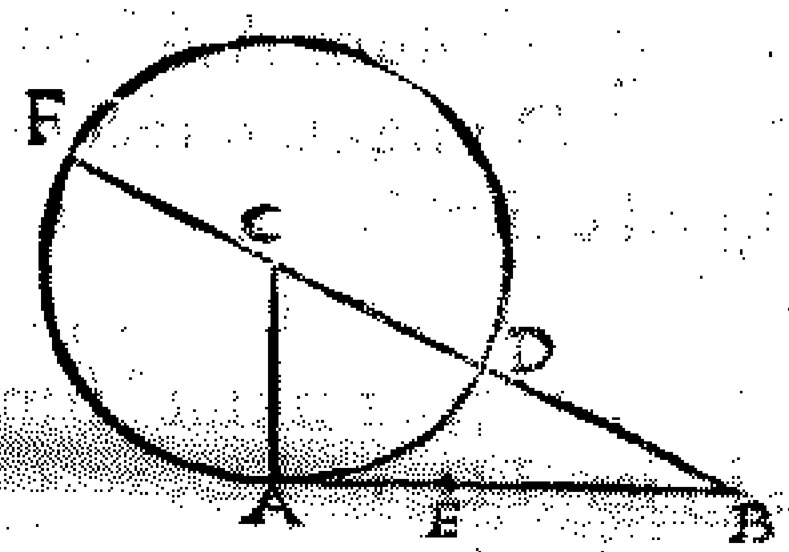
A

Recta cuius quadratum æquale est quadratis totius datæ, & dimidiæ eiusdem contracta eadem dimidia, æqualis est parti maiori.

Datur ergo pars maior, de qua quæritur.

Hoc Problema vnico modo ab vna resolutione pendente componitur, quoniam in eo vna tantum conditio requiritur, nempe vt rectangulum sub tota data, & altera parte æquale sit quadrato partis reliquæ.

Compositio.



Sit data recta linea A B, quam oportet secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte, æquale sit quadrato reliquæ partis. Ducatur A C perpendicularis. & æqualis dimidiæ A B, & iungatur C B, à qua abscindatur C D æqualis C A, reliquæ vero D B fiat æqualis B E. Secta est igitur A B in E, quemadmodum habetur ex Porismate: à recta enim C B, cuius quadratum æquale est quadratis A B, A C totius videlicet datæ, & dimidiæ eiusdem, ablata est C D æqualis dimidiæ A B, reliquæ verò B D facta est æqualis B E. Itaque ostendendum est rectangulum B A E æquari quadrato B E. id autem per repetitionem vestigiorum Resolutionis fiet manifestum. B C

Centro enim C interuallo C A, vel C D circulus describatur secans B C continuatam in F, is circulus tanget rectam A B in A, ac proinde rectangulum D B F quod * constat quadrato D B, & rectangulo F D B * æquale erit quadrato A B. auferatur vtrinque rectangulum F D B, quoniam in Resolutione additum fuit; ergo reliquum quadratum D B, hoc est E B, æquabitur quadrato A B, minus rectangulo F D B, hoc est minus rectangulo A B E; sunt enim æquales F D, A B; cum sit A C dimidia ipsius A B; & æquales quoque D B, B E, seu quod idem est, æquabitur rectangulo B A E. Secta est igitur A B in E, vt Problema exigit, quod faciendum erat.

* 6 secundi
* 36 tertij

Problema VI.

D

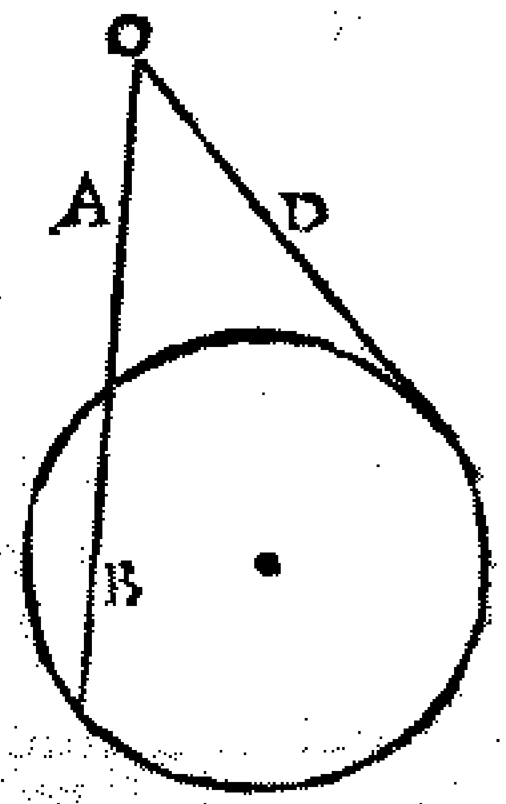
In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat.

Hoc Problema duos casus habet, aut enim datum est punctum extra circulum, aut intra; primo Casu oportebit rectam magnitudine datam non esse maiorem diametro circuli; secundo vero Casu oportebit eã nec esse maiorẽ diametro circuli, nec minorẽ ea recta linea in circulo,

quæ

A quæ in dato puncto secat diametrum ad rectos angulos; ea enim minima est omnium, cum sit à centro omnium remotissima.

Resolutio primi Casus.



Sit iam factum. hoc est sit aptata, in dato circulo, vt petitur, data recta linea B; quæ producta perueniat ad datum punctum O, à quo ducatur recta tangens circulum, ea data erit; quoniam datum est & punctum O positione, circulus vero positione & magnitudine. Sit igitur ea tangens D, & quæratur continuatio aptatæ; quæ est inter datum punctum, & aptatum. ea esto A, ergo to-
B ta continuata, seu secans circulum, erit A + B. Et quoniam rectangulum sub tota secante, & parte exteriori eiusdem æquale est quadrato, tangentis, ideo

$$A\,Q + B \text{ in } A \text{ æquabitur } D\,Q$$

Et explicata æquatione. $L.V.(D\,Q + B\,Q\,\tfrac{1}{4}) - B\,\tfrac{1}{2}$ æquabitur A.

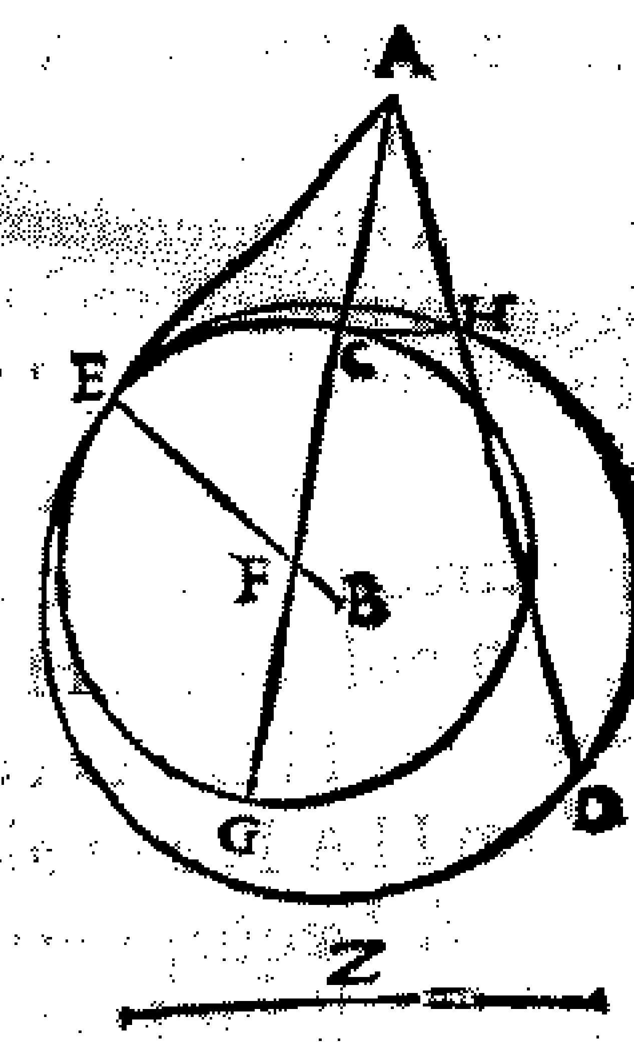
Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato tangentis circulum, & quadrato dimidiæ aptatæ in circulo, contracta eadem dimidia æqualis est continuationi aptatæ, quæ dato puncto, & aptata terminatur.

Datur ergo continuatio aptatæ de qua quæritur.

C

Compositio Primi Casus.



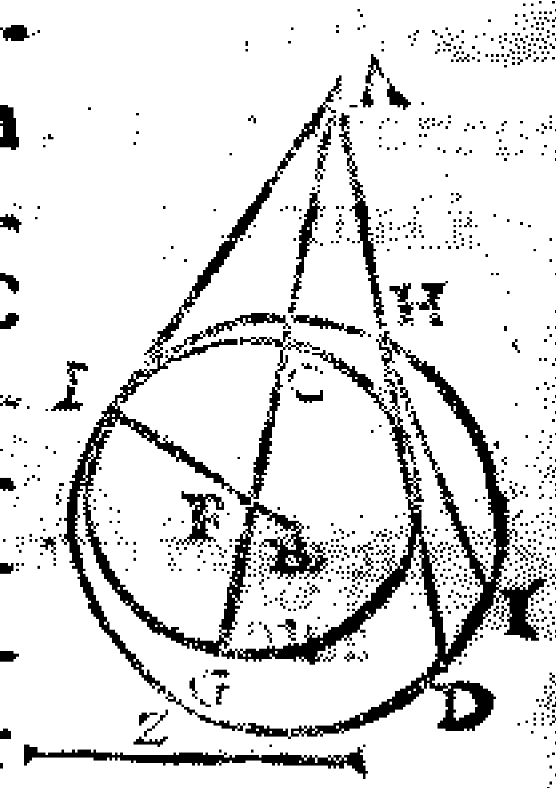
Sit datus circulus E H D cuius centrum B; datum autem punctum A, quod sit extra circulum, & data magnitudine recta linea Z, quæ non sit maior diametro circuli. Oportet in circulo E H D rectæ lineæ, Z æqualem rectam lineam aptare, quæ ad punctum A pertingat. Si diametro circuli E H D æqualis est ipsa Z ducatur à puncto A per centrum circuli recta linea, & factum erit quod proponitur. Si vero ipsa Z minor est
D diametro, ducatur A E contingens circulum E H D in E, & connectatur B E, erit igitur angulus A E B rectus. deinde in E B sumatur E F, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque A F; quadratum igitur A F æquale erit quadratis A E, E F, hoc est tangentis, & dimidiæ Z. itaque à recta A F auferenda est recta æqualis ipsi F E, vel dimidiæ Z, residuæ vero facienda est æqualis continuatio aptandæ, quæ dato puncto, & aptanda terminabitur. Sic habetur ex Porismate. ergo à recta F A abscindatur F C æqualis F E, & centro A internallo A C describatur arcus secans circulum E H D in H, & per punctum H ducta recta linea A H D vsque ad cauam eiusdem cir-

circuli circumferentiam, aptata erit H D in circulo, quemadmodum Porisma docet. Eam autem æqualem esse Z datæ, sic demonstrabitur.

Centro enim F interuallo F E, vel F C describatur circulus secans A F continuatam in G. Quoniam igitur æqualia sunt rectangula H A D, C A G vtrunque enim æquale est quadrato A E, atque est A H æqualis A C, erit & A D æqualis A G, quare per subductionem æqualium A H, A C, æqualibus A D, A C, fiunt & reliquæ H D, C G æquales; sed C G æqualis est Z, vtraque enim dupla est ipsius E F; ergo & H D ipsi Z æqualis erit. In dato igitur circulo E H D aptata est H D datæ Z æqualis, eaque ad punctum A pertingit quod facere oportebat.

Hoc Problema quia duas conditiones exigit nempe vt aptata in circulo sit æqualis datæ rectæ lineæ, & vt ad datum punctum pertingat, dupliciter componi potest deductis ab vna, eademque Resolutione compositionibus, & licet hæc altera quæ sequitur Compositio sit multis de causis inferior, quam prima eam tamen subijcere volui, vt ostendatur ex qualibet Resolutione, tot compositiones oriri, quot in Problemate conditiones requiruntur.

Alia eiusdem Casus Compositio.

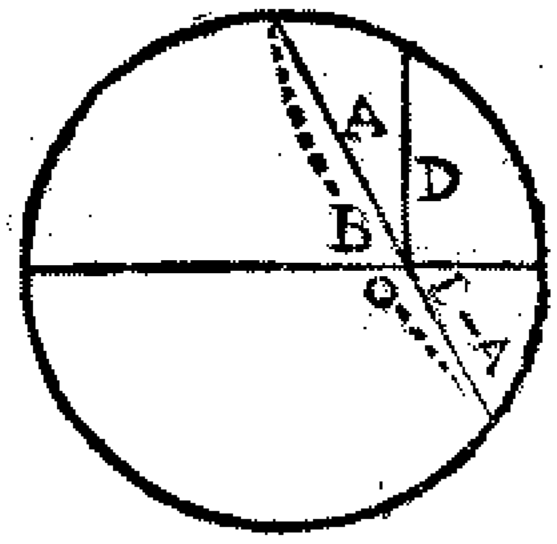


Sint igitur eadem data, & oporteat facere quod imperatum est. Ducatur A E, vt prius contingens circulum E H D in E, & iũgatur B E, & in ea sumatur E F æqualis dimidiæ Z, & iungatur A F, ab eaque abscindatur F C æqualis F E, & centro A interuallo A C describatur arcus secans circulum F H D in H, in quo accommodetur H D æqualis Z. Dico H D Problema efficere, eamq. productã peruenire ad punctũ A. Cẽtro enim F, interuallo F C, vel F E describatur circulus secans A F productam in G, & iungatur A H. Ostendendum est igitur A H D rectam esse lineam. Si enim non est recta linea A H D producatur A H vsque ad cauam circumferentiam circuli E H D in I. Rectangulum igitur H A I æquale erit rectangulo C A G, vtrunque enim æquale est quadrato A E tangentis, ea enim vtrumque circulum tangit, sed rectangulum C A G æquale est rectangulo sub H A, & composita ex A H, H D; sunt enim æquales A C, A H; & æquales quoque C G, H D, ex constructione, & ideo æquales, & A G, A I; ergo rectangulum H A I, æquale erit rectangulo sub H A, & composita ex A H, H D; quare A I æqualis erit compositæ ex A H, H D dempta communi A H; reliqua H I reliquę H D ęqualis erit, quod est absurdum: recta est igitur linea A H D; quod ostendisse oportuit, atque adeo aptata est in circulo recta H D, eaque ad punctum A pertingit quod faciendum erat.

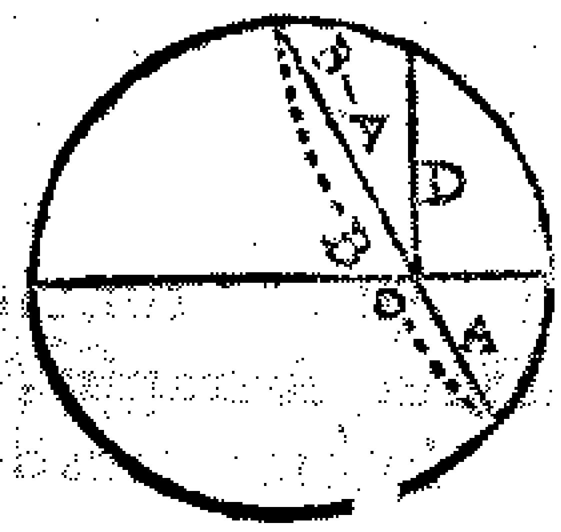
Re-

A

Resolutio secundi Casus.



FActum iam sit, hoc est sit aptata in circulo vt petitur data recta linea B, eaque transeat per datum punctum O, per quod ducatur circuli diameter cui à puncto O, ducatur perpendicularis vsque ad circumferentiam. Quoniam igitur datum est punctum O, positione, circulus vero positione, & magnitudine, ergo & diameter eius transiens per O dabitur positione, & magnitudine, atque adeo dabitur & ipsa perpendicularis, ergo sit ea D, & B quæratur alterutra pars aptatæ, quæ in dato puncto diuiditur: ea estò A; ergo reliqua pars erit B -- A & rectangulum sub partibus aptatæ * æquale erit rectangulo sub partibus diametri, hoc est quadrato perpendicularis, itaque, * 35 tertij



B in A -- A Q æquabitur D Q

Et explicata secundum tertium Canonem æquatione

$B\frac{1}{2}$ + L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- D Q) æquabitur A

Vel $B\frac{1}{2}$ - L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- D Q) æquabitur A

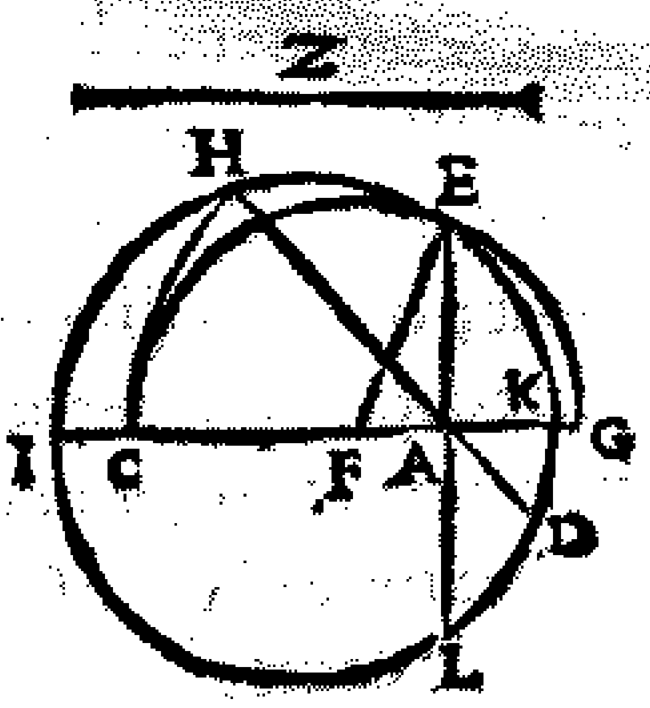
In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum primus est pars maior aptatæ, secundus pars minor, in eamdem enim æquationem incidimus siue de maiori parte aptatæ quæritur, siue de minori.

C

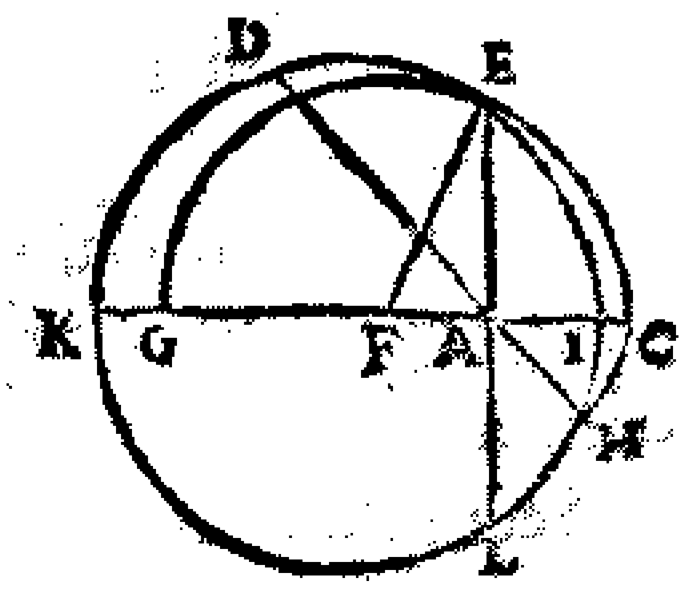
Porisma.

Dimidia aptata in circulo, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ aptatæ superat quadratum perpendicularis, æqualis est parti maiori aptatæ, quæ dato puncto diuiditur, contracta vero æqualis est parti minori.

Compositio Secundi Casus.



SEd sit in circulo datum A punctũ, & data z non sit maior diametro circuli dati H E D, neque minor ea recta linea in circulo, quàm diameter D per punctũ A ducta secat ad rectos angulos, & oporteat facere quod imperatum est. Ducatur per A circuli diameter I A K, cui si sit æqualis Z data, factum iam erit quod proponitur si vero sit minor ducatur per A ipsi diametro ad rectos angulos E A L & si ipsa E L æqualis sit datæ Z, rursus factũ erit quod proponitur, si vero Z maior sit quam E L ponatur in A I recta linea E F æqualis dimidiæ Z; est autem dimidia Z maior, quam A E, cum tota Z ponatur maior, quàm tota E L, quæ dupla est ipsius A E. Quadratum igitur E F superat qua-



quadratum E A quadrato A F, itaque dimidiæ Z addenda est recta A F, eique sic auctæ facienda æqualis pars maior aptandæ, quæ in puncto A diuisa erit. Vel dimidiæ Z detrahenda est recta A F, & residuæ facienda æqualis pars minor aptandæ, sic Porisma fieri docet. Igitur rectæ F E fiat æqualis F C, & centro A interuallo A C describatur arcus secans circulum H E D in H, & iuncta H A producatur vsque ad circumferentiam in D. Dico rectam H D Problema efficere. Centro enim F interuallo F C, vel F E describatur circulus secans F K etiam productam in G. Quoniam igitur æqualia sunt rectangula H A D, C A G; vtrunque enim æquale est quadrato A E, atque est A H æqualis A C, erit & A D æqualis A G; quare per additionem æqualium A D, A G æqualibus A H, A C, fiunt quoque æquales & H D, C G, sed C G æqualis est Z, vtraque enim dupla est ipsius F E, ergo & H D ipsi Z æqualis erit. In dato igitur circulo H A D aptata est H D æqualis Z datæ, eaque per punctum A transit, quod erat faciendum.

Et hic Casus duplicem admittit Compositionem, vtramque ex vna, eademque Resolutione emanantem, sed primi Casus compositiones ad exemplum sufficiant.

Problema VII.

Dato semicirculo, & recta linea sit ipsius basi perpendicularis. Inter ipsam perpendicularem, & circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad semicirculi angulum pertingat.

Hoc Problema sex Casus habet; tres quidem sunt cum perpendicularis secat basim semicirculi productam, primus differt à reliquis duobus, quod in primo ponenda est recta magnitudine data inter perpendicularem, & conuexam semicirculi circumferentiam. In reliquis vero ponenda est inter perpendicularem & circumferentiam cauam. Secundus autem Casus differt à tertio, quod in secundo basis semicirculi non est maior segmento basis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur, in tertio autem maior est.

Quartus autem Casus, & quintus est cum perpendicularis in ipsam basim cadit; quartus differt à quinto, quod in quarto ponenda est recta magnitudine data inter perpendicularem, & circumferentiam cauam. At in quinto ponenda est inter perpendicularem, & circumferentiam conuexam.

Sextus denique Casus est cum perpendicularis in extremitatem basis semicirculi cadit.

Primi quatuor Casus determinatione indigent: duo vero reliqui indeterminati sunt.

Primo igitur Casu oportet rectam magnitudine datam non esse minorem eo segmento basis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur.

Secundo Casu oportet illam magnitudine datam, non esse minorem basi pro-

A producta, vsque ad perpendicularem.

Tertij Casus determinaionem quære ex Porismate Resolutionis, siquidem in ea semicirculi, & perpendicularis positione non dum liquet, quæ sit minima interceptarum à circumferentia, & perpendiculari quemadmodum cernitur in præcedentibus, & in ea quæ sequitur inspecta tantum semicirculi & perpendicularis positione.

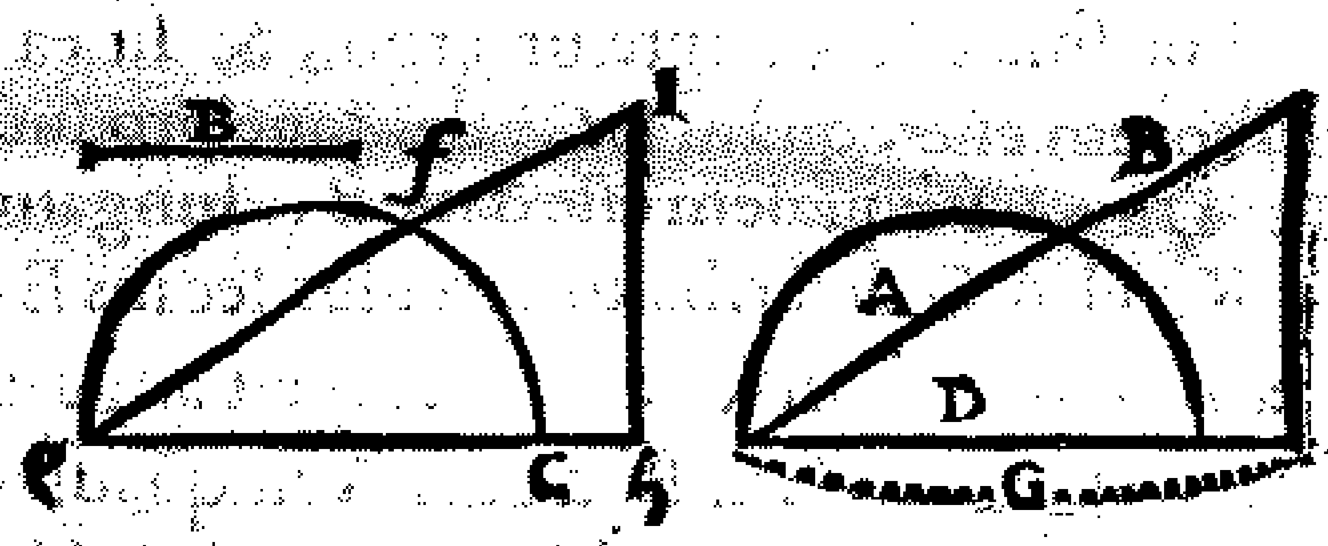
Quarto denique Casu oportebit rectam magnitudine datam non esse maiorem segmento basis semicirculi, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur ex ea parte ponendæ.

Resolutio primi Casus.

B

Sit datus semicirculus EFC, in cuius basim productam cadat perpendicularis IH, & data recta linea B, quæ non sit minor, quàm CH. Oportet inter circumferentiam semicirculi, & ipsam perpendicularem ponere rectam lineam æqualem datæ B; itaut ad punctum E pertineat.

Sit iam factum, & sit ea recta FI, & connectatur CF. sit autem datarum FI, EC, EH, prima B, secunda D, tertia G, vt in secunda figura, & quæratur EF, ea esto A. duplicem figuram



C apposui, primam quidem vt expositio Problematis clarior fiat; secũdum vero vt Rosolutioni seruiat, easque distinxi, ne multitudine, & diuersitate literarum, quæ in vna figura existerent obruantur studiosi potius, quam iuuentur. Quoniam igitur similia sunt triangula EFC, EHI, angulus enim EFC in semicirculo rectus est, & ideo æqualis angulo recto H, & angulus ad E communis est vtrique, erit vt EF ad EC, ita EH ad EI, hoc est in figura ad resolutionem pertinente proportionales erunt.

A D G A ✠ B

Sed quod sit sub extremis æquale est facto sub medijs, ergo

D AQ ✠ B in A æquabitur D in G

Et explicata æquatione L. V. (BQ ¼ ✠ D in G) — B ½ æquabitur A.

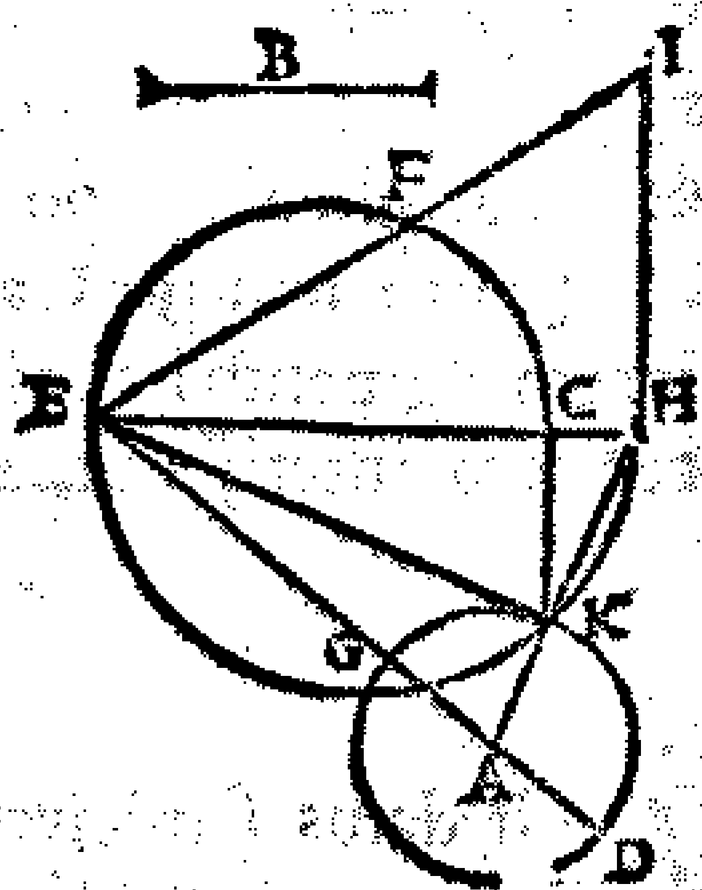
Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ FI & rectangulo CEH, contracta dimidia FI æqualis est rectæ EF.

Datur ergo EF quæsita.

Com-

Compositio Primi Casus.



SIt datus semicirculus E F C, in cuius basim E O productam cadat perpendicularis I H, & data quoque recta linea B, quæ non sit minor, quàm C H. Oportet inter perpendicularem I H, & circumferentiam E F C datæ B æqualem rectam ponere, quæ ad punctum E pertingat. Si B æqualis sit rectæ C H, factum iam erit quod proponitur, si vero sit maior; describatur in E H semicirculus E k H, & ipsi E H agatur perpendicularis C k, & iungantur E K, k H. angulus igitur E k H in semicirculo rectus est, ac proinde B
Corol. 8. sexti E k* media proportionalis inter C E, E H, quare qua-
39 sexti dratum E k* æquabitur rectangulo C E H. Producatur autem H k in A, vt sit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A: quadratum igitur E A æquale erit quadratis A K, k E, hoc est quadrato dimidiæ B, & rectangulo C E H. à recta igitur E A auferenda est A G æqualis A K, vel dimidiæ B, residuæ vero E G æqualis aptanda est recta in semicirculo E F C sic Porisma docet. aptetur ergo, & sit ea E F. demonstrabitur infra, A G minorem esse, quàm E C. denique producta E F donec occurrat rectæ H I in I. Dico F I æqualem esse datæ B. Iungatur enim F C, & centro A interuallo A K, vel A G describatur circulus secans E A productam in D. is circulus tanget rectam E K in k, quia rectus est angulus E K, cum sit rectus & k H; quare rectangulum G E D æquale erit quadrato E B hoc est rectangulo C E H, C
vt igitur G E, seu E F ad E C, ita erit E H ad E D; sed propter similitudinem triangulorum E F C, E H I, est vt E F ad A C, ita E H ad E I ergo ipsa E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D hoc est datæ B, æqualis erit. Posita est igitur inter circumferentiam E F, & perpendicularem I H recta F I æqualis B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum.

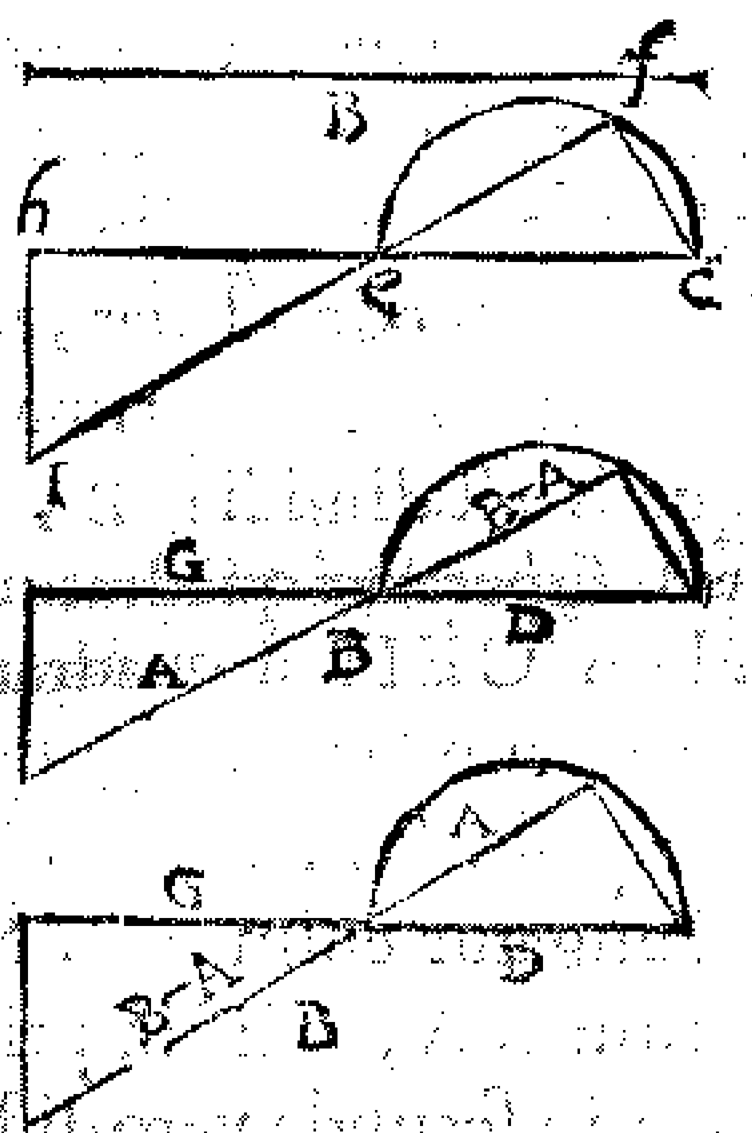
At vero E G minorem esse, quàm E C manifestum est, si enim non est minor, erit maior, vel æqualis: sed ponitur & G D, hoc est B, maior quàm C H, ergo & E D tota maior erit quàm tota E H. vnde rectangulum G E D, hoc est quadratum E K, maius erit rectangulo C E H, quod est absurdum, illud D
Corol 8 sexti enim quadratum huic rectãgulo* æquale est. Non igitur E G maior est quàm E C, aut ei æqualis, ergo minor quod ostendisse oportuit.

Determinatione cautum est ne data B sit minor, quàm C H; nam ipsa C H minima est omnium, quæ ad punctum E pertinentes inter circumferentiam E F C, & rectam I H interijciuntur. Ducatur enim alia vtrunque recta linea E F I, ea maior erit quam E H, sed & E C maior est quam E F, ergo reliqua C H minor erit quàm reliqua F I & sic ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur omnium C H, quare manifesta est determinatio.

Reso-

Resolutio secundi Casus.

SIt datus semicirculus e f c è cuius base continuata longitudine, non minore ipsa base, cadat perpendicularis h i: data autem recta linea B, quæ non sit minor, quàm c h. Oportet inter perpendicularem h i, & circumferentiam e f c ponere rectam lineam æqualem datæ B, ita vt ad punctum e pertingat.



Sit iam factum, & sit ea recta f e i, & iungatur f c. datæ sunt igitur f i, c e, e h. prima sit B, secunda D, tertia G, & quæratur siue e i, siue e f. altera earum esto A, ergo reliqua erit B -- A. Et quoniam similia sunt triangula e f c, e h i, nam angulus e f c in semicirculo rectus est, & ideo æqualis angulo recto e h i, & angulus f e c æqualis angulo h e i, cum sint ad verticem, erit vt e f ad e c, ita e h ad e i, hoc est in figura Resolutionis proportionales erunt.

B -- A   D   G   A

Vel   A   D   G   B -- A

Et quod fit sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs, ergo

B in A -- A Q æquabitur D in G

Et explicata æquatione $B\frac{1}{2}$ + (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

Vel $B\frac{1}{2}$ -- (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum primus est e i, secundus e f si quidem in eandem æquationem inciditur, siue de e i quæritur, siue de e f.

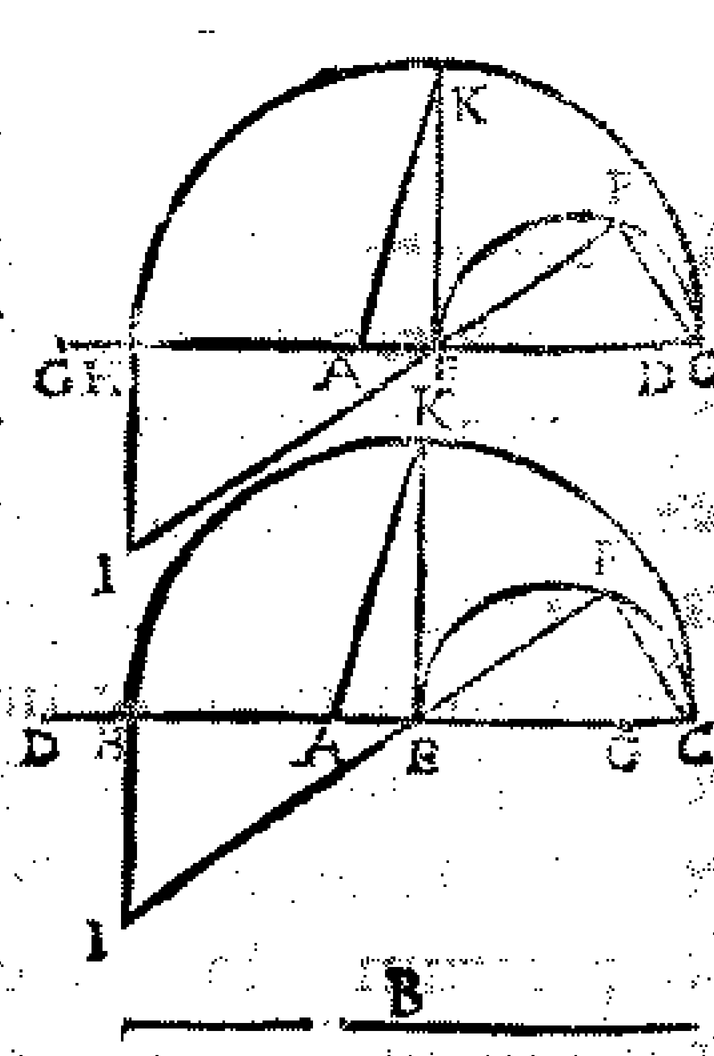
Porisma.

Dimidia f i, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ f i superat rectangulum c e h, æqualis est rectæ e i; contracta verò æqualis rectę e f.

Datur ergo vtraque e i, e f.

Compositio secundi Casus.

SIt datus semicirculus E F C, vt supra, & oporteat facere quod propositum est. Si B data æqualis sit H C, factum iam erit quod proponitur. si vero sit maior, agatur ipsi H C perpendicularis E K, quam semicirculus in H C descriptus secet in k, erit E k minor quàm dimidia B, cum sit & H C minor quam tota B. Itaque poterit à puncto K in rectam E H duci recta æqualis dimidię B. ducatur igitur k A



ea maior erit quam A H, minor autem quam A C; nam cum ſit A k maior, quàm dimidia H C, erit centrum circuli H K C in A C, & ideo A K maior quam A H, & minor quam A C. Producatur ergo A H in G, vt ſit A G æqualis A K, vel dimidiæ B, & in H I ponatur E I æqualis E G, eaque producatur ad circumferentiam in F.

Vel vt in ſecunda figura ab A C abſcindatur recta A G æqualis A k, & in ſemicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, eaque producatur in I. alterutro modo id fiat, factum erit quemadmodum Poriſma docet, in prima enim figura rectæ A G, cui æqualis eſt dimidia B, addita eſt A E, cuius quadrato ſuperatur quadratum K E à quadrato A K, hoc eſt ſuperatur rectangulum C E H à quadrato dimidiæ B, & toti E G facta eſt æqualis E I. In ſecunda vero figura rectæ A G detracta eſt A E, & reliquæ E G facta eſt æqualis E F. Nunc oſtendendum eſt rectam I E F Problema efficere.

Iungatur enim F C, & ſumatur A D æqualis A G. Quoniam igitur rectarum G A, A E, in prima quidem figura differentia eſt E D, aggregatum E G; in ſecunda vero differentia eſt E G, aggregatum E D; ideo in vtraque Theor. 5 primi figura rectangulum G E D, ſub aggregato, & differentia * æquale erit differentiæ quadratorum G A, A E, ſeu k A, A E, hoc eſt quadrato k E, vel rectangulo H E C: ſed & rectangulum I E F æquale eſt eidem rectangulo H E C, nam cum ſint ſimilia triangula E H I, E F C, eſt vt E H ad E I, ita E F ad E C, & ideo rectangulum H E C ſub extremis æquale rectangulo I E F ſub medijs; ergo rectangulum G E D æquale erit rectangulo I E F. In prima quidem figura ſic argumentor. ſed ſe æqualis eſt G E, ergo & E F, ac proinde tota I F æqualis toti G D, hoc eſt ipſi B. In ſecunda vero figura argumentor hoc modo; ſed E F æqualis eſt E G, ergo & E I æqualis erit E D, & conſequenter tota I F, æqualis toti D G, hoc eſt datæ B, quod erat oſtendendum. Poſita eſt igitur inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C recta I F æqualis datæ B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum.

At vero rectam H C minimam eſſe omnium, quæ ad punctum E pertinent, & inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C interijciuntur ſic demonſtrabitur.

Ducatur enim alia quæcunque recta I E F, & iungatur F C. Quoniam igitur propter ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, eſt vt E F ad E C, ita E H ad E I, atque eſt maxima quidem E I, minima vero E F; erit I F compoſita ex maxima, & minima maior, quàm H C compoſita ex reliquis: & ſic oſtendetur H C minor omnibus alijs. Quare manifeſta eſt determinatio.

Re-

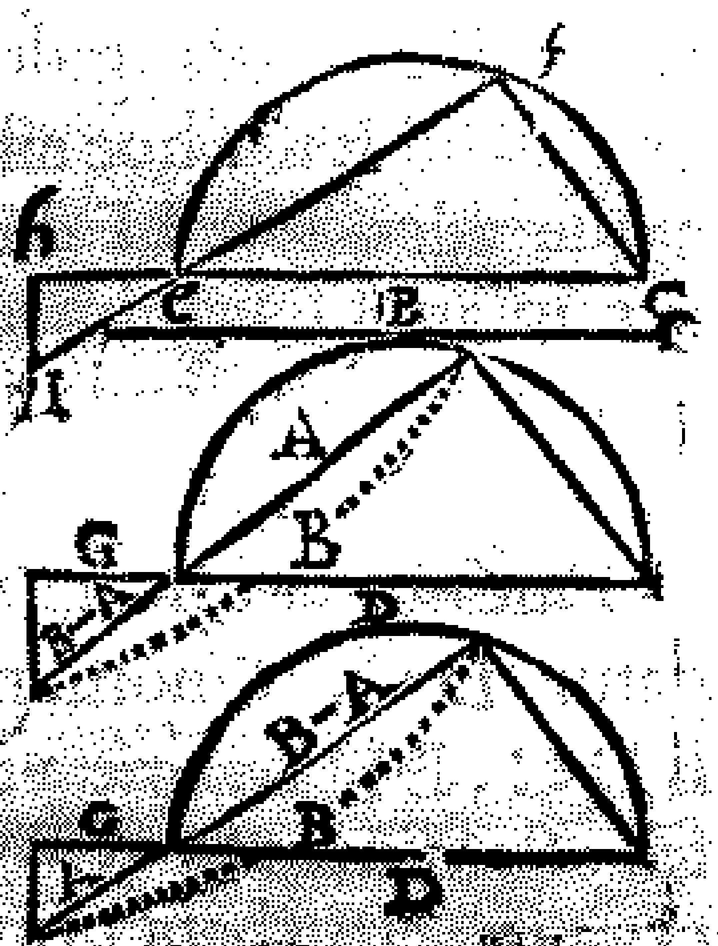
A

Resolutio Tertij Casus.

SIt datus semicirculus e f c, è cuius base continuata longitudine minori ipsa base cadat perpendicularis h i, dataque recta linea B: & oporteat facere quod imperatum est. In hoc casu quoniam ex hac semicirculi, & perpendicularis positione non videtur offerri minima interceptarum à perpendiculari, & circumferentia semicirculi, quemadmodum in casibus præcedentibus, ideo determinatio petenda est ex Porismate.

Sit igitur factum ducta scilicet recta i e f æqualis datæ B, & iungatur F C, sitque datarum i f, e c, e h, prima B, secunda D, tertia G, & quæratur alterutra partium e i, e f, ea esto A, ergo reliqua

B erit B -- A, & propter similitudinem triangulorum e f c, e h i, erit vt e f ad e c, ita e h ad e i, hoc est in figuris ad resolutionem pertinentibus, proportionales erunt.



A D G B -- A

Vel B -- A D G A

Et factum sub extremis æquale erit facto sub medijs, hoc est

B in A -- A Q æquabitur D in G.

Et explicata æquatione B $\frac{1}{2}$ + L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

C Vel B $\frac{1}{2}$ -- L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

Et in hac quoque æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum primus indicat maiorem quæsitarum e f, e i, secundus minorem.

Porisma.

Dimidia f i protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ f i superat rectangulum h e c, æqualis est maiori partium e f, e i, contracta verò, minori.

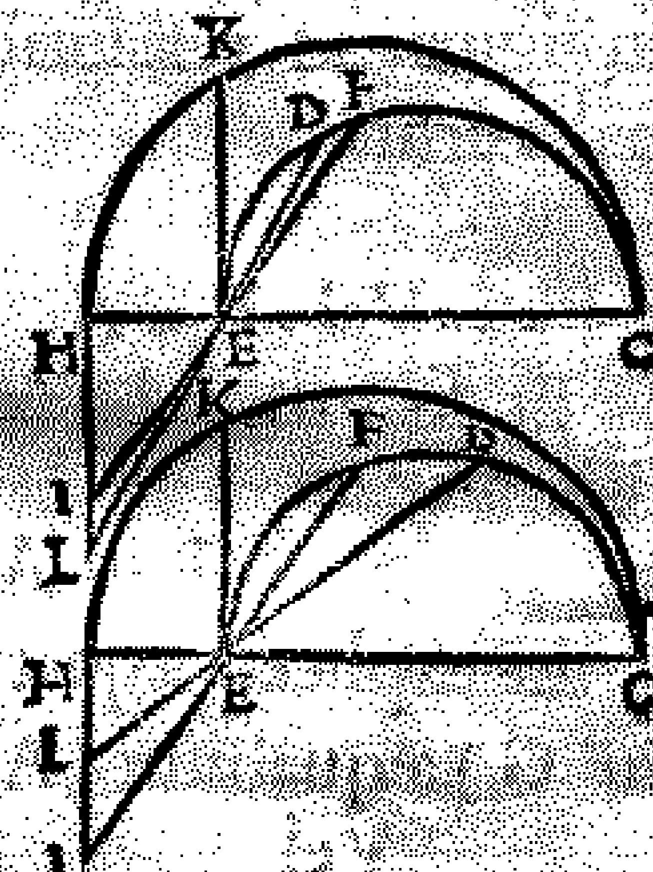
Ex hoc Porismate apparet, dimidiam B, non esse minorem mediâ pro-

D portionali inter rectas e h, e c. Porisma enim indicat quadratum dimidiæ B non esse minus rectangulo h e c; iubet enim auferri rectangulum illud à quadrato dimidiæ B, minus videlicet à maiori, vel saltem æquale ab æquali, non autem maius à minori; neque enim, vt dictum est, Porisma iubet, quod fieri non potest. Determinatio igitur tertij Casus, quam dixi ex Porismate petendam, hæc erit.

Determinatio tertij Casus,

OPortebit datam B non esse minorem dupla media proportionali inter H E, E C. Nam ipsa media dupla minima est omnium interceptarũ à perpendiculari H I, & circumferentia E F C; quod quidem sic demonstrabitur.

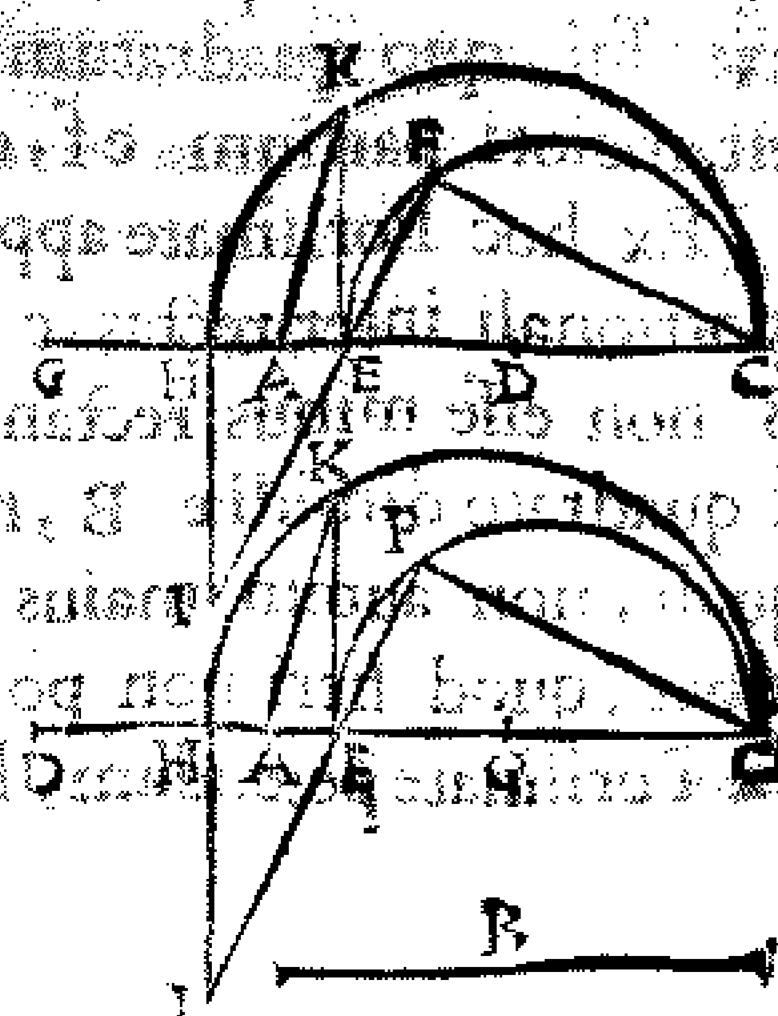
Resumatur antecedens figura, & describatur in H C semicirculus secans E k ipsi H C perpendicularem in k, erit ergo E k media proportionalis inter E H, E C. Accommodetur autem in semicirculo E F C recta E F æqualis E k, eaque producta secet perpendicularem H I in I, & iungatur F C. erit ob similitudinem triangulorum E F C, E H I vt E C ad E F, ita E I ad E H, sed vt E C ad E K, hoc est ad E F, ita est E F ad E H, * ergo E F æqualis erit E I, atque adeo tota I F dupla erit ipsius E K. Dico igitur ipsam I F minimam esse omnium ductarum per E, quæ à perpendiculari H I, & circumferentia E F C intercipiuntur.



Ducatur enim alia recta vtcumque L E D, & iungatur D C. Quoniam igitur similia sunt triangula E D C, E H L, erit vt E D ad E C, ita E H ad E L; sed ostensum est, vt E C ad E F, ita esse E I ad E H, ergo in perturbata proportione erit vt E D ad E F, ita E I ad E L, sed in prima quidem figura maxima est E L, minima E D; in secunda vero maxima est E D, minima E L, vtroque igitur Casu L D cum sit composita ex maxima, & minima, maior erit, quàm I F composita ex reliquis. & sic demonstrabitur I F minor omnibus alijs. Minima est igitur I F, quod erat ostendendum.

Compositio tertij Casus.

SIt datus semicirculus E F C, vt dictum est; data autem recta linea B, quæ non sit minor dupla proportionali inter H E, E C. & oporteat facere quod imperatum est. Describatur in H C semicirculus, quem acta perpendicularis E k secet in k, & in E H ponatur k A æqualis dimidiæ B; est autem dimidia B non minor, quàm K E, cum tota B non sit minor quàm dupla E k, ex Determinatione: Deinde producatur A H in G, vt sit A G æqualis A K, & in H I ponatur E I æqualis E G, eaque producatur ad circumferentiam in F.

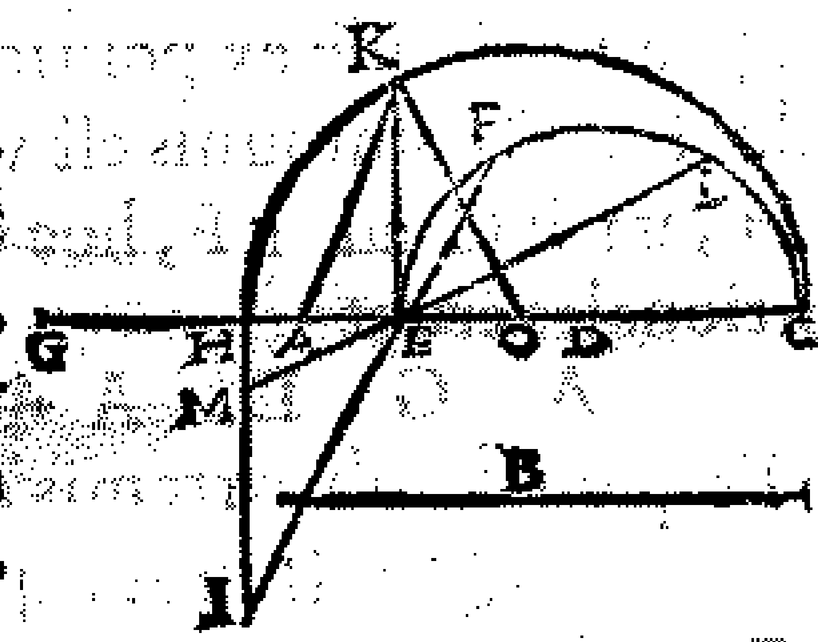


Vel vt in secunda figura sumatur in A C recta A G æqualis A K, & in-

se-

A ſemicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, eaque producatur in I. ſiue hoc, ſiue altero modo fiat conſtructio, ea facta erit quemadmodum Poriſma iubet. rectamque I E F æqualem eſſe datæ B demonſtrabitur eadem ratione, qua in antecedenti Caſu immo eadem verborum textura. quare ijs repetitis habebis demonſtrationem.

Quando autem data B maior eſt, quam dupla E k, non autem quàm H C, poſsibile eſt per punctum E ducere duas rectas lineas, quarum vtraque inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C interiecta æqualis erit datæ B

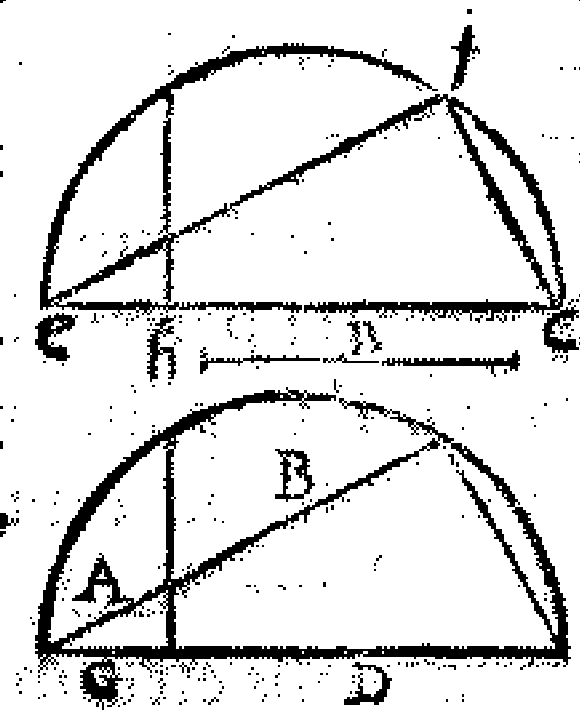


Repetatur enim eadem conſtructio, quæ ſupra, & ſit inter perpendicularem H I, & circumferen-
B tiam E F C poſita recta I E F æqualis ipſi B, & à puncto K ad centrum circuli H k C, quod ſit O, ducatur K O, ea non erit minor, quàm k A, cui æqualis eſt dimidia B, cum & H C ponatur non minor quàm B, quare neque quadratum K O minus erit quadrato k A; hoc eſt neque quadrata K E, E O minora erunt quadratis k E, E A, atque ablato communi quadrato K E, reliquum quadratum E O non erit minus reliquo quadrato E A; nec ideo recta E O minor, quàm recta E A, ſed & O C non eſt minor quàm A G, ergo tota E C non erit minor quam E G tota. Accommodetur igitur in ſemicirculo E F C recta E L
C æqualis E G, vel E I, & producatur donec ſecet perpendicularem H I in M, & iungatur L C. Quoniam igitur propter ſimilitudinem triangulorum E L C, E H M eſt vt E L ad E C, ita E H ad E M, & propter ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E C ad E F, ita E I ad E H, erit in perturbata proportione, vt E L ad E F, ita E I ad E M, ſed E L prima æqualis eſt tertiæ E I, ex conſtructione, ergo & ſecunda E F æqualis erit E M quartæ, & conſequenter tota M L æqualis toti I F, atque adeo vtraque æqualis B datæ.

Idem autem Caſus poterit conſtrui alia quoque ratione in eodem Poriſmate expoſita, vbi enim in ſemicirculo E F C accommodata eſt recta E L æqualis E G, vel E I, hic, omiſſa ea accommodatione ponatur in H I recta E M æqualis E D, vel E F, ſi quidem ipſa E D, vel E F non eſt minor quam
D E H, quia cum ſit ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E C ad E F, ita E I ad E H, atque E C prima non minor, quam tertia E I, vel E C, vt demonſtrauimus ſupra, erit & ſecunda E F non minor, quàm E H quarta. Ipſa autem M E producatur ad circumferentiam E F C in L, & iungatur L C, erit igitur ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E F ad E C, ita E H ad E I, ſed vt E C ad E L, ita eſt E M ad E H, ob ſimilitudinem triangulorum E L C, E H M, ergo in perturbata proportione, vt E F ad E L, ita erit E M ad E I, ſed E F prima æqualis eſt E M tertiæ, ex conſtructione, ergo & ſecunda E L æqualis erit quartæ E I; itaque tota I F æqualis erit, toti M L, & per conſequens vtraque æqualis B datæ.

Resolutio quarti Casus.

Sit datus semicirculus E F C, in cuius basim cadat perpendicularis I H data autem recta linea B, quæ non sit maior quàm H C. Oportet inter perpendicularem H I, & cauam circumferentiam E F C ponere rectam lineam æqualem ipsi B, ita vt ad punctum E pertingat.



Sit factum & sit ea recta I F, & connectatur F C. Sit autem datarum I F, E C, E H prima B, secunda D, tertia G, & quæratur E I. ea esto A. Quoniam igitur similia sunt triangula EHI, E F C, anguli enim E H I, EFC sunt æquales, quia recti, ille ex positione, hic ex vi semicirculi & angulus F E C communis est vtrique triangulo, erit vt E I ad E H, ita E C ad E F, hoc est in resolutionis figura, proportionales erunt

A G D A + B

Et quod fit sub extremis æquale erit ei quod fit sub medijs, nempe

A Q + B in A æquabitur G in D.

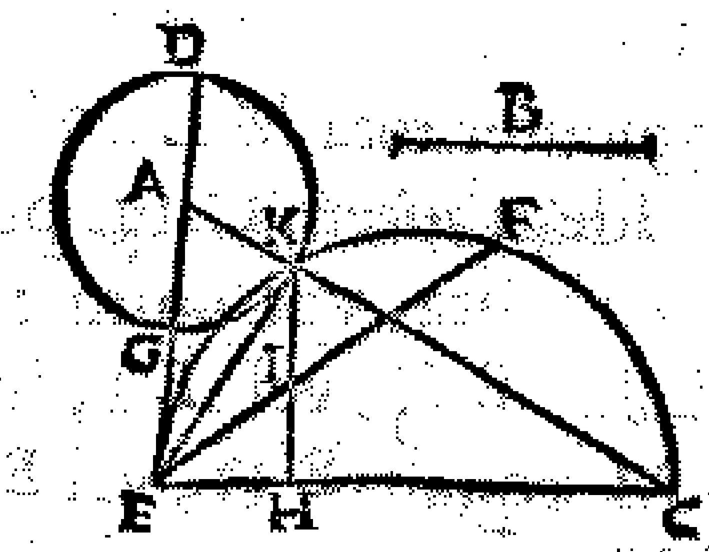
Et explicata æquatione L. V. (B Q ¼ + G in D) -- ½ æquabitur A.

Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ I F, & rectangulo H E C contracta eadem dimidia I F æqualis est rectæ E I.

Datur ergo E I quæsita.

Compositio quarti Casus.



Sit datus semicirculus E F C, vt supra, & oporteat facere quod imperatum est. Si data B, æqualis sit rectæ H C, factum iam erit quod proponitur. Si vero sit minor secet recta H I circumferentiam in k, & connectatur E K, K C. angulus igitur E K C in semicirculo rectus erit, & ideo E K* media proportionalis inter H E, E C, ac proinde quadratum E k* æquale rectangulo H E C, producatur autem C k in A, vt sit k A æqualis dimidiæ B, & connectatur A E eius quadratum æquale erit quadratis A k, K E; hoc est quadrato dimidiæ B, & rectangulo H E C. Itaque à recta A E auferatur AG æqualis dimidiæ B, residuæ vero E G ponatur in H k æqualis E I, sic Porisma iubet. inferius autem ostendetur ipsa A G maior, quàm A H producta; denique E I ad circumferentiam in F. Dico I F æqualem esse datæ B. Connectatur enim F C, & centro A interuallo A G, vel A K describatur circulus quem E A producta secet in D, is circulus tangit rectam E k in k; angulus enim AK E rectus est, cum sit rectus & angulus E k C in semicirculo, & ideo

Corol 8 sexti 17 sexti

re-

A rectangulum G E D æquabitur quadrato E K hoc est rectangulo H E C, quare vt G E, hoc est E I ad E H, ita erit E C ad E D; sed vt E I ad E H, ita est quoque E C ad E F, propter similitudinem triangulorum E H I, E F C, anguli enim E H I, E F C sunt æquales, quia recti, & angulus I E H communis est vtrique triangulo, ergo E F æqualis erit E D, demptis æqualibus E I, E G, reliqua I F reliquæ G D, hoc est datæ B, æqualis erit, quod erat ostendendum. Posita est igitur recta I F, vt facere oportebat.

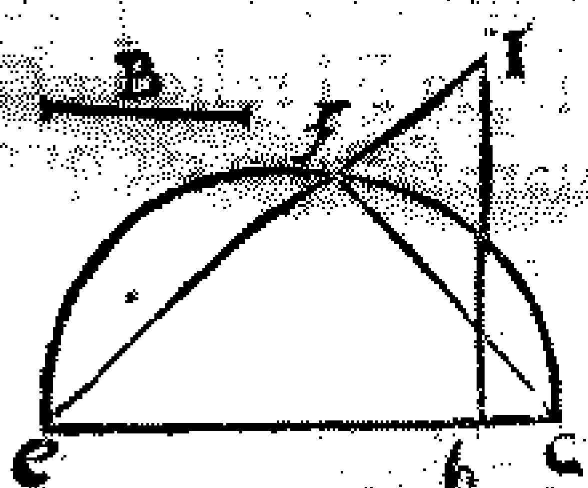
At vero E G maiorem esse, quàm E H sic demonstrabimus. sit enim, si fieri potest, non maior, ergo cum G D cui æqualis est B, minor sit, quàm H C, vt ponitur, erit & tota E D minor, quàm tota E C, atque adeo rectangulum G E D minus erit rectangulo H E C, hoc est* quadrato E k, quod est Corol. 8 sexti
B absurdum; rectangulum enim G E D quadrato E k æquale est. Maior est igitur E G, quàm E H, quod erat ostendendum. Rectam autem H C maximam esse omnium, quæ à puncto E ductæ inter perpendicularem k H, & cauam circumferentiam K C interijciuntur, sic ostendemus.

Ducatur enim alia vtrumque recta E I F; ea minor erit, quàm E C; sed & E H minor est quàm E I, ergo reliqua H C maior erit, quàm reliqua I F: & sic ipsa H C ostendetur omnibus alijs maior: Maxima est igitur omnium H C, quod erat ostendendum.

Resolutio quinti casus.

C Sit datus semicirculus E F C, in cuius basim cadat perpendicularis I H: data autem recta linea B: & oporteat inter ipsam perpendicularem, & conuexam circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam æqualem ipsi B, ita vt ad punctum E pertingat.

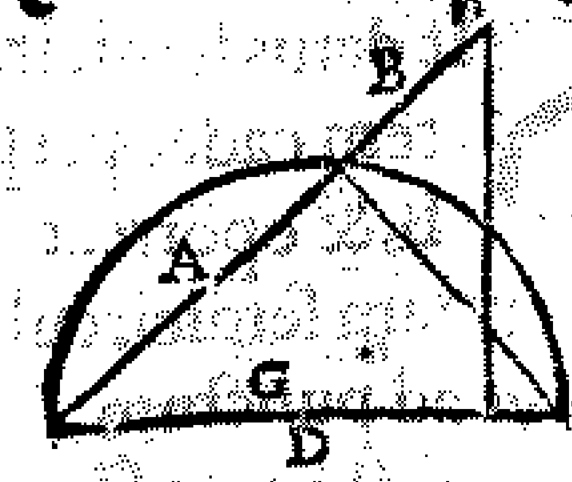
Sit factum, & sit ea recta F I, & iungatur F C, sitque datarum F I, E C, E H prima B, secunda D, tertia G, & quæratur E F. ea esto A. Quoniam igitur similia sunt triangula E F C, E H I, angulus enim E F C, cum sit in semicirculo rectus est, & ideo æqualis recto E H I, & angulus E communis est vtrique, erit vt E F ad E C, ita E H ad E I, hoc est in figura resolutionis, proportio-
D nales erunt



A D G A ✝ B

Et quod fit sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs nempe

AQ ✝ B in A æquabitur D in G



Et explicata æquatione L. V. (BQ $\frac{1}{4}$ ✝ D in G) − B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

Po-

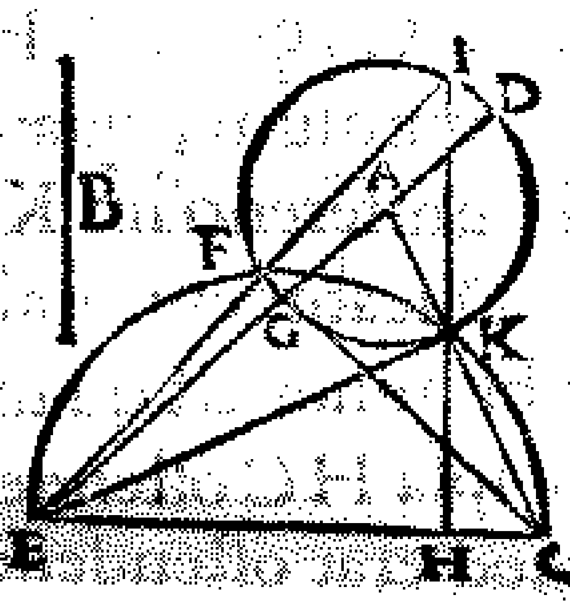
Porisma,

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ F I, & rectangulo H E C; contracta eadem dimidia F I æqualis est rectæ E F.

Datur ergo E F quæsita.

Compositio quinti Casus.

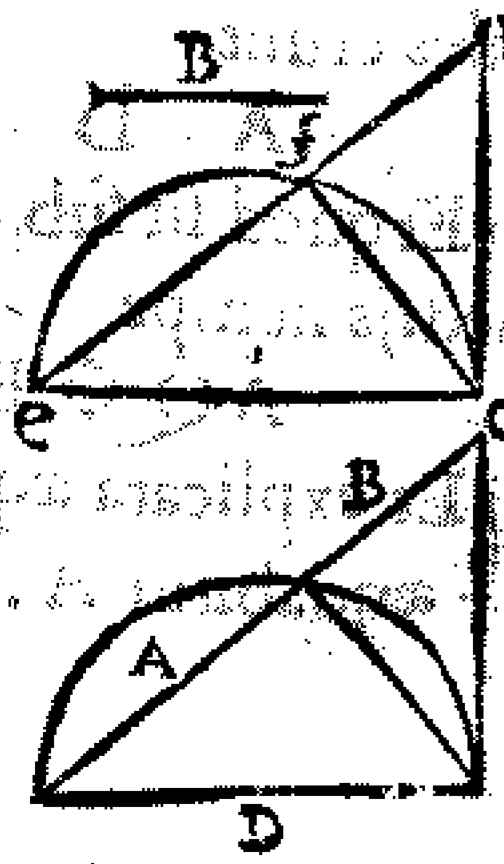
SIt datus semicirculus E F C, vt supra, & oporteat facere quod propositum est. Ducantur ad punctum k, in quo perpendicularis I H secat circumferentiam E F C rectæ E K, C K, ipsaque C K, producatur in A, vt sit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A, ab eaque abscindatur A G æqualis A k, & in semicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, & producatur vsq; ad perpendicularem H I. Factum est igitur quemadmodum Porisma docet: à recta enim A E, cuius quadratum æquale est quadratis A K, K E, hoc est quadrato dimidiæ B, & rectangulo H E C, ablata est A G æqualis dimidiæ B, & residuæ E G aptata est in semicirculo æqualis E F. Rectam autem F I æqualem esse datæ B, ita fit manifestum.



Iungatur enim F C & centro A interuallo A E, vel A G describatur circulus secans E A productam in D, is circulus tangit rectam E K in K, rectus est enim angulus A K E, cum sit rectus & angulus E k C in semicirculo, & propterea rectangulum G E D æquale erit quadrato E k, hoc est rectangulo H E C, quare vt G E seu E F ad E C, ita erit E H ad E D, sed vt E F ad E C, ita est quoque E H ad E I ob similitudinem triangulorum E F C, E H I, quorum anguli E F C, E H I sunt recti, & ideo æquales, & angulus I E H communis est. vtrique ergo E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc est datæ B æqualis erit: quod erat ostendendum: quare factum est quod oportebat.

Resolutio Sexti Casus.

SIt datus semicirculus E F C, in cuius basis extremitatem cadat perpendicularis I C; data autem recta linea B, & oporteat, inter ipsam perpendicularem, & circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam æqualem ipsi B, ita vt ad punctum E pertingat.



Sit factum & sit ea recta F I, & connectatur F C. sintque datarum F I, E C, prima B, secunda D, & quæratur E F ea esto A. Quoniam igitur angulus E F C in semicirculo rectus est, erit E C * media proportionalis inter E F, E I idest in resolutionis figura proportionales erunt.

Corol. 8 sexti

A D

A A D A + B

Et quod fit sub extremis æquabitur quadrato mediæ hoc est

A Q + B in A æquabitur D Q.

Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ + D Q) -- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A

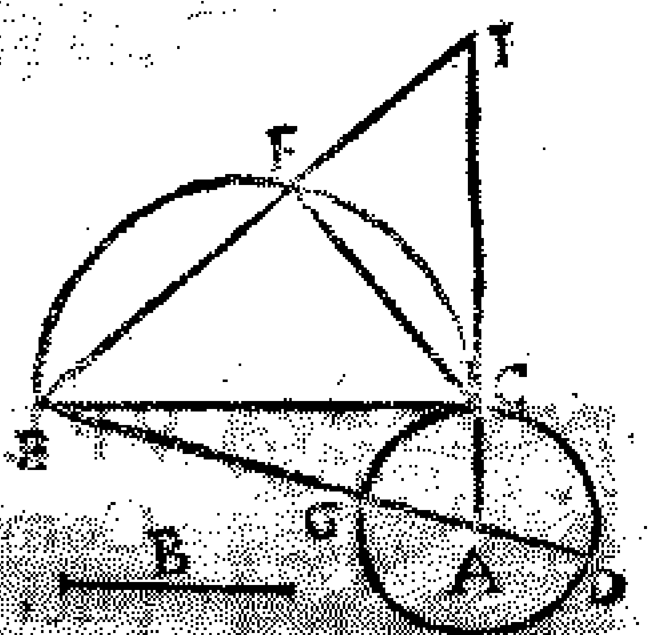
Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadratis E C, & dimidiæ F I, contracta eadem dimidia F I, æqualis est rectæ E F.

Datur ergo E F quæsita.

B

Compositio Sexti Casus.



Sit datus semicirculus E F C, vt dictum est, & oporteat iussum facere. Producatur I C in A, vt sit C A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A. eius quadratũ æquale erit quadratis E C, & C A, hoc est, & dimidiæ B, à recta igitur E A auferatur A G æqualis dimidiæ B, & reliquæ E G accommodetur in semicirculo æqualis E F, eaque producta secet perpendicularem C I in I, hæc constructio habetur ex Porismate. Rectam autem F I æqualem esse datæ B, ita ostendetur. Iungatur enim F C, &

C describatur ex centro A ad interuallum A C, vel A G circulus secans E A continuatam in D is circulus tanget rectam E C, in C, cum sit rectus angulus E C A, & ideo rectangulum G E D * æquale erit quadrato E C, vnde recta 16 tertij

E C erit media proportionalis inter E G, E D; sed eadem E C est quoque * Corol. 8 sexti

media proportionalis inter E F, E I, cum sit rectus angulus E F C in semicirculo, atque est E F æqualis E G, ex constructione, ergo & E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc est datæ B, æqualis erit quod erat ostendendum. Factum est igitur quod oportuit.

Finis Libri Tertij.

MA-

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

LIBER QVARTVS.

SVPERIORI libro exposui exempla ad Resolutionem, & Compositionem pertinentia, vbi quadrata in æquationibus simplici affectione implicantur, idest simplici plano sub latere, & data coefficiente lõgitudine, & ideo absque difficultate Æquationes ipsæ explicantur, ac deinde Compositiones, quæ inde deducuntur, facili opera perficiuntur. Nunc venio ad Resolutionem, & Compositionem difficiliorum Problematum, vbi quadrata implexis affectionibus obuoluuntur, idest vel pluribus planis, partim affirmatis, partim negatis; vel etiam planis sub latere, & aliqua longitudine, non quidem ex se data, sed ad datam ex se, datam habente rationem, quo fit vt æquationes difficilius explicentur, atque adeo Compositiones, quæ ab ipsis proficiscuntur fiant difficiliores.

Theorema I.

Si quatuor magnitudinum proportionalium vna extremarum, aut mediarum fuerit maxima, altera minima erit.

SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D, sitque A ad B, vt C ad D, & sit vna extremarum vtpote A omnium maxima. Dico alteram extremam D minimam esse. Quoniam enim maxima ponitur A prima, ea maior est quàm C tertia, ergo & secunda B maior est, quàm D quarta. & cum sit, vt A ad B, ita C ad D, A autem maior quàm B, erit & C maior quàm D. itaque ipsa D omnium est minima.

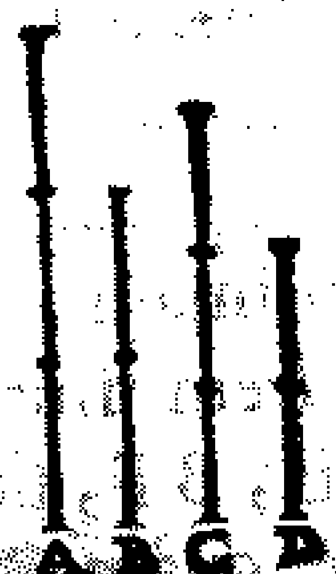
Sed

A SEd sit maxima vna mediarum vtpote B. Dico alteram mediam C minimam esse; Quoniam enim vt A ad B minor nempè ad maiorem, ita est C ad D, erit & C minor quam D, & cum sit, vt A ad B, ita C ad D erit conuertendo vt B ad A, ita D ad C, est autem B maior quam D, cum sit omnium maxima, ergo & A, quàm E C maior erit. Minima est igitur omnium C. quare constat propositum.

Theorema II.

Si composita ex extremis quatuor magnitudinum proportionalium fuerit maior, quam composita ex medijs, vel differentia extremarum maior, quam B differentia mediarum, altera extremarum maxima erit, altera minima, sin minor altera mediarum maxima, altera minima erit.

SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D, sitque composita ex extremis A D maior, quã composita ex medijs B C. Dico alterã extremarum A D maximam esse, alteram minimam. Si enim fieri potest neutra ipsarum A D sit maxima, ergo maxima erit vna ex medijs B C & * consequenter altera minima, quare composita ex maxima & minima, hoc est ex B C, * maior erit quam composita ex reliquis, quod est absurdum; ponitur enim composita ex A D maior, C quam composita ex B C. Cum igitur neutra mediarum sit maxima, erit maxima vna extremarum, & per consequens * altera minima. Eadem ratione ostendemus si composita ex extremis fuerit minor, quam composita ex medijs, alteram mediarum, maxima esse alteram minimam.



ex antec.

ex quinti

ex antec

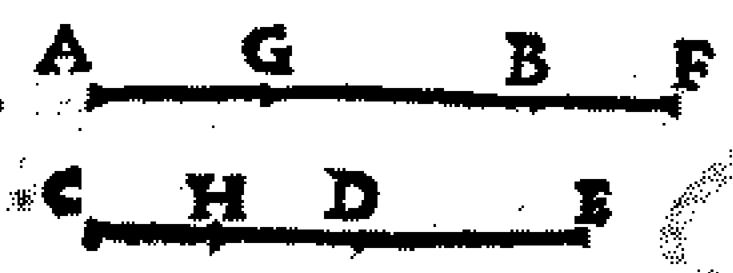
Rursus sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F differentia extremarum A B, B F maior quam C E differentia mediarum C D, D E. Dico A B maximam esse, F B minimam. Si enim fieri potest non sit maxima A B, ergo C D maxima erit, & consequenter * D E minima: itaque D E minor erit, quàm B F; quare reliqua E C maior, quàm reliqua F A. quod est absurdum; ponitur enim A F maior quàm C E. Non igitur maxima est C D, quare A B maxima erit, & * consequenter B F minima. Eadem ratione ostendemus si differentia extremarnm fuerit minor, quàm differentia mediarum, alteram mediarum maximam esse, alteram minimam. Quare constat propositum.

ex antec.

ex antec.

Hoc Theorema demonstrauimus ratione ducente ad impossibile, sed tamen possumus etiam recta demonstratione vti hoc modo.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F composita ex extremis maior quàm C E composita ex medijs. Dico alteram extremarum A B, B F maximam esse, alteram mini-

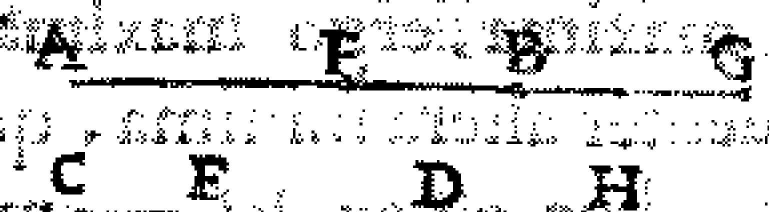


mam. Sit enim A B maior, quam B F, & C D non minor, quam D E; possunt enim C D, D E esse quoque æquales. Quoniam igitur A B ponitur maior, quàm B F, & C D non minor quam D E, erit B F minor, quàm C D: alioquin rectangulum A B F sub extremis maius esset rectangulo C D E sub medijs; quod esset absurdum. Sumatur ergo D H æqualis F B, & B G æqualis E D: erit G F æqualis H E, vnde reliqua A G maior erit, quàm reliqua C H, ponitur enim tota A F maior, quàm tota C E.

Et quoniam est, vt A B ad C D, ita D E ad B F; erit permutando vt A B ad D E, hoc est ab B G, ita C D ad B F, hoc est ad D H, & diuidendo, vt A G ad G B, ita erit C H ad H D, sed A G ostensa est maior, quam C H, ergo & G B maior erit quam H D; atque adeo tota A B maior, quàm tota C D, & consequenter maior etiam, quàm D E, ponitur enim C D non minor, quàm D E, itaque A B maxima erit proportionalium, & per * consequens B F minima.

ex antec.

Rursus sint quatuor proportionales C D, A B, B F, D E, sed C E composita ex extremis sit minor quàm A F composita ex medijs. eadem ratione qua supra ostendemus alteram mediarum A B, B F, maximam esse, alteram minimam.



Item sint quatuor proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F differentia extremarum maior, quàm C E differentia mediarum. Dico alteram, extremarum A B, B F maximam esse, alteram minimam. Producatur enim A B in G, vt sit B G æqualis E D. similiter producatur C D in H, vt sit D H æqualis F B, erunt igitur æquales F G, E H, sed A F ponitur maior, quàm C E, ergo tota A G maior erit, quàm tota C H.

Et quoniam est vt A B ad C D, ita D E ad B F, erit permutando, vt A B ad E D, hoc est ad B G, ita C D ad B F, hoc est ad D H, & componendo, vt A G ad G B, ita C H ad H D, sed A G ostensa est maior, quàm C H, ergo & G B maior erit, quàm H D, hoc est E D maior, quàm F B, itaque F B minima erit proportionalium A B, C D, D E, B F, & * consequenter A B maxima.

ex antec.

Denique sint quatuor proportionales C D, A B, B F, D E: sit autem C E differentia extremarum minor, quàm A F differentia mediarum. eadem ratione qua supra ostendemus alteram mediarum A B, B F maximam, alteram minimam esse. quare constat propositum.

Theorema III.

Si composita ex extremis quatuor magnitudinum proportionalium fuerit æqualis compositæ ex medijs, vel differentia extremarum æqualis differentiæ mediarum, maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F composita ex extremis æqualis C E compositæ ex medijs, & sit

AB maior extrema, CD maior media. Dico AB, CD æquales esse, itemque æquales DE, BF; sumatur enim BG æqualis ED, & DH æqualis FB, ergo tota FG æqualis erit toti EH, sed & AF ponitur æqualis CE, ergo & reliqua AG æqualis erit reliquæ CH.

Et quoniam est, vt AB ad CD, ita BE ad BF; erit permutando, vt AB ad ED, hoc est ad BG, ita CD ad BF, hoc est ad DH, & diuidendo, vt AG ad GB, ita erit CH ad HD, sed AG ostensa est; æqualis CH, ergo & GB æqualis erit HD, hoc est ED æqualis FB, minor videlicet mediarum, minori extremarum. & si ab æqualibus AF, CE auferantur æquales FB, DE, reliqua BA reliquæ DC æqualis erit, hoc est maior extrema maiori mediæ.

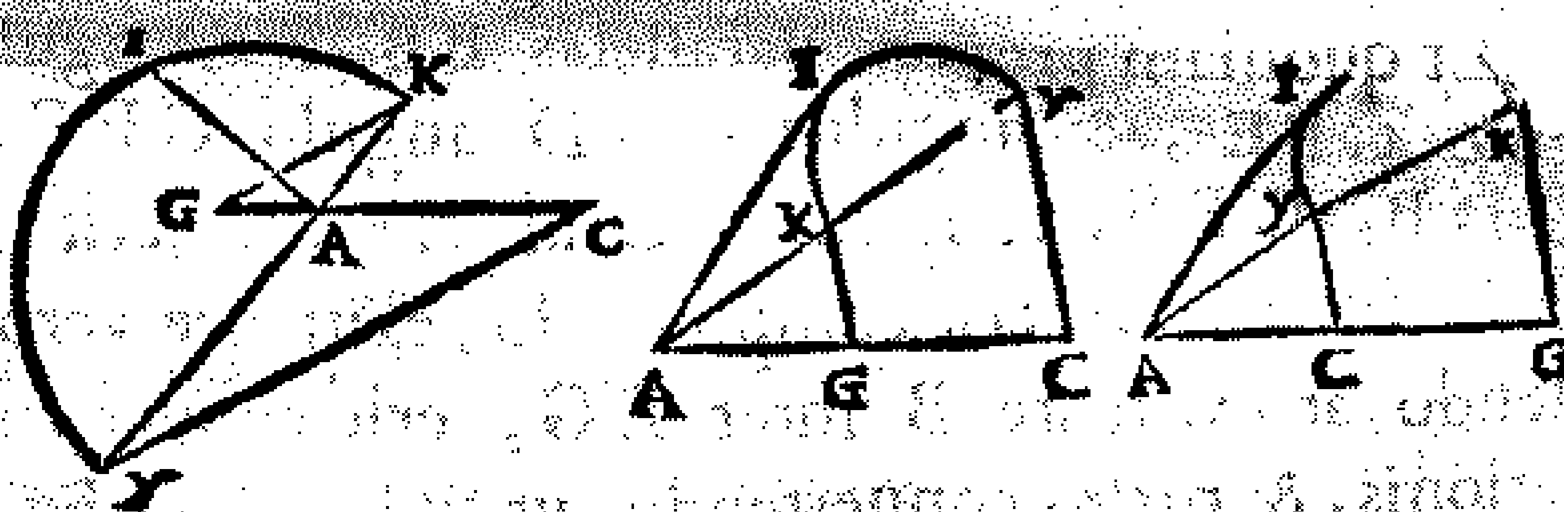
Rursus sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, DH, BG, sitque AG differentia extremarum æqualis CH differentiæ mediarum. Dico AB, CD æquales esse, & æquales DH, BG, producatur enim AB, CD, vt sit BF æqualis DH, & DE æqualis BG. Quoniam igitur BF æqualis est DH, & BG æqualis DE; erit tota FG æqualis toti EH, sed & AG ponitur æqualis CH, ergo tota AF toti CE æqualis erit.

Et quoniam est, vt AB ad CD, ita DH ad BG, erit permutando, vt AB ad DH, hoc est ad BF, ita CD ad BG, hoc est ad DE, & componendo, vt AF ad FB, ita CE ad ED, sed AF ostensa est æqualis CE, ergo & FB æqualis erit ED, hoc est DH æqualis BG, minor videlicet mediarum minori extremarum, sed ponũtur æquales & AG, CH, ergo tota AB toti CD æqualis erit; hoc est maior extrema maiori mediæ. Maior igitur extremarum maiori mediarum minor minori æqualis est, quod erat ostendendum.

Problema I.

Dato quadrato aliud quadratum in data ratione inuenire.

Sit datum quadratum, cuius latus Ak, & data ratio AG ad AC. Oportet inuenire aliud quadratum, vt quadratũ AK ad quadratũ inuentũ habeat rationẽ, vt AG ad AC. Ponatur in directum AG, AC, & ex pũcto A ducatur Ak, ita vt cũ AC constituat angulum quẽcunq;, & iungatur Gk, eiq. parallela ducatur cy occurrens KA productæ in y: in recta autem ky describatur semicirculus yIK, & ex A ipsi ky ducatur perpendicularis AI, vsque ad circumferentiam: si quidem punctum A sit in diametro Ky; si vero sit extra diametrum, ducatur AI contingens semicirculum in I. Quoniam igitur parallelæ sunt Gk, cy, erunt anguli AGK, Acy æquales, & æquales quoque anguli AkG, Ayc; vnde similia triangula AGK, Acy; vt igitur AG ad AC, ita erit Ak ad Ay, sed vt AK ad Ay, ita est quadratum Ak ad quadratum AI, sunt enim tres proportionales Ak,

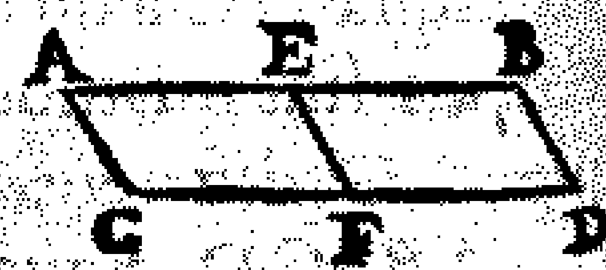


Corol. 2. propos. 20 sexti

A I. A y, & est vt * prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ, ergo vt A G ad A C, ita erit quadratum A K ad quadratum A I. Factum est igitur quod oportebat.

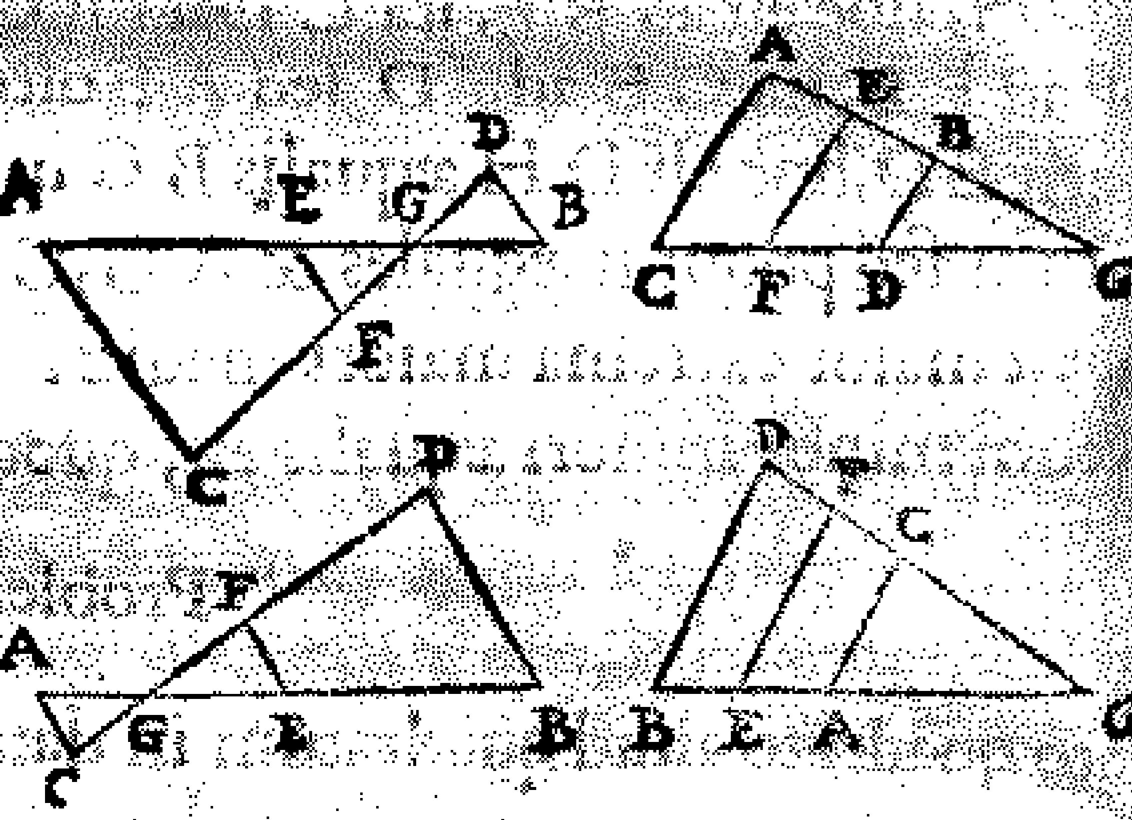
Lemma I.

Si à medio & extremitatibus vnius rectæ lineæ ducantur tres rectæ parallelæ, alteram rectam lineam secantes. Segmenta sectæ inter parallelas interiecta æqualia erunt.



Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, quarum A B secetur bifariam in E, & à punctis A E B. ducantur tres parallelæ A C, E F, B D secantes rectam C D in punctis, C F D. Dico æquales esse C F, F D. Si enim A B, C D sunt parallelæ. parallelogramma sunt A F, F B, ac proinde latera A E, C F ex aduerso æqualia, atque æqualia latera E B, F D, sed ponuntur æquales A E, EB, ergo & C F, F D sunt quoque æquales.

Si vero A B, C D non sunt parallelæ conuenient inter se, conueniant in G, ergo similia erunt triangula G A C, G E F, ob parallelas enim E F, A C angulus G A C æqualis est angulo G E F, & angulus G C A angulo G F E, quare vt A G ad G E, ita erit C G ad G F, & existente quidem puncto E inter puncta A G, erit diuidendo, & conuertendo, existẽte vero G inter A E erit componendo, & conuertendo, existẽte autem A inter E G erit conuertẽdo, & per conuersionem rationis, vt G E ad E A, ita G F ad F C.



Et quoniam propter parallelas B B, E F angulus G D B, æqualis est angulo G F E, & angulus G B D angulo G E F, similia erunt triangula G D B, G F E, vt igitur B G ad G E, ita erit D G ad G F, & existente G inter E B, erit componendo, existente vero E inter G B, erit diuidendo, at existente B inter E G, erit conuertendo, & per conuersionem rationis, & rursus conuertendo, vt B E ad G E, ita D F ad G F; sed vt G E ad E A, ita est G F ad F C, vt demonstrauimus, ergo ex * æquali, erit vt B E ad E A, ita D F ad F C; sed B E æqualis est E A, ergo & D F æqualis erit F C.

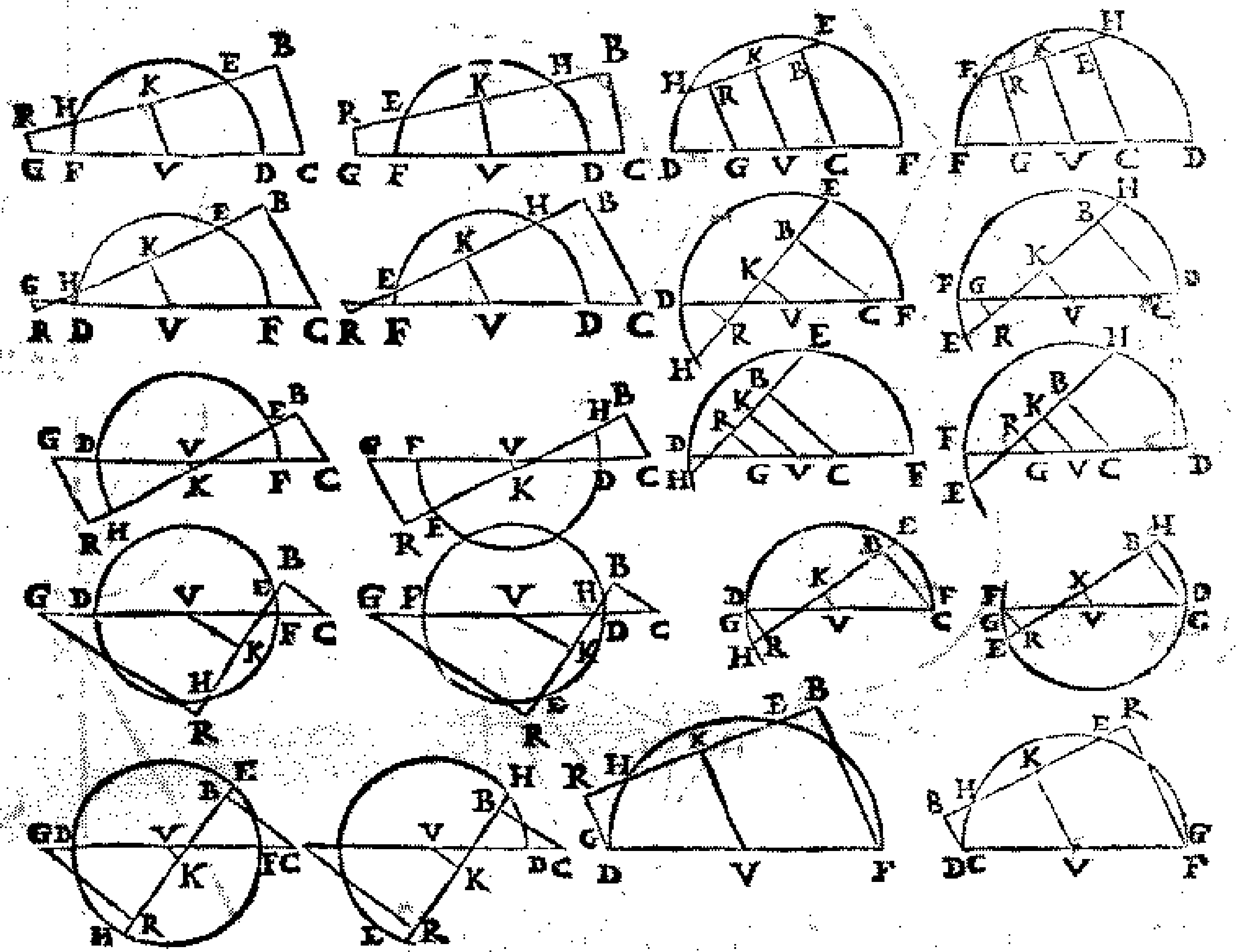
Lemma I I.

Si in diametro circuli, etiam producta, sumantur duo puncta à centro æquè distantia, & ab ijs ducantur ad rectam lineam cadentem in circulum duæ rectæ perpendiculares; Segmenta cadentis inter circumferentiam, & perpendiculares interiecta, æqualia erunt.

Suman-

A Sumantur in diametro circuli D F. duo puncta C G à centro quod ſit V,

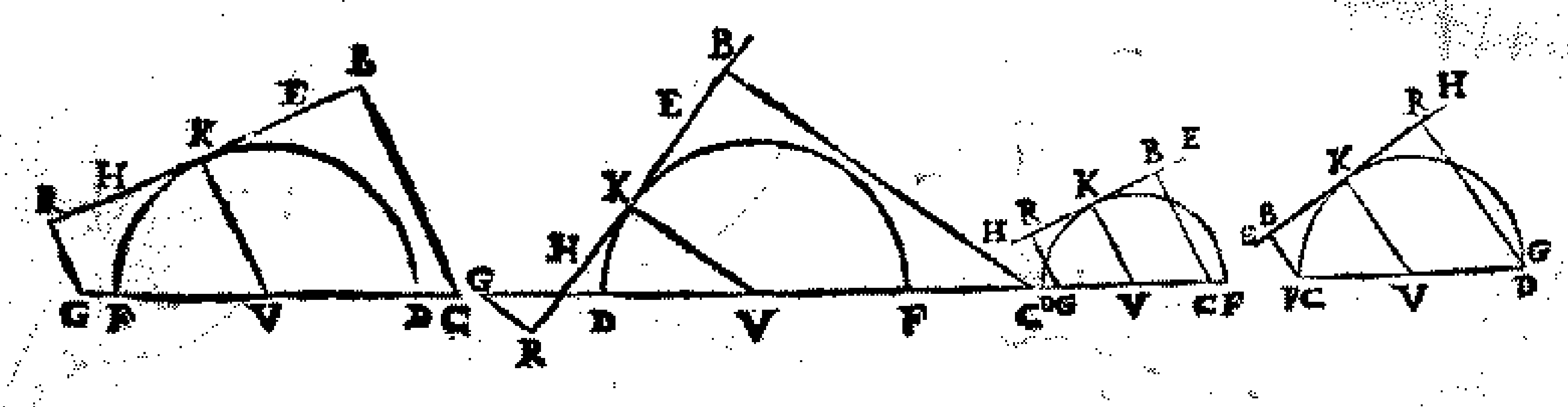
B



æque diſtantia, & ab alijs ad rectam E H cadentem in circulum ducantur duæ perpendiculares C B, G R, ipſa autem E H ſecet circulum in punctis
C E H. Dico E B, H R æquales eſſe. Ducatur enim V K perpendicularis ad E H, erunt igitur tres parallelæ B C, k V, G R atque ſunt æquales G V, V C, ergo ex antecedente Lemmate æquales erunt, & K R, K B, ſed æquales quoque ſunt K H, K E, ergo per æqualium æqualibus ablationem, vel additionem, erunt æquales & E B, H R.

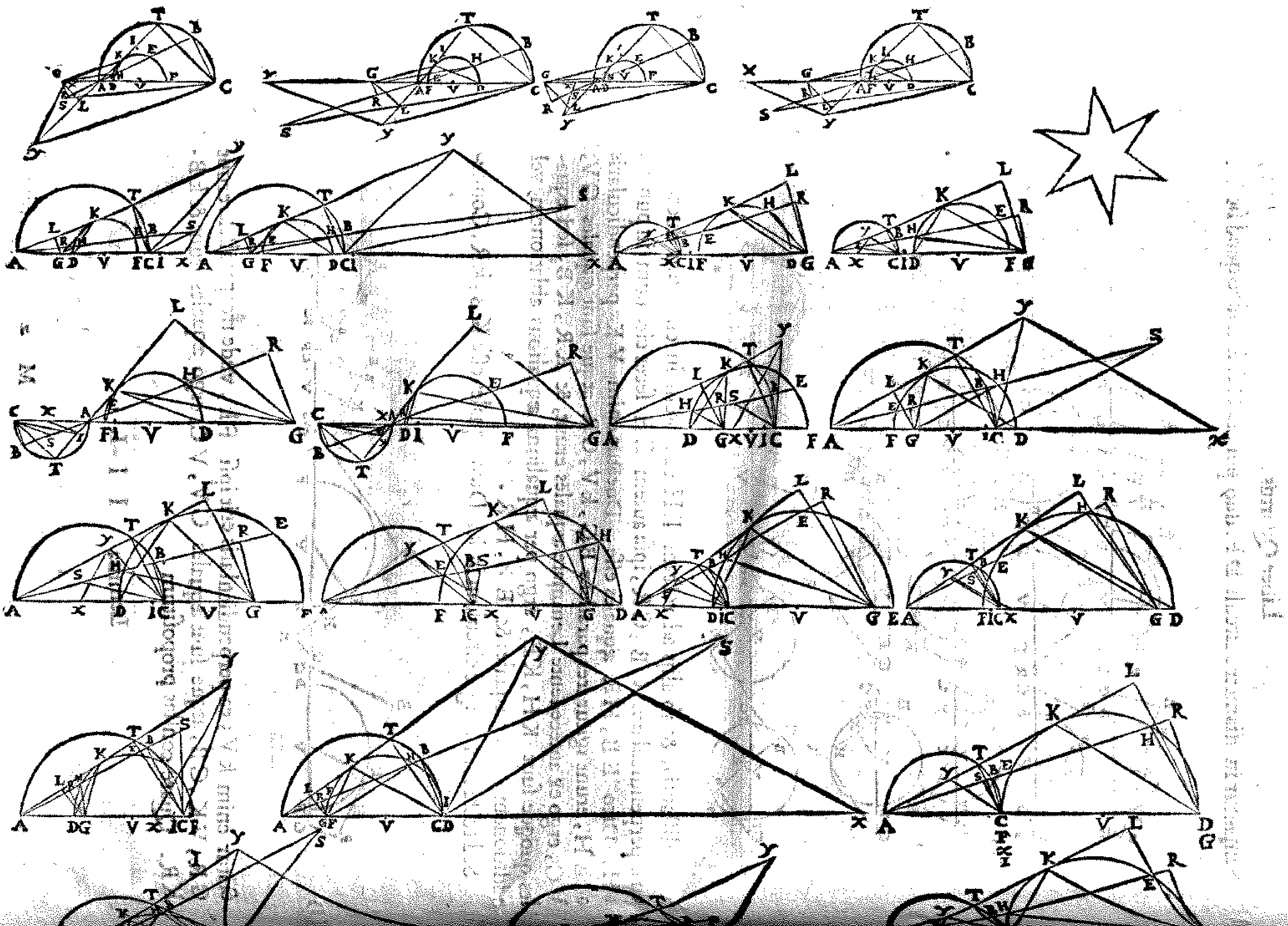
Sed recta E H tanget circulum in k. Dico æquales eſſe K B, k R. Conne-

D



ctatur enim k V; ea perpendicularis erit ipſi F k, vnde tres parallelæ erunt G R, V K, C B, atque ſunt æquales G V, V C, ergo æquales erunt & k B, K R. Quare conſtat propoſitum.

Lemma III.



A Int duo ſemicirculi A B C, D E F in directum baſes habentes, & recta A k contingat ſemicirculum D E F in K, ipſum vero A B C ſecet in T, & ex centro circuli D E F, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & per A ducatur vtcumque recta A E B ſecans circũferentias K F, T C in punctis E B, circumferentiam verò K D in H, & connectantur G H, G k, k D, quibus parallelæ agantur c s, c y, y x ſecantes B A, T A, F A etiam continuatas in punctis S Y X, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratũ A K ad quadratum A I. Dico vt A G ad A C, ita eſſe F C ad c x, & ita E B ad B S, & ita k T ad T Y, atque vnumquodque rectangulorũ Y A k, E A S, F A X quadrato A I æquale eſſe. Probl. 1 huius

Quoniam enim æquales ſunt V G, V C, & æquales quoq; V D, V F, erũt B æquales & D G, F C, & quoniam propter parallelas K D, x y æquales ſunt anguli G D k, c x y, & propter parallelas G K, c y æquales anguli D G k; x c y, ſimilia erunt triangula D G K, x c y; vt igitur G k ad c y, ita erit G D hoc eſt F C ad c x.

Similiter quoniam parallelæ ſunt G k, c y, erunt anguli A G k, A C Y æquales, & æquales quoque anguli A K G, A Y C, & ideo ſimilia triangula A G k, A C Y, quare vt A G ad A C, ita erit G K ad c y, ſed vt G k ad c y, ita oſtenſa eſt F C ad c x; ergo vt A G ad A C, ita erit F C ad c x. quod eſt primum.

Deinde iungatur B C, eique parallela agatur G R ſecans B S in R. angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus, quia & ipſe C A B C in ſemicirculo rectus eſt, vnde H R, * E B æquales erunt. Lem. 2.

Et quoniam parallelæ ſunt G H, c s, erit angulus G H R æqualis angulo c S B, eſt autem & angulus H R G æqualis angulo S B C, rectus nempe recto, ergo ſimilia erunt triangula H R G, S B C; quare vt G H ad C S, ita erit H R, hoc eſt E B ad B S.

Æquè quoniam ob parallelas G H, c s æquales ſunt anguli A G H, A C S, & æquales quoque anguli A H G, A S C, & ideo ſimilia triangula A G H, A c S; erit vt A G ad A C, ita G H ad C S, ſed vt G H ad C S, ita eſt E B ad B S, vt proximè demonſtrauimus, ergo vt A C ad A C, ita erit E B ad B S, quod eſt ſecundum.

Iam connectatur T C, eique parallela agatur G L ſecans Y T in L, erit an-D gulus K G L æqualis angulo A T C, ſed rectus eſt A T C in ſemicirculo, ergo & k L G rectus erit: itaque æquales erunt L k, K T. Et quoniam ſimilia ſunt triangula k L G, Y T C, ſunt enim æquales anguli G K L, C Y T ob parallelas G k, c y, & æquales anguli k L G, Y T C, quia recti, erit vt G K ad c y, ita k L, hoc eſt k T, ad T y, ſed & A G ad A C eſt, vt G k ad c y, ob ſimilitudinem triangulorum A G k, A C Y, ergo vt A G ad A C, ita erit k T ad T y, quod eſt tertium.

Et quoniam propter eandem triangulorum A G K, A c y ſimilitudinem, eſt vt A G ad A C, ita A k ad A y, vt autem A K ad A y ita * eſt quadratum A k ad rectangulum y A k, cum ſint eiuſdem altitudinis A k, ergo vt A G a ſexti

A G ad A C, ita erit quadratum A k ad rectangulum Y A k, sed vt A G ad A C, ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I ergo rectangulum Y A K quadrato A I æquale erit, quod est quartum.

Similiter quoniam supra ostensa sunt similia triangula A G H, A C S, erit
4 sexti vt A G ad A C, ita A H ad A S, sed vt A H, ad A S, * ita est rectangulum E A H ad rectangulum E A S, eandem enim habent altitudinem E A, ergo
36 tertij vt A G ad A C, ita erit rectangulum E A H, hoc est * quadratum A K, ad rectangulum E A S, sed vt A G ad A C, ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I, ergo rectangulũ E A S æquale erit quadrato A I quod est quintum.

Postremo quoniam parallelæ sunt k D, x y, erunt anguli A D K, A X Y æquales, & æquales anguli A K D, A Y k, & ideo similia triangula A D K,
17 sexti A X Y; vt igitur A D ad A k, ita erit A X ad A Y; sed vt A D ad A K * ita est
36 tertij A K ad A F; rectangulum enim F A D * æquatur quadrato A k, ergo vt A X ad A Y, ita erit A K ad A F; vnde rectangulum F A X sub extremis, æquale erit rectangulo Y A k sub medijs, sed rectangulum Y A K æquale est quadrato A I, quarto loco demonstrauimus, ergo & rectangulum F A X eidem quadrato A I æquale erit, quod postremo loco erat ostendendum.

Corollarium.

EX demonstratis patet rectangula Y A k, E A S, F A X æqualia esse, ostensum est enim vnumquodque eorum æquari quadrato A I.

Problema I I.

Datis duobus semicirculis in directum bases habentibus, inter eorum circumferentias ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad vnius semicirculorum angulum pertingat.

HOc Problema multos Casus habet, eosque omnes in secundo libro mei Apollonij Rediuiui in tria capita congestos absolui. nunc octo ex principalibus in exemplum Resolutionis & Compositionis explicabo, omissis ijs in quibus dati duo semicirculi se inuicem secant aut tangunt, ij enim Casus ad illorum similitudinem, & resoluentur & componentur.

Casus primus.

Primum vergant dati duo semicirculi ad eandem partem, neutro reliquum includente.

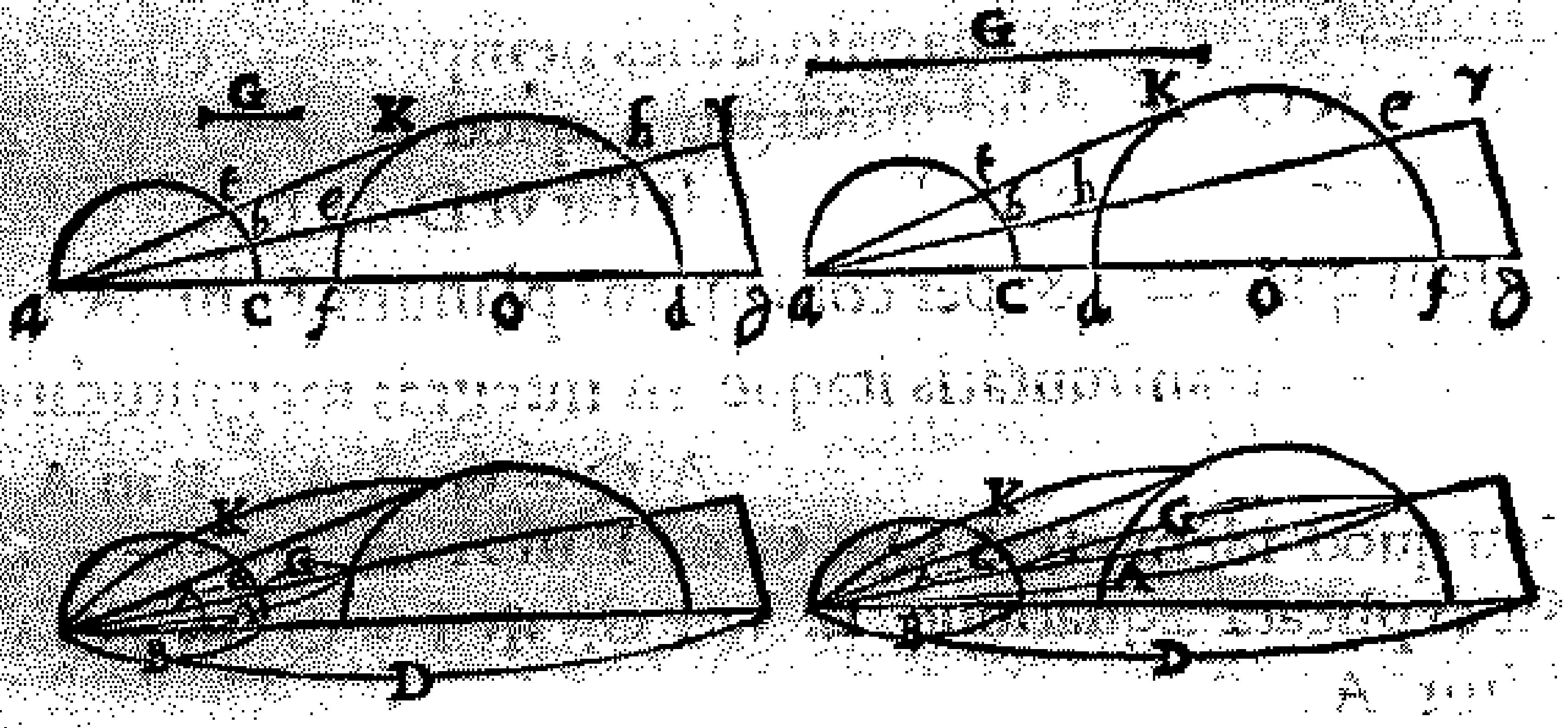
SInt itaque dati duo semicirculi a b c, d e f, vt dictum est, data autem recta linea G. & ducatur a k contingens semicirculum d e f in k; ipsum vero A B C secans in t. Oportet inter circumferentias t c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertingat. Quamuis autem ex hac semicirculorum positione duo Casus oriantur, aut enim

po-

A ponenda est illa magnitudine data inter conuexam vtriusque semicirculi circumferentiam, aut inter conuexam vnius, & cauam alterius, tamen vna, eademque resolutione vtrique satisfit.

Resolutio.

FActum iam sit ducta nimirum recta a b e habens segmentum b e æquale datæ G, & producatur a d in g, vt o g recta ex centro circuli d e f, quod sit o sit æqualis o c, & in a e productam sectamque à circumferentia k d in h ducatur perpendicularis g r, & connectatur c b, eaque eidem a e perpendicularis erit, quoniam angulus a b c in semicirculo rectus Lem. 2.
B est, quare * æquales erunt h r, e b.



Quoniã igitur datæ sunt a c, a g, b e, a k prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinẽtibus designatũ est, & quæratur a e, ea esto A: ergo a b erit A -- G, &
C cum sint anguli a b c, a r g recti, & ideo æquales parallelæ erunt b c, r g, & ob id similia triangula a b c, a r g, quare vt a c, ad a g, ita erit a b ad a r; hoc est in figuris Resolutionis, vt B ad D ita A -- G ad $\frac{D \text{ in } A -- D \text{ in } G}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A -- D \text{ in } G}{B}$, à qua si auferatur recta h r, cui æqualis est e b, reliqua a h erit $\frac{D \text{ in } A -- D \text{ in } G}{B}$ -- G; sed rectangulum e a h æquale est quadrato a K, ergo

$\frac{D \text{ in } AQ -- D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ -- G in A æquabitur KQ

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

D in A Q -- D in G in A -- B in G in A æquabitur K Q in B.

Applicentur omnia ad D, vt potestas æquationis nempe A Q ex se subsi-
D stat, ergo

A Q -- G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ æquabitur $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$

Præcipere autem vt omnia ducantur in B, ac deinde producta applicentur ad D, perinde est ac si dicatur fiat vt D ad B, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alias partes, harum namque partium altera quidem esset A Q -- G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$, altera vero $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$ eadem nempe partes, quæ ex illa ductione, & applicatione procreantur, nam vtrobique eadem est operatio exemplo res fiet illustrior.

$\frac{D \text{ in } A Q -- D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ -- G in A æquetur K Q

& fiat vt D ad B ita $\frac{D \text{ in } A Q -- D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ -- G in A ad alia plana, ea erunt A Q -- G in

in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$, nam A
$\frac{D \text{ in } A\,Q \text{ -- } D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ -- G in A ducitur in B, & productum quod est D in A Q -- D in G in A -- B in G in A applicatur ad D, ex eaque applicatione oritur A Q -- G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$.

Similiter fiat, vt D ad B, ita K Q ad aliud planum id erit $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$; tota igitur hæc progressio fit per plana non autem per solida, & in eandem inciditur æquationem. Hoc monuimus quoniam in demonstratione, quæ ordinanda est per regressum Resolutionis procedetur per proportionem planorum, non autem per æqualitatem solidorum; neque enim opus erit plana in longitudines ducere, solidaque ex huiusmodi ductu facta, ad alias longitudines applicare, vt rursus ad plana deueniant, cum in æqualitatem eorundem planorum incidatur per proportionem planorum progrediendo. B

Vt autem clarior existat æquatio, faciliusque explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines nempe $\frac{K\,Q \text{ in } B}{D}$ esto Z Q, si enim fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum quod sit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$. Similiter $\frac{B \text{ in } G}{D}$ esto F: nam si fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } g}{D}$, & per consequens planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } g \text{ in } a}{D}$, transmutatis itaque in integras magnitudines fractionibus.

A Q -- G in A -- F in A æquabitur Z Q

Seu quod idem est A Q -- G + F in A æquabitur z Q,
Et explicata æquatione L. V. (G $\frac{1}{2}$ + F $\frac{1}{2}$ Q + z Q) ∗ G $\frac{1}{2}$ + F $\frac{1}{2}$ æquabitur A. C

Porisma.

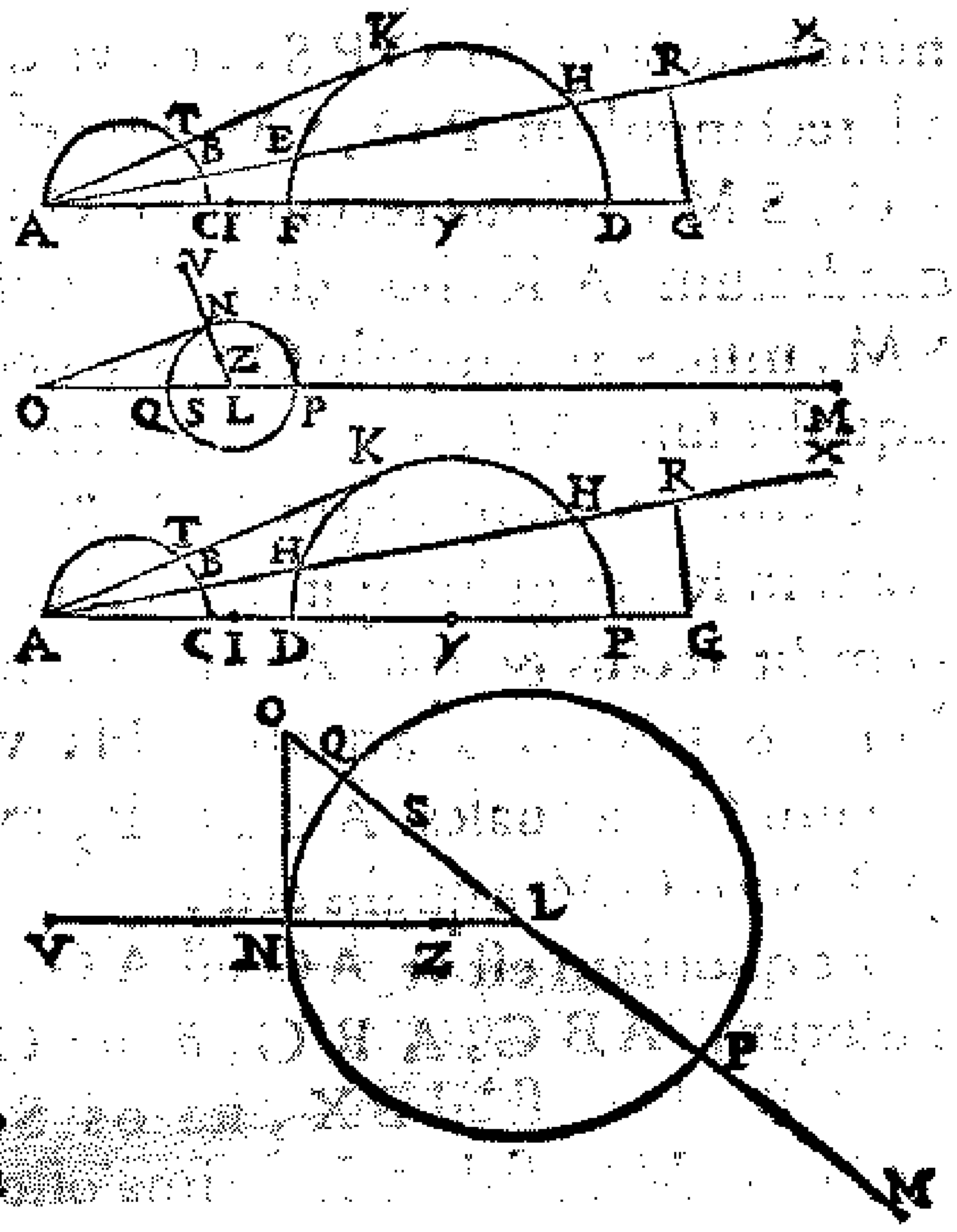
Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F; deinde rectæ cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ compositæ ex G, & F; addita eadem dimidia composita, fiet recta æqualis quæsitæ a e.

Datur igitur a e quæsita.

Compositio.

Sint dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V z, & contingat A K semicirculum D E F in K secet vero ipsum A B C in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum A pertingat. Duo sunt Casus vt in Resolutione dictum est. in primo oportebit datam V z non esse maiorem, quàm K T, nec minorem quam F C. in secundo oportebit non esse maiorem, quam F C, nec minorem quàm K T. Si quidem data V z sit æqualis alteri ipsarum k T, F c: factum iam erit quod proponitur, si vero maior sit minore, minor autem maiore producatur A D in D
Prob. 1 huius G, vt y G recta ex centro circuli D E F, quod sit y, æqualis sit y c, & *fiat

vt



A vt A G ad A C, ita quadratū A K ad aliud quadratū quod sit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L cōposita ex V Z, Z L secetur bifariā in N, eiq. ducatur ad rectos angulos N O æqualis ipsi A I, & connectatur O L. quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L, itaq; rectæ O L addenda est recta æqualis ipsi L N. sic Porisma fieri iubet.

Producatur ergo O L in P, vt sit L P æqualis L N, & à puncto A ad circumferē-
B tiam k F ducatur A E æqualis O P secans circumferentiā T C in B, ipsam autē O P, in primo quidem casu, maiorē esse quàm A F, minorē quàm A K, in secundo vero, minorē quàm A F, maiorē quā AK infra demonstrabitur. Iam facta est constructio Problematis, prout Porisma docet. Nunc ostendendū est B E æqualem esse VZ datæ. Producatur A E, vbi opus exigit donec secet circumferentiā k D in H, & centro L interuallo L N, vel L P describatur circulus secans rectam O P in Q, & sumatur P S æqualis V Z, reliqua S Q æqualis erit reliquæ Z L.

Et quoniam recta O N tangit circulum in N cum sit rectus angulus
C O N L ex constructione; quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, 16 tertij
hoc est quadrato O P, minus rectangulo O P Q, seu minus rectangulis O P S O P S Q. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraq; æqualitatis pars separatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas in Resolutione conuerso modo factum est nempe, vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alia plana. At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I ex constructione, hoc est ad quadratum O N, erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K. quadratum igitur A K erit vna pars æqualitatis, alterum vero sic explorabimus.

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad Z V, seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ sit S M, ea maior erit, quàm S P, quoniam
D & O S maior est, quàm Q S, sed vt O S ad S M ita * est rectangulum P O S 1 sexti
ad rectangulum P O, S M, eandem enim habent altitudiuem P O, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum P O S, hoc est quadratum O P, minus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M; sed vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita * est quoque rectangulum O P, S Q ad rectangulum, 1 sexti
O P S sunt enim eiusdem altitudinis O P. ergo vt quadratum O P, minus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, ita erit rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, hoc est vt totum ad totum ita ablatum ad ablatum, quare & * reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum idest & quadra- 19 quinti
tum O P minus rectangulo O P S, ac etiam minus rectangulo O P, S Q

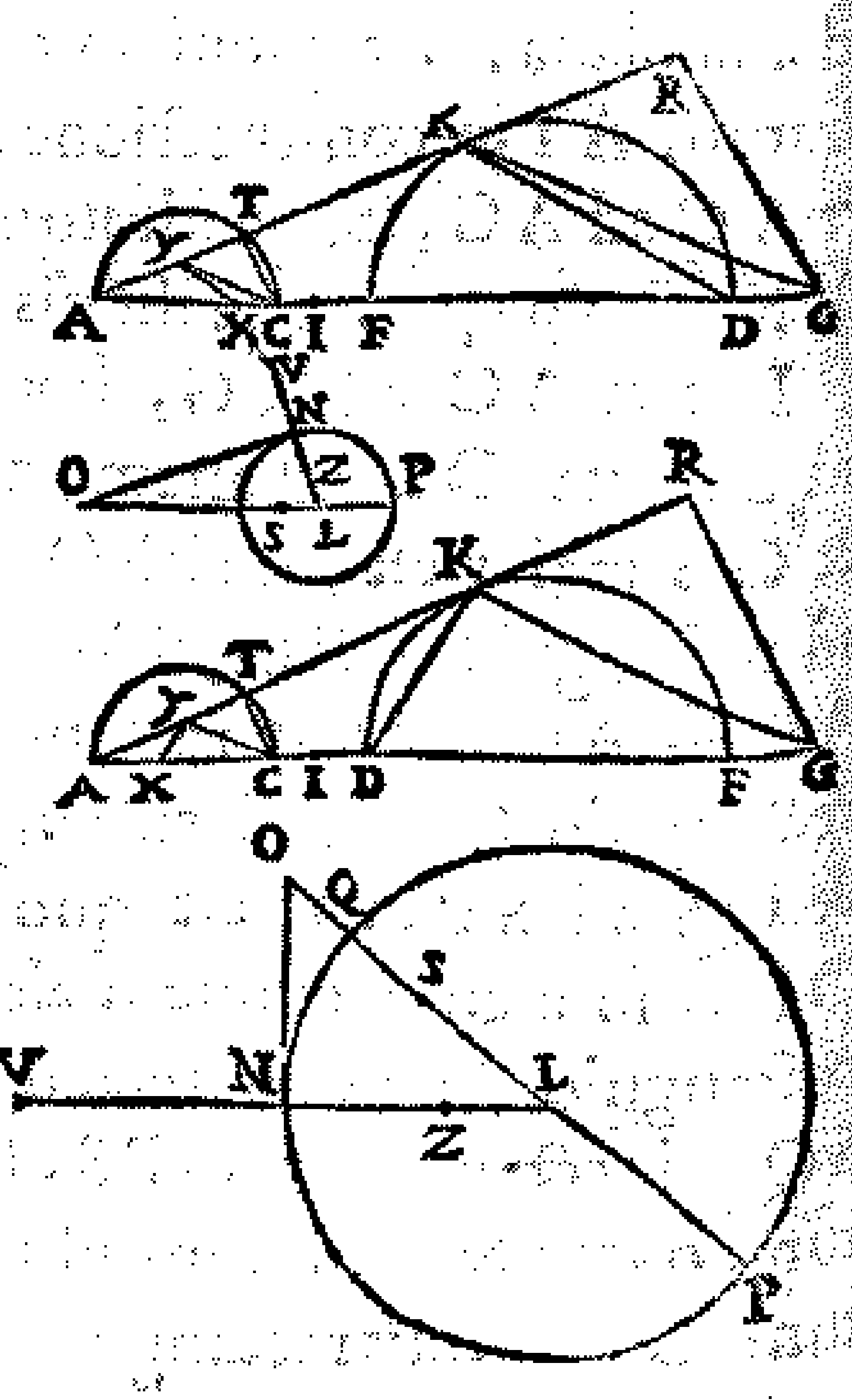
minus

minus rectangulo O P S, erit vt quadratum O P minus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, hoc est vt A C ad A G. Rectangulum igitur P O, S M, minus rectangulo O P S, erit altera pars æqualitatis. Itaque quadratum A K, hoc est rectangulum E A H, æquale erit rectangulo P O, S M, minus rectangulo O P S, hoc est æquale erit rectangulo O P M; sed æquales sunt A E, O P, ex constructione ergo & A H, P M æquales erunt.

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A E productam in R, angulus igitur, A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus cum sit rectus & ipse A B C in semicirculo, quare * æquales erunt E B, H R, & posita E x æquali A H. vel P M tota B X æqualis erit toti A R, & cum sint æquales A E, O P, ex constructione, & æquales e x P M, tota A X toti O M æqualis erit. Lem. 2

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B ad A R ob similitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex constructione, erit vt A B ad A R, hoc est ad B X, ita o s S M, & componendo vt A X ad X B, ita O M ad M S; sed A X prima ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo & secunda X B æqualis erit M S quartæ, vnde ablatis æqualibus e x P M reliqua E B æqualis erit reliquæ P S, hoc est V Z datæ, quod erat ostendendum. Factum est igitur quod oportebat.

Rudis est quidem hæc demonstratio, sed talem Resolutio genuit, & nos nostrum institutum secuti, quod est à vestigijs Resolutionis in Demonstratione non recedere, ipsam demonstrationem per orsum resolutionis texuimus. sic etiam sequentium Casuum demonstrationes texentur. facile autem eas expoliet, qui non ea se lege adstrinxerit, vt per vestigia Resolutionis omnino regrediatur. quemadmodum neglectis ex parte resolutionem vestigijs, demonstrationes omnium Casuum huius Problematis in secundo libro nostri Apollonij Rediuiui explicauimus.



At vero rectam O P in primo quidem Casu maiorem esse quam A F, minorem quam A k, in secundo vero minorem quam A F, maiorem quam A k sic demonstrabimus.

Connectantur G K, K D, eisque parallelæ agantur C y, y x secantes A T, A C in punctis y x, erit * igitur vt A G ad A C, ita F C ad C X, sed vt A G ad A C, ita est quoque V Z ad Z L ex constructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C ad c x, & permutando vt V Z ad F C, ita erit Z L ad c x, quare vt V Z ad F C, ita erit quoque V L hoc est P Q ad F x, hoc est vt vna antecedentium ad vnam consequentium; ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, sed V Z in primo quidem Casu ponitur maior, quam F c, in secun- Lem. 3

do

A do vero minor, ergo & p Q in primo Casu maior erit quam F x, in secundo minor.

Et quoniam rectangulum F A x * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N, seu rectangulo P O Q, proportionales erunt P O, F A, A x, O Q, sed P Q differentia extremarum in primo quidem Casu ostensa est maior, quam F x, differentia mediarum, ergo altera * extremarum p O, O Q, nempe ipsa p O maxima erit, & per consequens maior quam F A. in secundo vero Casu ipsa P Q ostensa est minor quam F x, ergo altera * mediarum F A, A x, hoc est ipsa A F maxima erit, & per consequens maior quam O P. Lem. 3 Theor. 2 huius Theor. 2 huius

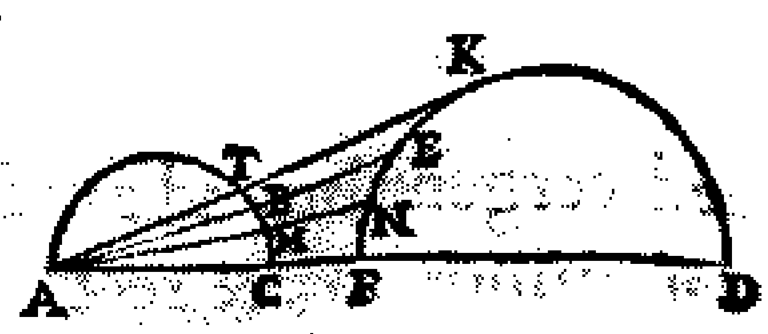
Deinde connectatur C T, eique parallela agatur G R occurrens A K
B continuatæ in R, erit angulus A R G rectus, cum sit rectus & angulus A T C in semicirculo, ac proinde * æquales erunt T K, k R. Lem.

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita k T ad T y, & permutando vt V Z ad k T, ita Z L ad T y, & consequenter ita V L ad k Y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, sed V Z, in primo quidem Casu ponitur minor, quàm K T, in secundo vero maior, ergo & V L hoc est P Q in primo Casu minor erit, quam K Y in secundo maior. Lem. 5

Et quoniam rectangulum y A k * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N, seu rectangulo P O Q, proportionales erunt y A, Q o, o P, A k, sed y k differentia extremarum, in primo quidem Casu ostensa est ma-
C ior, quam p Q differentia mediarum, ergo altera * extremarum y A, A k, nempe ipsa A k maxima erit, & consequenter maior quam O P: In secundo vero Casu y k ostensa est minor, quàm P Q ergo altera * mediarum Q O, O p, nempè ipsa p O erit maxima, & per consequens maior quam A k. Recta igitur O p. in primo quidem Casu maior est quàm A F, minor quàm A K, in secundo vero minor, quàm A F, maior quàm A K. quod erat ostendendum. Lem. 3 Theor. 2 huius Theor. 2 huius

Diximus oportere in primo quidem Casu datam V Z non esse maiorem, quam K T, nec minorem quam F C: in secundo vero non esse maiorem, quàm F C, nec minorem, quàm K T. Quoniam in primo Casu k T maxima est omnium, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias
D T C, k F interijciuntur: F C minima: In secundo vero maxima est F C, minima K T, aliarum autem in vtroque Casu propinquior minimæ remotiore minor est, idque sic demonstrabitur.

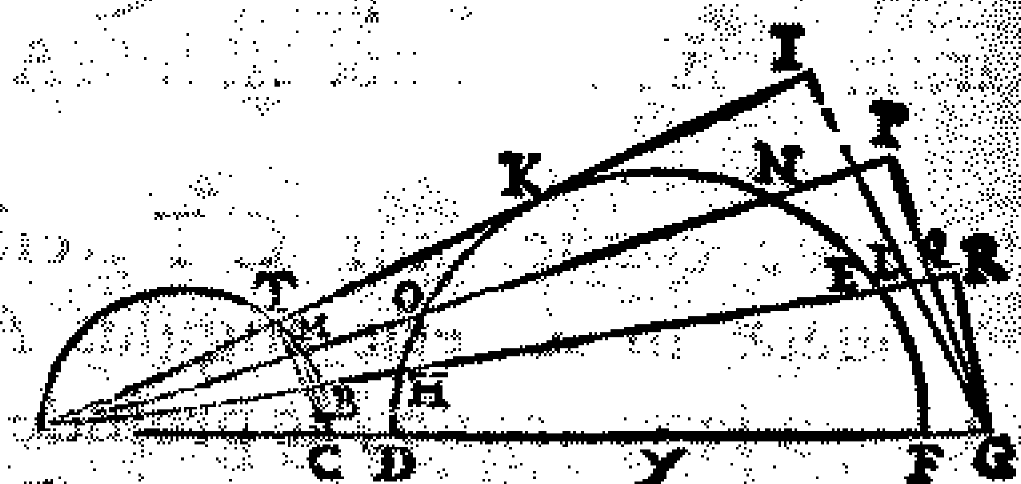
Ducatur vtrumque recta A B E secans circumferentias T C, K F in punctis B E. Quoniam igitur in primo Casu A K maior est, quàm A E, A T autem minor, quàm A B, reliqua T K maior erit, quàm reliqua B E, & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur K T.



Similiter quoniam A F minor est, quàm A E, A C autem maior quàm A B, A B, reliqua C F minor erit, quàm reliqua B E: Eademque ratione demonstrabitur omnibus alijs minor. minima est igitur omnium F C. A

Rursus ducatur alia recta A M N secans circumferentias T C, K F in punctis M N, sitque recta M N minimæ C F propinquior, quàm B E. Quoniam igitur A N minor, est quàm A E, A M autem maior quam A B reliqua M N, minor erit quàm reliqua B E. Propinquior igitur minimæ, minor est remotiore.

In secundo autem Casu sumatur ex centro circuli D E F, quod sit y recta y G æqualis y c, & connectatur C B eique parallela agatur G R secans A E productam in R, quàm etiam secet circumferentia k D in H. Angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, sed rectus est A B C



Lem. 2 in semicirculo ergo & A R G rectus erit, quare* æquales erunt E B, H R, & A G maior erit quam A R, sed A D minor est quam A H, ergo reliqua D G, hoc est F C, maior erit quam reliqua H R. & sic ostendetur ipsa F C maior omnibus alijs. Maxima est igitur F C. B

Deinde connectatur C T, & ei parallela agatur G I secans A k productam in I, ipsam vero A R in L, angulus A I G æqualis erit angulo A T C

Lem. 2 & ideo rectus, cum sit rectus & ipse A T C in semicirculo, quare* æquales T K, K I, & A I minor erit quam A L, & multo minor quam A R, sed A K maior est quàm A H, ergo reliqua K I seu k T minor erit, quàm reliqua H R, hoc est quam E B, & sic ipsa K T ostendetur omnibus alijs minor. Itaque minima est K T. C

Postremo ducatur alia recta A M N secans circumferentias T C, K F in punctis M N, circumferentiam vero k D in O, sitque recta M N minimæ K T propinquior quam E B, & connectatur C M, cui parallela agatur G P secans A N productam in P, ipsam vero A R in Q. angulus igitur A P G æqualis erit angulo A M C, & ideo rectus, cum sit rectus & A M C

Lem. 2 in semicirculo, vnde æquales* erunt M N, O P, & A P minor erit quam A Q, & multo minor quam A R, sed A O maior est, quàm A H, ergo reliqua A P seu M N, minor erit, quàm reliqua H R. hoc est quam B E. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. Quare manifesta est Determinatio. D

Casus Secundus.

Sed vergentibus ad eandem partem datis duobus semicirculis, maior includat minorem, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi maioris, à quo quidem angulo semicirculus minor plus distet, quàm à reliquo.

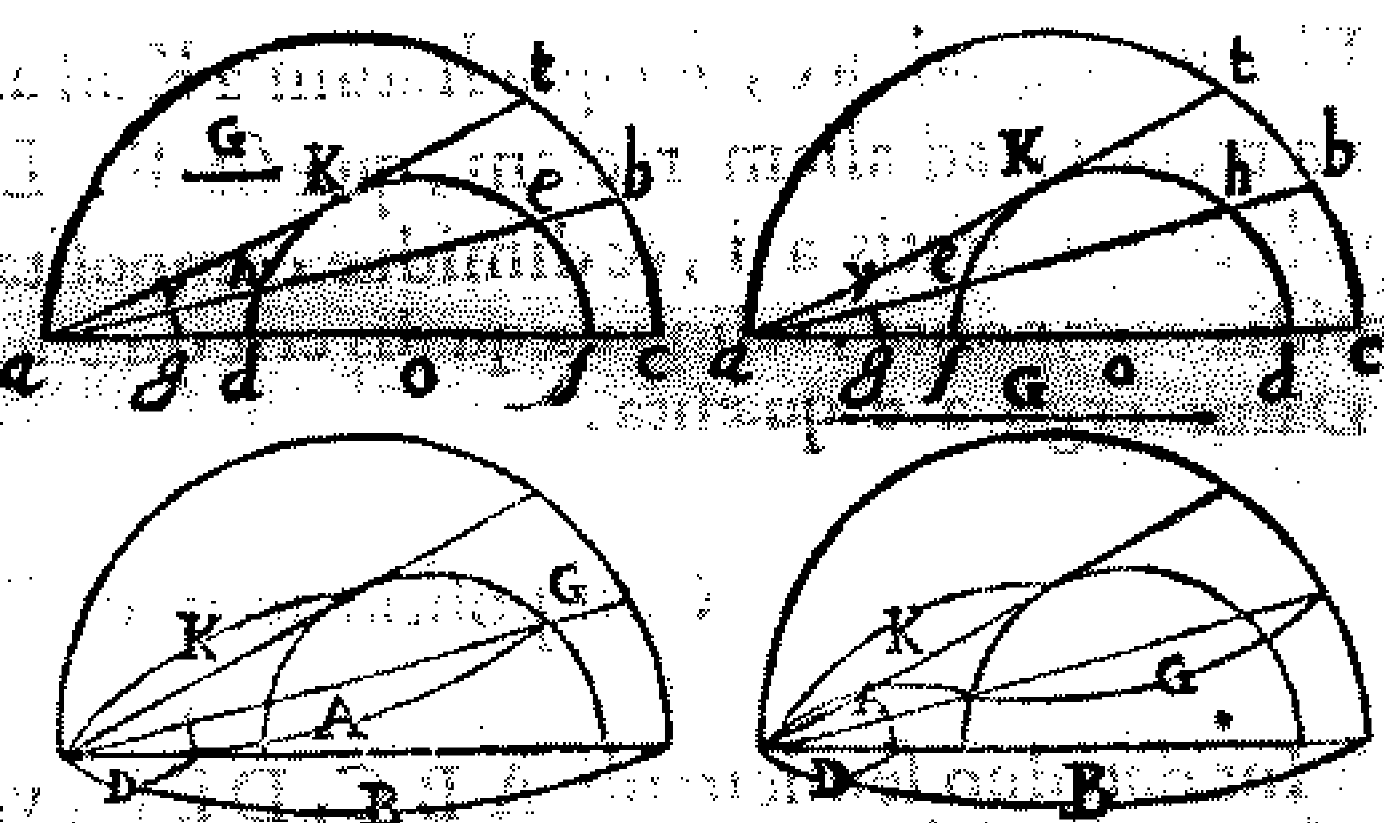
Sint igitur dati duo semicirculi a b c, d e f, quales ponuntur, data autem recta linea G, & contingat a k semicirculum d e f in K, ipsum

A sum vero a b c secet in t. Oportet inter circumferentias t c, k f, ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertineat. Hic quoque duplex oritur Casus, aut enim ponenda est data recta inter cauam vnius & conuexam alterius semicirculi circumferentiam, aut inter cauam vtriusque. vnica tamen Resolutione vtrique casui satisfit.

Resolutio.

Posita iam sit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertineat, quemadmodum Problema exigit, & ex centro circuli d e f, quod sit o ponatur o g æqualis o c, & recta a e b secet circumferentiam k d in h, ipsique a b ducatur perpendicularis g r, & iungatur c b;
B ea quoque eidem a b perpendicularis erit, angulus enim a b c in semicirculo rectus est vnde* æquales erunt h r, e b. Theor. 4 hujus

Quoniam igitur datæ sunt a c, a g, b e, a K, prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus designatum est, & quæratur a e, ea esto A, ergo a b erit A + G, & cum sint similia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c, a r g sunt æquales, quia recti, & angulus a communis vtrique triangulo, erit vt a c ad a g, ita a b ad a r, hoc est in figuris



C resolutionis, vt B ad D, ita A + G ad $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, cui addita r h, quæ æqualis est ipsi e b tota a h erit $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$ + G, sed rectangulum e a h * æquale est quadrato A K, ergo 36 tertij

$$\frac{D \text{ in } A Q + D \text{ in } G \text{ in } A}{B} + G \text{ in } A \text{ æquabitur } K Q.$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat. ergo

$$D \text{ in } A Q + D \text{ in } G \text{ in } A + B \text{ in } G \text{ in } A \text{ æquabitur } K Q \text{ in } B.$$

Et applicentur omnia ad D, vt Potestas æquationis, nempe A Q ex se sub-
D sistat. ergo

$$A Q + G \text{ in } A + \frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} \text{ æquabitur } \frac{K Q \text{ in } B}{D}.$$

Ductio hæc, & applicatio vtramq; æqualitatis partẽ trãsmutant in alias partes ibidem æquales, resolutionemq. ad æquationem secundũ artis pręcepta perducunt. idem fieret si operatio per proportionẽ institueretur, hoc modo. Fiat vt D ad B, ita vtraq; æqualitatis pars separatim ad alias partes, nam & hæ quidẽ partes æquales erunt eædẽq. quæ ex operatione ductionis, & applicationis procreantur. Hoc monuimus quẽadmodũ in antecedẽtis casus resolutione factum est, quoniã in demonstratione instituenda, regressus qui fieri debet resolutionis vestigia repetendo, fiet non per æqualitatẽ solidorum, sed per proportionem planorum, vt factum est in compositione antecedentis Casus, & ne eadem in omnibus Casibus repetenda sint eadem dicta esse intelligantur in similibus sequentium Casuum locis.

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutione antecedentis Casus factum est nempe $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$ estò ZQ, nam si fiat, vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum quod sit ZQ, erit ZQ idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter $\frac{B \text{ in } G}{D}$ esto F, nam si fiat, vt D ad B, ita G ad alium quæ sit F, erit F eademque quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, & ideo planum F in A idem erit quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. Facta igitur transmutatione fractionum in integras magnitudines.

$$AQ + G \text{ in } A + F \text{ in } A \text{ æquabitur } ZQ.$$

Vel $AQ + G + F \text{ in } A$ æquabitur ZQ.

Et explicata æquatione $L.V.\,(G\tfrac{1}{2} + F\tfrac{1}{2}\,Q + ZQ) - G\tfrac{1}{2} - F\tfrac{1}{2}$ æquabitur A

Porisma.

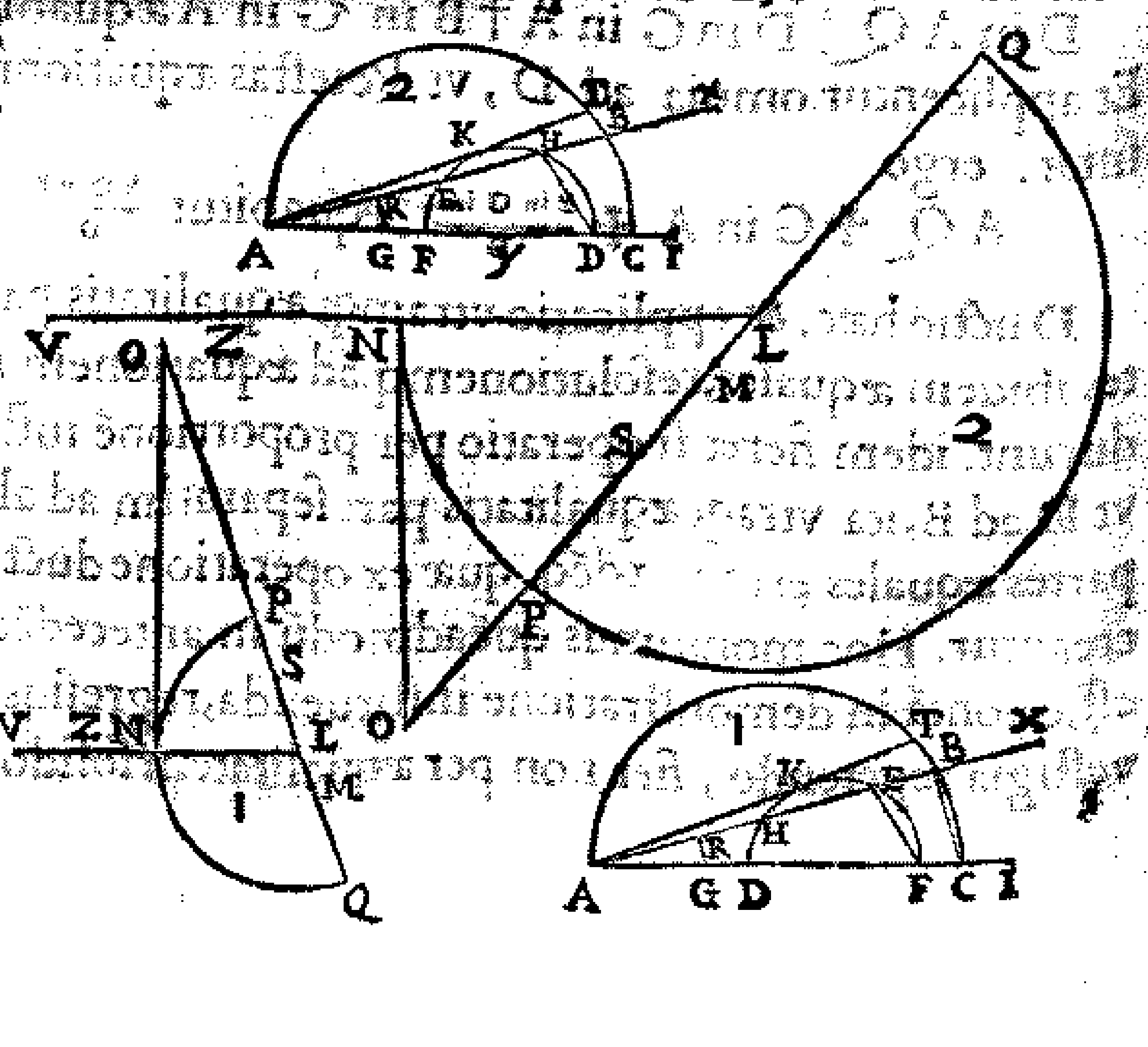
Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a K ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. Deinde rectæ, cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ compositæ ex G, & F dematur eadem dimidia composita, reliqua æqualis erit quæsitæ a e.

Datur ergo a e quæsita.

Compositio secundi Casus.

Sint dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V Z, & contingat A K semicirculum D E F in K, secet vero alterum A B C in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertingat. Duplex est Casus, vt dictum est in Resolutione. In primo quidem oportebit datam V z non esse maiorem quàm K T, nec minorem quàm F C, in secundo vero non esse maiorem quā F C nec minorem quàm K T.

Siquidem V Z sit æqualis alteri ipsarum k T, F C, factum iam erit, quod Proponebatur, si vero maior sit minore, minor autem maiore, ponatur ex centro circuli D E F quod sit y recta y G æqualis y c, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratū quod



quod sit A I. similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L composita ex V Z, Z L secetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O, quæ sit æqualis A I, & connectatur O L. Quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L: itaque rectæ O L detrahenda est recta æqualis ipsi L N. sic Porisma fieri iubet. Centro igitur L interuallo L N describatur circulus secans O L in P, ipsamque continuatam in Q. infra demonstrabimus rectam O P, in primo quidem Casu minorem esse, quàm A F, maiorem quam A K: in secundo vero maiorem esse, quam A F; minorem quam A K. Itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, & producatur donec secet circumferentiam T C in B. Facta est igitur constructio quemadmodum Porisma docet. Nunc ostendam E B æqualem esse V Z datæ. Producatur A E, vbi res postulat ad circumferentiam K D in H; & sumatur P S æqualis V Z, reliqua S Q æqualis erit reliquæ Z L, est enim P Q æqualis V L.

Et quoniam recta O N tangit circulum in N cum sit rectus angulus O N L ex constructione, quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, 16 tertij hoc est quadrato O P, vna cum rectangulo O P Q, seu vna cum rectangulis O P S, O P S Q. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas. In Resolutione conuerso modo factum est, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana.

C At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione, hoc est ad quadratum O N, erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K, quadratum igitur A K erit vna pars æqualitatis, alteram vero sic inueniemus. Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad Z V, seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ sit S M: vt autem O S ad S M, ita * est rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; sunt enim eiusdem altitudinis P O, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum P O S, hoc est quadratum O P, plus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M. 8 sexti

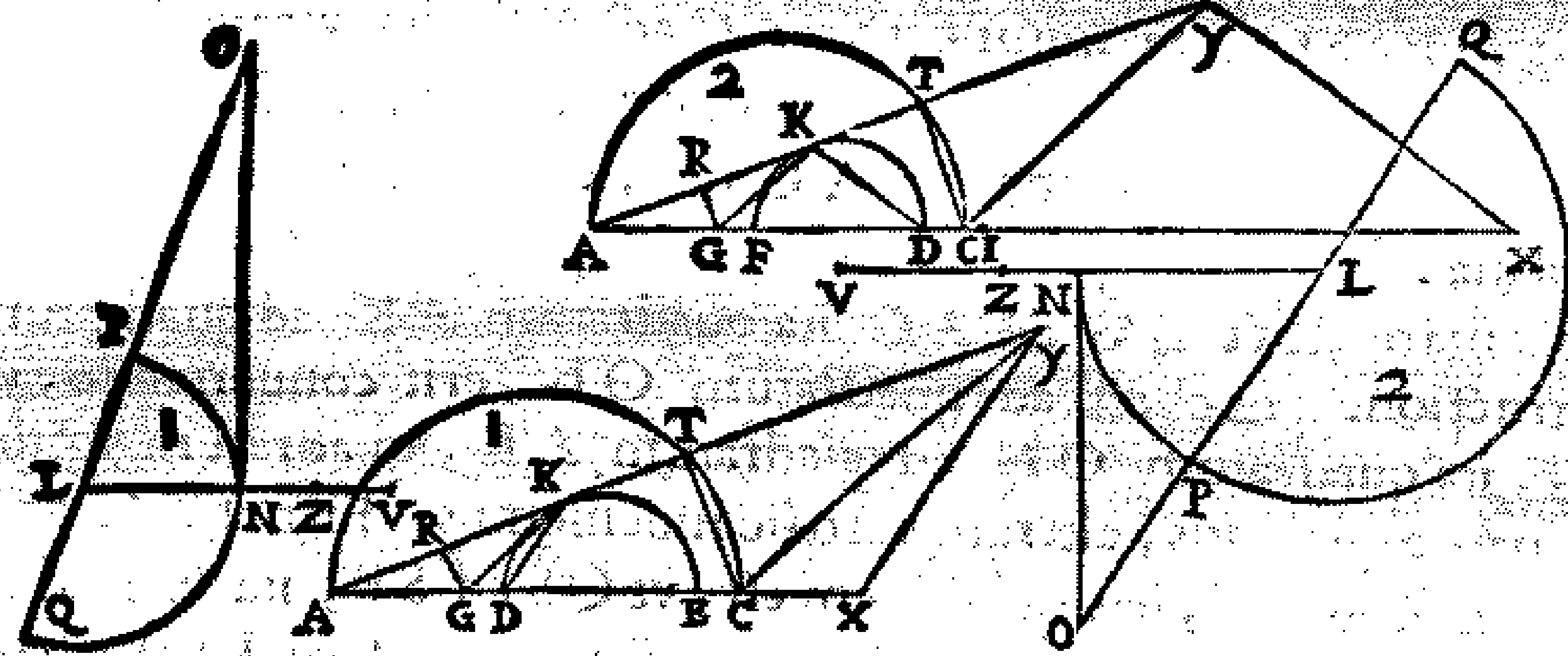
Rursus vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita est rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, cum sint eiusdem altitudinis O P, ergo vt quadratum O P, plus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M, ita
D erit rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, & ita quoque * omnes antecedentes ad omnes consequentes, nempe vt quadratum O P, plus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, hoc est vt A C ad A G, ita quadratum O P vnà cum rectangulis O P S, O P, S Q ad rectangulum P O, S M vna cum rectangulo O P S. Rectangulum igitur P O, S M, vnà cum rectangulo O P S, erit altera pars æqualitatis. Itaque quadratum A K, hoc est * rectangulum E A H æquale erit rectangulo P O, S M, vnà cum rectangulo O P S hoc est, æquale erit rectangulo O P M, sed æquales sunt A E, O P ex constructione, ergo & A H, P M æquales erunt. 2 quinti 36 tertij

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A H in R, A
angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus, cum sit
Lem. 2 rectus & ipse A B C in semicirculo, quare * æquales erunt E B, H R, &
posita B x æquali A R, tota E x æqualis erit toti A H, vel P M, & cum
sint æquales A E, O P, ex constructione, & æquales e x, P M, tota A x
toti O M æqualis erit.

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B ad A R, ob similitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex constructione, erit vt A B ad A R, hoc est ad B x, ita O S ad S M, & componendo vt A x ad x B, ita O M ad M S, sed prima A x ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo & secunda x B æqualis erit M S quartæ, atque ablatis æqualibus x B, M S ab æqualibus e x, P M, reliqua E B reliquæ P S, hoc est V Z datæ, æqualis erit, quod erat ostendendum. Factum est igitur quod oportebat. B

At vero rectam O P, in primo quidem Casu minorem esse, quam A F, maiorem quam A K: in secundo vero maiorem quàm A F, minorem quam A K, sic demonstrabitur.

Connectantur G k, K D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes A T



C

Lem. 5 A C continuatas in punctis y x: erit igitur vt * A G ad A C, ita F C ad C x, sed vt A G, ad A C, ita est quoque V Z ad, Z L, ex constructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C, ad C x, & permutando vt V Z ad F C,
12 quinti ita erit Z L ad c x, quare & * ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, hoc est ita V L, vel P Q ad F x. sed V Z in primo casu ponitur maior, quàm F C: in secundo minor, ergo & P Q in primo Casu maior erit quam F x, in secundo minor. D

Lem. 3. Et quoniam rectangulum F A x * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato
16 tertij 36 sexti O N, seu * rectangulo P O Q, * proportionales erunt P O, F A, A x, O Q, sed P Q differentia extremarum, in primo quidem Casu ostensa est maior,
Theor. 8 huius quam F x differentia mediarum, ergo altera * extremarum P O, O Q, nempe ipsa P O minima erit, & per consequens minor quam A F. In secundo ve-
Theor. 2 huius ro Casu ipsa P Q ostensa est minor, quàm F x, ergo altera * mediarum F A, A x, hoc est ipsa A F, minima erit, & consequenter minor quam O P.

Iam connectatur C T, eique parallela agatur G R secans A K in R.

erit

A erit angulus A R G æqualis angulo A T C, & ideo rectus, cum sit rectus & angulus A T C in semicirculo quare* æquales erunt T k, k R. Lem. 3.

Et quoniam est vt A G ad, A C, * ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Lem. 3. Z L, ex constructione, erit, vt V Z ad Z L ita k T ad T y, & permutando vt V Z ad k T, ita erit Z L ad T y, & consequenter ita* quoque V L ad 12 quinti K y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, & rursus conuertendo vt V Z ad V L, ita k T ad k y sed V Z in primo casu ponitur minor, quam k T, in secundo maior, ergo, & V L, hoc est P Q in primo Casu minor erit, quam K y, in secundo maior.

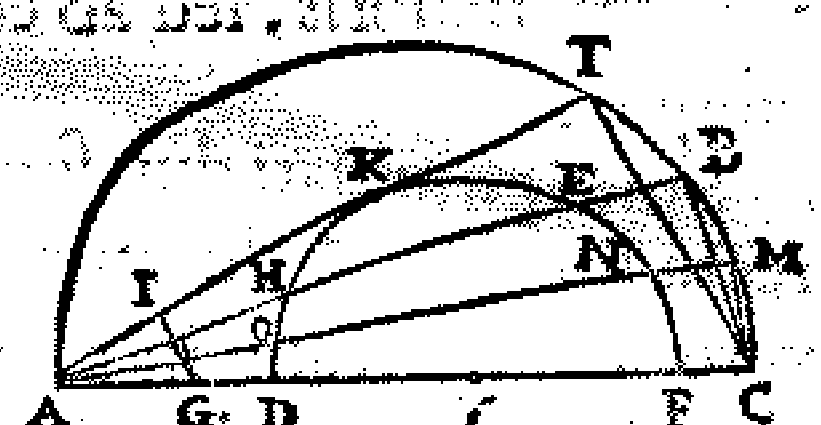
Postremo quoniam rectangulum y A K* æquale est quadrato A I, hoc Lem. 3 est quadrato O N seu* rectangulo Q o P, proportionales erunt y A, Q o 36 tertij

B o P, A K, sed y K differentia extremarum. in primo quidem Casu ostensa est maior, quàm P Q differentia mediarum, ergo altera* extremarum y A, Theor. 2 huius A k nempe ipsa A K minima erit, & consequenter minor, quàm O P. In secundo vero Casu y k ostensa est minor, quàm P Q, ergo altera* mediarum Q O, o P, nempe, ipsa O P minima erit, & per consequens minor Theor. 2 huius quàm A k. Recta igitur O P in primo Casu minor est, quàm A F, maior quam A k, in secundo minor quàm A K, maior quàm A F. quod erat ostendendum.

Diximus oportere in primo quidem Casu datam V Z non esse maiorem, quàm k T, nec minore, quàm F C, in secundo vero non esse maiorem, quàm F C, nec minorem, quam k T, nam in primo Casu k T maxima est om-

C nium quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias T C, k F interijciuntur, F C minima. In secundo autem maxima est F C, minima k T. aliarum autem propinquior minimæ, remotiore minor est. idque sic demonstrabitur.

In primo Casu ducatur vtrumque recta A E B secans circumferentias K F, T C in punctis E B, circumferentiam vero K D in H, & ex centro circuli D E F, quod sit y sumatur y G æqualis y c, & connectantur C B, C T, eisque parallelæ agantur G R, G I, quarum G R secet rectam A B in R, altera vero G I secet vtramque A B, A T in punctis Q I. Æquales

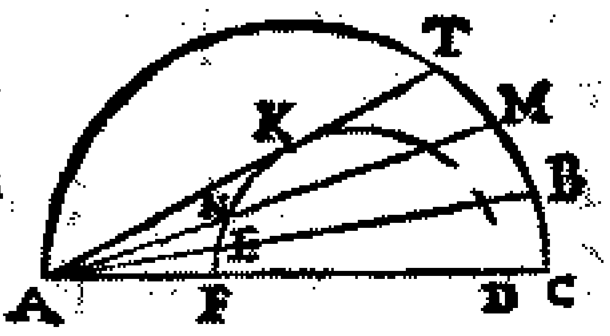


D igitur erunt anguli A T C, A I G, & æquales quoque anguli A B C, A R G sed recti sunt A T C, A B C in semicirculo, ergo & anguli A I G, A R G recti erunt, ac proinde* æquales I K, K T, &* æquales R H, E B. Et quoniam Lem. 2 A k maior est, quàm A H, A I autem minor, quàm A Q, & multo minor quam A R, reliqua I K maior erit, quàm reliqua R H, hoc est K T, maior quam E B & sic ipsa K T ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur K T.

Æque quoniam A D minor est, quàm A H, A G autem maior quàm A R reliqua G D minor erit, quàm reliqua R H, hoc est F C minor, quàm E B. Minima est igitur F C.

Sed ducatur alia recta ANM secans circumferentias KF, TC in punctis NM; circumferentiam vero kD in O, sitque NM ipsi FC propinquior, quàm EB, & connectatur CM, cui parallela agatur GP secans rectam AM in P, quam etiam secet GR in L. angulus igitur APG æqualis erit angulo AMC, sed rectus est AMC in semicirculo, ergo & APG rectus erit, ac proinde* æquales erunt PO, NM. Et quoniam AO minor est, quàm AH, ipsa autem AL maior, quàm AR, & AP multo maior, ergo reliqua PO hoc est NM minor erit, quàm reliqua RH, hoc est quàm EB. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore.

Lem. 2



In secundo autem Casu ducatur recta AEB secans circumferentias kF, TC in punctis EB. Quoniam igitur AC maior est, quàm AB, AF autem minor, quàm AE, reliqua FC maior erit, quàm reliqua EB. Maxima est igitur omnium FC.

Similiter quoniam AT minor, est quàm AB; AK autem maior, quàm AE reliqua KT minor erit, quàm reliqua EB. Minima est igitur omnium kT.

Postremò ducatur alia recta ANM secans circumferentias kF, TC in punctis NM, & sit NM ipsi kT propinquior, quàm EB. Quoniam igitur AM minor est, quàm AB, & AN maior, quàm AE, reliqua NM minor erit, quàm reliqua EB, hoc est propinquior minimæ minor remotiore. Quare manifesta est determinatio.

Casus Tertius.

RVrsus vergant ad eamdem partem dati duo semicirculi, maior minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi maioris, sed ab eo angulo semicirculus minor minus distet, quàm à reliquo.

Sint igitur dati duo semicirculi abc, def, quales ponuntur; data autem recta linea G, & ducatur AK contingens semicirculum def in K; ipsum vero abc secans in t. Oportet inter circumferentias tc, Kf ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertineat. Et hic Casus in duos alios Casus diuiditur, aut enim ponenda est ea recta inter cauam circumferentiam vnius semicirculi, & conuexam alterius, aut inter cauas vtriusque, tamen vterque vno eodemque modo resoluitur.

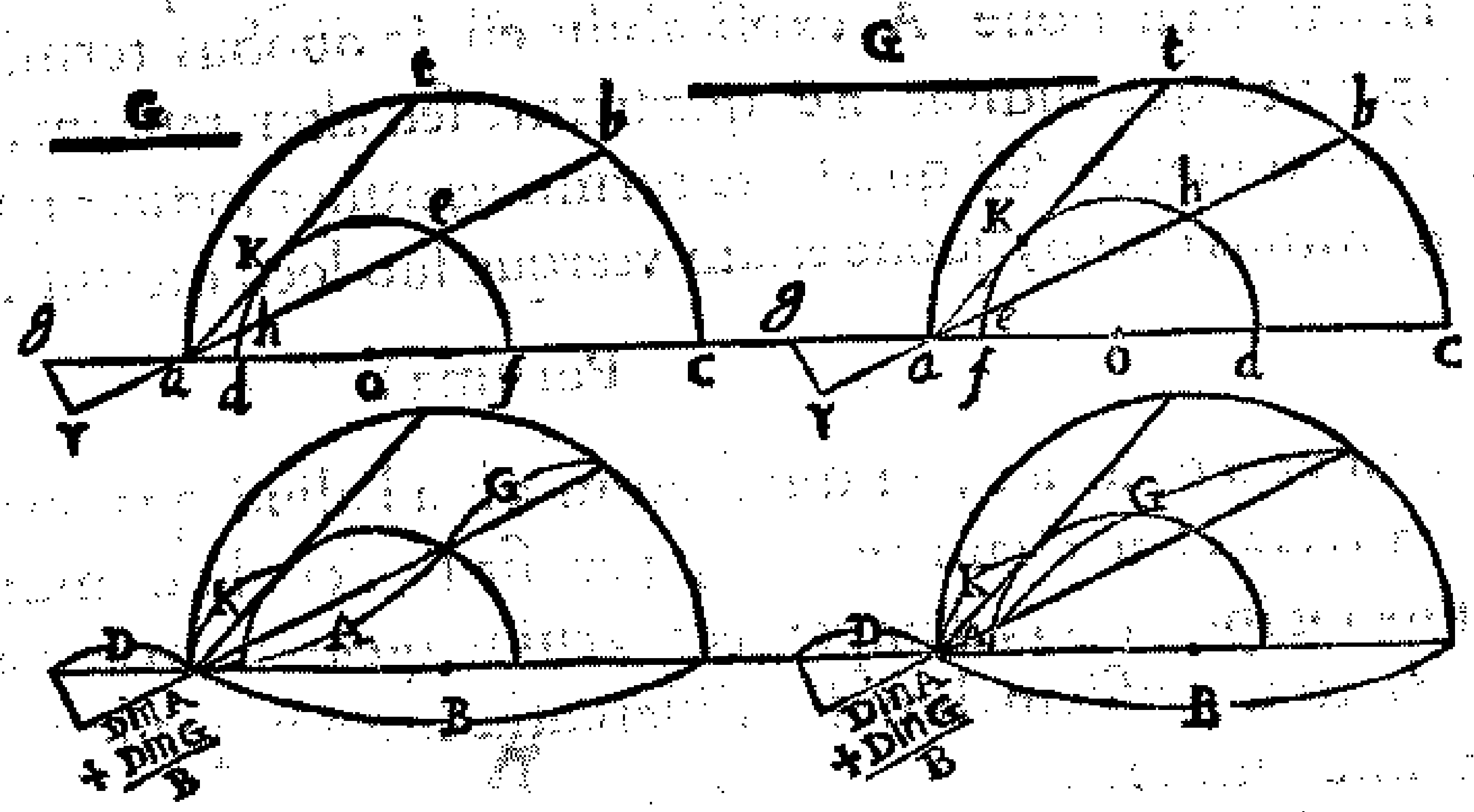
Resolutio.

SIt iam posita recta linea eb æqualis datæ G, vt Problema exigit, & ex centro circuli def, quod sit O, ponatur Og æqualis oc, & recta aeb secet circumferentiam Kd in h, & ducatur gr perpendicularis ad ba productam, & connectatur cb. angulus igitur abc in semicirculo rectus est, ac proinde hr *æqualis eb.

Lem. 2

Quo-

A Quoniam igitur datæ sunt a c, a g, b e, a k. prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus designatũ est, & quæratur a e. esto illa A, ergo recta AB erit A + G, & cùm sint similia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c,



B a r g sunt recti, & ideo æquales, & æquales quoque anguli ad a, quia sunt ad verticem, erit vt a c ad a g ita a b ad a r, hoc est in figuris ad resolutionem pertinentibus, vt B ad D, ita A + G ad $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, quæ si auferatur à recta r h æquali ipsi e b, remanebit a h, itaque a h erit G -- $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, sed rectangulum e a h * æquale est quadrato A k, ergo 36 tertij

$$G \text{ in } A -- \frac{D \text{ in } AQ + D \text{ in } G \text{ in } A}{B} \text{ æquabitur } kQ$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

$$B \text{ in } G \text{ in } A -- D \text{ in } G \text{ in } A -- D \text{ in } AQ \text{ æquabitur } KQ \text{ in } B$$

G in A -- $\frac{D \text{ in } AQ + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ducto in B alicui videbitur productum debere esse B

C in G in A -- D in AQ + D in G in A (non autem vt nos exposuimus) quod verum non est; nam cum à G in A auferenda sit tota fractio $\frac{D \text{ in } AQ + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ à producto quoque B in G in A auferri debet totum productum fractionis, quod est D in AQ + D in G in A. Itaque G in A -- $\frac{D \text{ in } AQ + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ducto in B, productum erit B in G in A -- D in AQ -- D in G in A, quod animaduertisse fuerit operæ pretium.

Denique applicentur omnia ad D, vt AQ, Potestas nempe æquationis ex se subsistat, ergo

$$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} -- G \text{ in } A -- AQ \text{ æquabitur } \frac{kQ \text{ in } B}{D}$$

Ea, quæ de huiusmodi ductione, & applicatione in Resolutionibus duorum præcedentium Casuum in simili loco dicta sunt, hic quoque dicta esse intel-

D ligantur ob rationes ibidem allatas.

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est, hoc est fiat vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum, quod sit ZQ, erit ZQ idem quod $\frac{kQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planũ $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ facta igitur transmutatione.

$$F \text{ in } A --- G \text{ in } A --- AQ \text{ æquabitur } ZQ$$

Vel F -- G in A -- AQ æquabitur ZQ

Et explicata æquatione $F \frac{1}{2} G \frac{1}{2}$ -- L. V. ($F \frac{1}{2}$ -- $G \frac{1}{2}$ Q -- ZQ) æquabitur A

Vel

Vel $F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} + L.V.(F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2}Q - ZQ)$ æquabitur A

In hac æquatione A, explicabilis est de duobus terminis, quorum non semper vterque indicat a e quæsitam, sed alter tantum, interdum minor, interdum maior, sed quo Casu terminus minor indicet ipsam quæsitam, quoue terminus maior, quoue etiam vterque suo loco dicetur.

Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F, deinde dimidiæ differentiæ, qua F superat ipsam G, dempta recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ differentiæ superat quadratum a i, reliqua erit terminus minor.

Vel eidem dimidiæ differentiæ addita eadem recta fiet terminus maior.

Scholium.

Ex Porismate apparet dimidiam differentiam, qua F superat G, non esse minorem recta a i, eo quod quadratum ipsius dimidiæ differentiæ non est minus, quadrato a i, & licet in Porismate appareat ipsum quadratum a i superari à quadrato dimidiæ differentiæ, non tamen potest dici absolute, quadratum dimidiæ differentiæ maius esse quadrato a i, affirmari autem debet non esse minus; nam quadratum dimidiæ differentiæ nonnumquam præstat quadrato a i nihilo, idque contingit cum ratio a d ad a f, non est maior ratione a g, ad a c, & præterea data G, exposita est æqualis minimæ earum, quæ inter circumferentias K f, t c interijciuntur. immo si ipsa G exponeretur minor minima, sequeretur dimidiam differentiam rectarum F, & G, minorem fieri rectam a i, quod quidem aduersus constructionem Problematis, instaret; nam cum in circulo, cuius diameter æqualis est ipsi dimidiæ differentiæ, aptanda sit ex præcepto Porismatis recta æqualis a i, id fieri non posset, si ipsa dimidia differentia minor esset quam a i. Similiter si ratio a d ad a f maior esset, ratione a g ad a c, & recta G exponeretur minor minima, sequeretur aut dimidiam differentiam rectarum F & G minorem fieri recta a i, quod quidem constructionem Problematis eadem ratione impediret, aut terminum indicantem quæsitam a e maiorem fieri recta a f, quod pariter constructioni, sed alia ratione, aduersaretur; nam à puncto a ad circumferentiam k f non posset duci recta æqualis ipsi termino, vt Porisma fieri præcipit, si ipse terminus maior esset, quàm a f. Similis quoque instantia constructioni occurreret, si data G exponeretur maior maxima, siue ratio a d ad a f, maior sit ratione a g ad a c, siue non maior: nam terminus indicans a e quæsitam fieret, vel minor minore rectarum a K, a f, vel maior maiore: itaque à puncto a ad circumferentiam K f, non posset duci recta æqualis ipsi termino, vt Porisma fieri iubet. Hæc omnia suis locis demonstrabuntur. Ad destruendas igitur huiusmodi instantias præfigi debet Problemati Determinatio, ne data G maximam

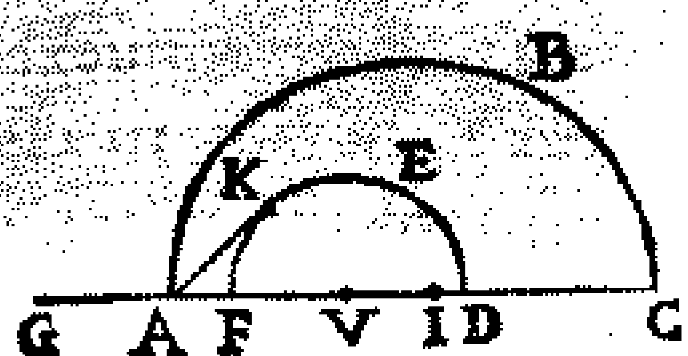
ximam

A ximam superet, neque à minima superetur. Itaque ostendendum est, quæ sit maxima, quæue minima, sed quo clarius, atque facilius id fiat prius sequens Lemma demonstrabo.

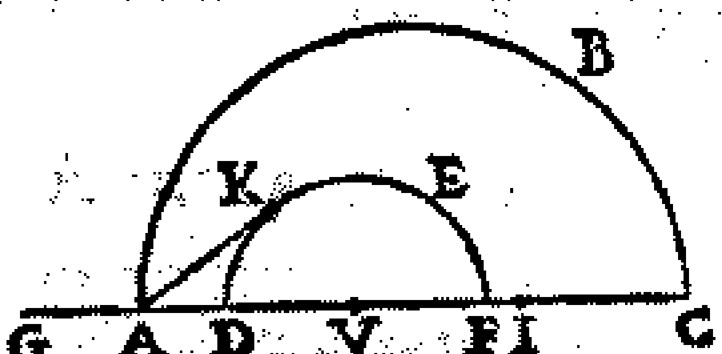
Lemma IV.

Sint duo semicirculi ABC, DEF, quales in præsenti Casu ponuntur, & contingat recta AK semicirculum DEF in K, & ex centro circuli, quod sit V ponatur VG æqualis VC, & * fiat vt AG ad AC, ita quadratum AK ad quadratum AI. Dico si ratio AD ad AF maior est ratione AG ad AC, & rectam AI maiorem esse maiore rectarum AF, Ak, & si æqualis æqualem, & si minor minorem, maiorem autem minore. Probl. 1 huius

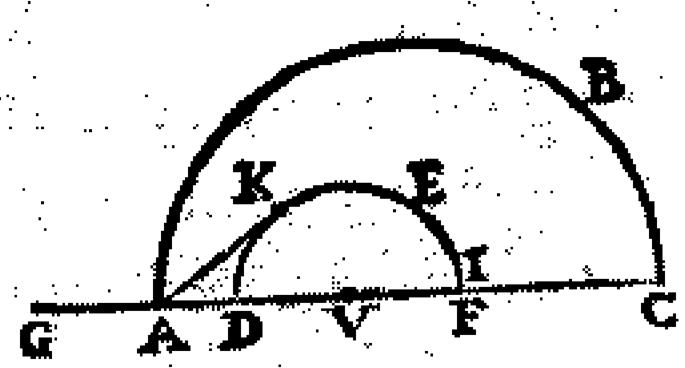
B SIt primum ratio AD ad AF maior ratione AG ad AC, ergo duo sunt Casus, aut enim FC intercepta est inter conuexam vnius semicirculi circumferentiam, & cauam alterius, aut inter cauam vtriusque. sit primum intercepta inter vtriusq; cauam, erit AK maior, quàm AF. Quoniam igitur est vt AG ad AC, minor nempe ad maiorem, ita quadratum Ak ad quadratum AI ex positione, erit quadratum Ak, minus quadrato AI, vnde & recta Ak minor, quam recta AI. Recta igitur AI maior est maiore rectarum AF, Ak.



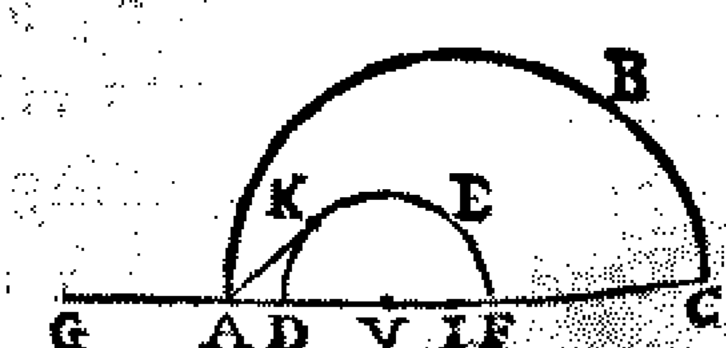
C Deinde sit FC intercepta inter conuexam circumferentiam, & cauam erit AF maior, quàm Ak, & quoniam ratio AD ad AF ponitur maior ratione AG ad AC vt autem AG, AC, ita est quadratum AK ad quadratum AI, ergo ratio AD ad AF maior erit ratione quadrati Ak ad quadratum AI, sed vt AD ad AF prima videlicet trium proportionalium AD, AK, AF ad tertiam, ita est quadratum secundæ Ak ad quadratum AF tertiæ, ergo ratio quadrati Ak ad quadratum AF maior erit, ratione quadrati Ak ad quadratum AI; quare quadratum AI * maius erit quadrato AF, & consequenter recta AI maior, quam recta AF, quod primum. 10 quinti



D Sed sit ratio AD ad AF eadem, quæ AG ad AC, ergo eadem erit, quæ quadrati Ak ad quadratum AI, sed vt AD ad AF, ita est quadratum AK ad quadratum AF, vt demonstrauimus ergo quadratum AI quadrato AF æquale erit, quare & recta AI, æqualis rectæ AF, quod est secundum.



Denique sit ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC, ergo minor erit & ratione quadrati Ak ad quadratum AI; sed vt AD ad AF, ita ostensum est quadratum Ak ad quadratum AF, ergo ratio quoque quadrati AK ad quadratum AF



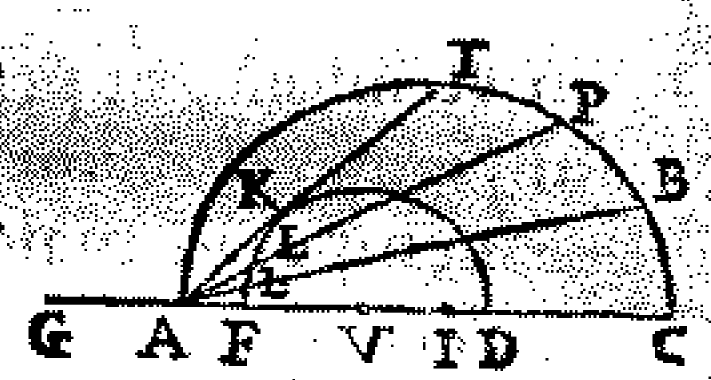
mi-

minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, quare * quadratum A I minus erit, quadrato A F, & consequenter recta A I minor, quàm recta A F; quod est tertium. A

Et quoniam est vt A G ad A C ita quadratum A k ad quadratum A I, A G autem minor, quàm A C erit & quadratum A k minus quadrato A I, quare & recta A K minor, quàm recta A I; recta igitur A I maior est minore rectarum A F, A k, quod vltimo loco erat ostendendum.

Lemma V.

Iisdem positis sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico F C maximam esse omnium quæ à puncto A ductæ inter cauas circumferentias k F, T C interijciuntur, minimam k T, earum vero quæ inter conuexam circumferentiam K F, & cauam T C interijciuntur, maximam esse K T, minimam F C. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore maiorem esse. B



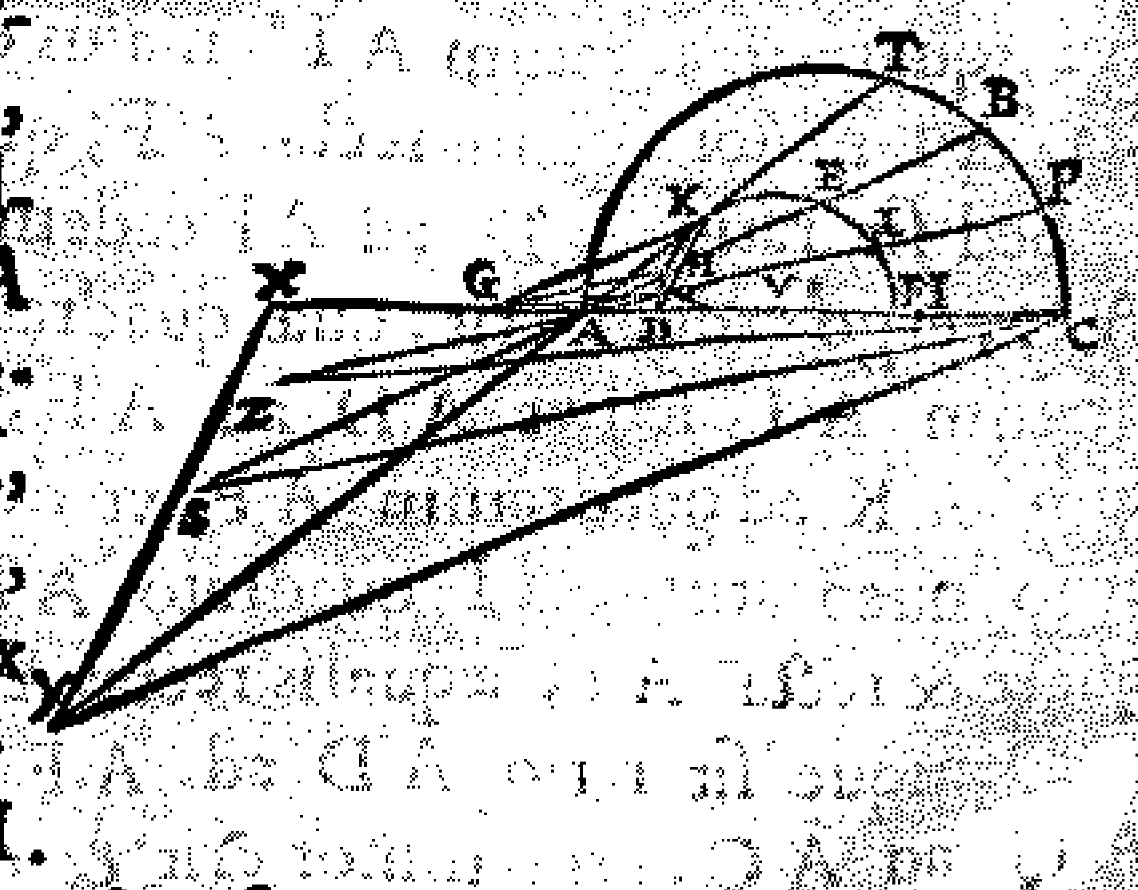
DVcantur enim vtrumque recta linea A E B secans circumferentias K F, T C in punctis E B, & sit primum F C interiecta inter cauas circumferentias K F, T C. Quoniam igitur A C maior est, quàm A B, A F autem minor, quàm A E, reliqua F C maior erit, quam reliqua E B, & sic ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur F C. C

Æque quoniam A T minor est, quàm A B ex vero maior quam A E reliqua K T minor erit, quàm reliqua E B, atque eadem ratione ostendetur omnibus alijs minor, Minima est igitur K T.

Rursus ducatur alia recta A L P secans circumferentias kF, TC in punctis L P, & sit LP minimæ K T propinquior, quam E B erit igitur A P, minor, quam A B, sed A L maior est quam A E, ergo reliqua L P minor erit, quam reliqua E B, nempe propinquior minimæ minor remotiore.

Sed sit F C interiecta inter cauam circumferentiam T C, & conuexam K F, & connectantur G k, k D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes T A, C A productas in punctis y x; erit igitur rectangulum F A x * æquale quadrato A I, & recta A I, ex antecedente Lemmate, non minor quam A F; quare neque A x minor erit ipsa A F, alioquin rectangulum F A x minus esset quadrato A I. D

Lem. 3



Coral. Lem. 3 16 sexti

Et quoniam rectangulum F A x * æquale est rectangulo y A K * erit vt A K ad A F, ita A x ad A y, sed A k minor est, quàm A F, ergo & A x minor erit quam A y, sed A x ostensa est non minor quàm A F, ergo &

A F

A A F minor erit quam A y, atque A K multo minor. quare A y maxima erit quatuor proportionalium A K, A F, A x, A y; minima vero A K; atque adeo y k composita ex maxima, & minima * maior, quàm x F composita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam est * vt A G ad A C, ita k T ad T y, & ita F C ad c x, Lem. 3 erit vt k T ad T y, ita F C ad C x, & conuertendo vt y T ad T k, ita x c ad C F, & diuidendo vt y k ad k T, ita x F ad F C, sed y k prima ostensa est maior, quàm x F tertia, ergo, & secunda k T maior erit, quàm F C quarta.

Secet autem recta E B circumferentiam k D in H, & iungatur G H, cui parallela agatur C S occurrens B A continuatæ in S. rectangulum igi-
B tur y A K * æquale erit rectangulo S A E, quare vt * A k ad A E, ita erit A S Corol. Lem. 3 16 sexti ad A I, sed A K minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit quam A y, est autem & A F minor quam A y, vt demonstrauimus, ergo A E multo minor erit, atque A K multo minor. quare A y maxima erit quatuor proportionalium A k, A E, A S, A y, minima vero A k, atque adeo y k composita ex maxima, & minima * maior erit quam S e composita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & ita k T ad T y, Lem. 3 erit vt K T ad T y, ita E B ad B S, & conuertendo vt y T ad T k, ita S B ad B E, & diuidendo, vt y k ad K T, ita S e ad e B, sed y k ostensa est maior, quam S e, ergo & K T maior erit, quàm e B. Atque eadem ratione ostenderetur ipsa K T omnibus alijs maior. Maxima est igitur k T.

C Deinde quoniam * æqualia sunt rectangula F A x, E A S, erit vt * A E ad Corol. Lem. 3 16 sexti A F, ita A x ad A S, sed A E minor est, quàm A F, ergo & A x minor erit, quam A S sed A x ostensa est non minor, quàm A F, ergo & A F minor erit, quàm A S, atque A E multo minor. itaque A S maxima erit quatuor proportionalium A E, A F, A X, A S, minima vero A E; atque adeo S e composita ex maxima, & minima, * maior erit quàm x F composita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita F C ad c x, Lem. 3 erit F c ad c x, vt E B ad B S, & conuertendo vt x c ad C F, ita S B ad B E, & diuidendo vt x c ad c E, ita S e ad e B, sed x F ostensa est minor, quàm S e, ergo & F C minor erit, quàm E B, eaque demonstrabitur
D omnibus alijs minor. Minima est igitur F C.

Sed ducatur alia recta A L P secans circumferentias k F, T c in punctis L P, circumferentiam vero K D in Q, & sit L P minimæ F C propinquior, quàm E B, & connectatur G Q, cui parallela agatur c Z occurrens P A continuatæ in Z, rectangula igitur L A Z, E A S * æqualia erunt Corol. Lem. 3 16 sexti quare * vt A L ad A E, ita erit A S ad A Z, sed A L maior est, quam A E, ergo & A S maior erit, quam A Z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I erit vt A E ad A I, erit * vt A E ad A I, ita A I Lem. 3 17 sexti ad A S, sed A E minor est, quàm A I, cum ipsa A I non sit * minor, Lem. 4 quàm A F, ergo & A I minor erit, quàm A S. Itaque ipsa A S maior

erit,

erit, quàm AL, & multo maior, quàm AE, est quoque maior quàm AZ vt demonstrauimus, ergo ipsa AS maxima erit quatuor proportionalium AL, AE, AS, AZ, & *consequenter AE minima, vnde SE composita ex maxima, & minima, *maior erit quam ZL composita ex reliquis; hoc est ZL minor quam SE.

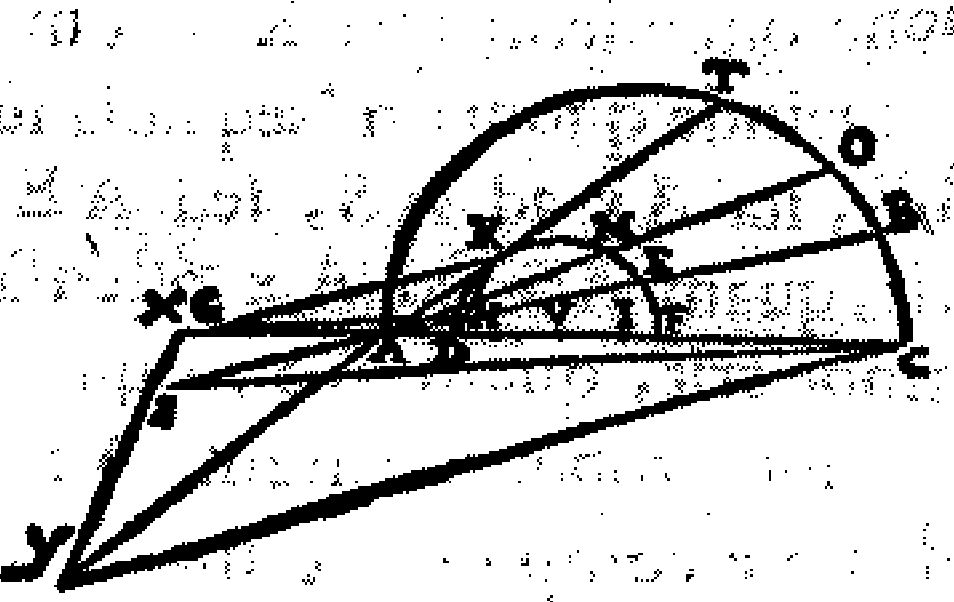
Theor. 2 huius 25 quinti

Lem. 3 Et quoniam est vt AG ad AC, *ita EB ad BS, & ita *LP ad PZ, erit vt LP ad PZ, ita EB ad BS, & conuertendo vt ZP ad PL, ita SB ad BE, & diuidendo vt ZL ad LP, ita SE ad EB, sed ZL ostensa est minor, quàm Se, ergo & LP minor erit, quàm eB, propinquior igitur minimæ minor est remotiore. Quare constat propositum.

Lemma VI.

Rursus ijsdem positis. sit autem ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC, ergo AI* minor erit, quàm AF, maior autem, quàm Ak. à puncto igitur A ad circumferentiam KF, ducatur AM æqualis AI, & producatur ad circumferentiam TC in O. Dico maiorem rectarum KT, FC maximam esse omnium, quæ à puncto A ductæ inter circumferentias KF, Tc interijciuntur. Minimam vero MO. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore, ex eadem parte, minorem esse.

Lem. 4



Dvcatur enim à puncto A vtrumque recta linea AEB secans circumferentias KF, TC in punctis EB; circumferentiam vero kD in H, & connectatur GH, GK, kD, quibus parallelæ ducantur cS, cy, yx secantes EA, KA, FA productas in punctis Syx, & sit primum KT maior, quàm FC. quoniam igitur est* vt AGad AC, ita FC ad cx, & *ita KT ad Ty; erit KT ad Ty, vt FC, ad cx; & diuidendo, erit Tk ad ky, vt cF ad Fx; sed kT ponitur maior, quàm FC. ergo & ky quam Fx* maior erit.

14 quinti

Et quoniam *æqualia sunt rectangula yAK, FAx: erit vt* Ay ad AF, ita Ax ad Ak: sed ky composita ex extremis Ay, AK, ostensa est maior, quàm Fx, composita ex medijs, ergo altera* extremarum Ay, Ak, maxima erit altera minima: sed AK non est maxima, quia minor est, quàm AF, ergo minima erit, & consequenter Ay maxima. Itaque Ay maior erit, quàm AF, & multo maior, quàm AE: Et quoniam *æqualia sunt rectangula yAK, EAS, erit* vt Ak ad AE, ita AS ad Ay: sed Ak minor est, quàm AE, ergo & AS minor erit, quàm Ay. Cum igitur Ay maior sit, quàm AS, & maior, quàm AE, vt demonstraui, ac etiam maior, quam Ak, erit ipsa Ay maxima quatuor proportionalium Ak, AE, AS, Ay; *minima vero Ak, vnde yk compo-

Corol. Lem. 1 16 sexti

Theor. 2 huius

Corol. Lem. 1 16 sexti

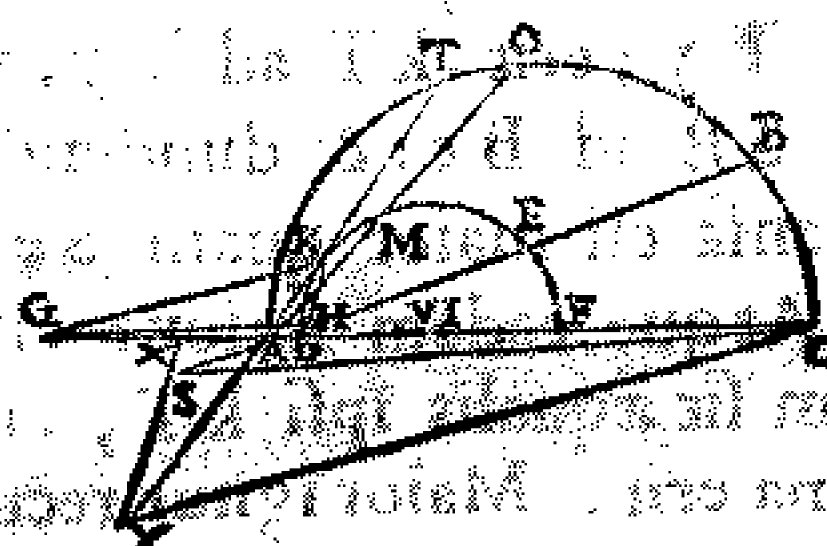
Theor. 2 huius

A posita ex maxima, & minima, * maior erit quàm S e composita ex reliquis.

Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & * ita k T ad T y, erit K T ad T y, vt E B ad BS, & conuertendo, vt y T ad T k, ita S B ad B E: & diuidendo, vt y k ad k T, ita S e ad E B, sed y k ostensa est maior, quàm S e, ergo & k T quàm E B maior erit, & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur K T. Lem. 3

Sed sit F C maior, quàm K T: quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita F c ad C x, & * ita k T ad T y, erit E c ad C x, vt k T ad T y: & diuidendo, vt c F ad F x, ita erit T K ad K y, sed c F ponitur maior, quàm T K, ergo & F x maior erit, quàm K y, sed F x composita est ex extremis quatuor proportionalium A F, A y, A k, A x, ipsa vero k y ex medijs (constat autem eos proportionales esse, ex eo quod * æqualia sunt rectangula F A X, y A k) ergo altera * extremarum A F, A X maxima erit, altera minima: sed A F non est minima, cum sit maior, quàm A k, ergo maxima erit: vnde A X minima: itaque A X minor erit quàm A K, & multo minor, quàm A E. lem. 3 lem. 3 Theor. 2 huius

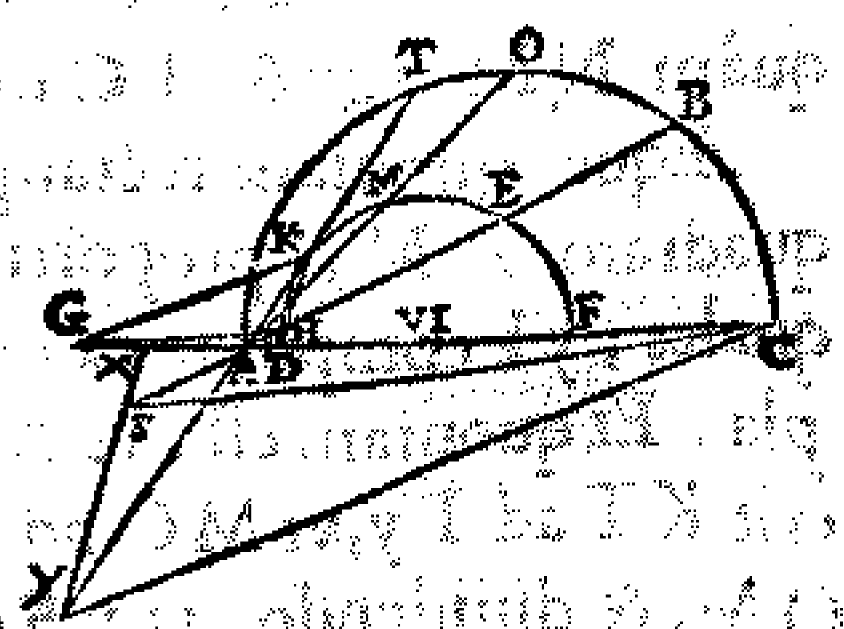
B



C Et quoniam æqualia sunt rectangula F A X, E A S, erit vt A F ad A E, maior nempe ad minorem, ita A S ad A X, quare & A S maior erit, quàm A X: sed A X ostensa est minor, quàm A E, & consequenter multo minor est, quàm A F, ergo quatuor proportionalium A F, A E, A S, A X minima erit A X: * quare A F maxima, vnde X F composita ex maxima, & minima, * maior erit, quàm S e composita ex reliquis. Theor. 1 huius ac qu nd

Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita F c ad c x, & ita E B ad B S, erit F c ad c x vt E B ad BS, & conuertendo, vt x c ad c F, ita erit S B ad B E, & diuidendo vt x F ad F c, ita S e ad E B; sed x F ostensa est maior, quàm S e; ergo & F c, quàm E B maior erit. eademq. ratione ostendetur maior omnibus alijs, quare maxima est F c. lem 3

D Sed sint æquales K T, F c: quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita F c ad c x, & * ita K T ad T y; erit F c ad c x, vt k T ad T y: sed F c ponitur æqualis K T, ergo & c x æqualis erit T y, quare ablatis æqualibus F C, K T, reliquæ x F, y k, æquales erunt: sed x F composita est ex extremis quatuor proportionalium F A, A y, A k, A x, ipsa vero y k ex medijs, constat autem eas * proportionales esse ex eo, quod * rectangula F A x, y A k sunt æqualia; ergo * maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit, itaque A F extrema æqualis erit alteri mediarum y A, A k; sed non est æqualis ipsi A K; lem. 3 16 sexti Theor. 2 huius



O hæc

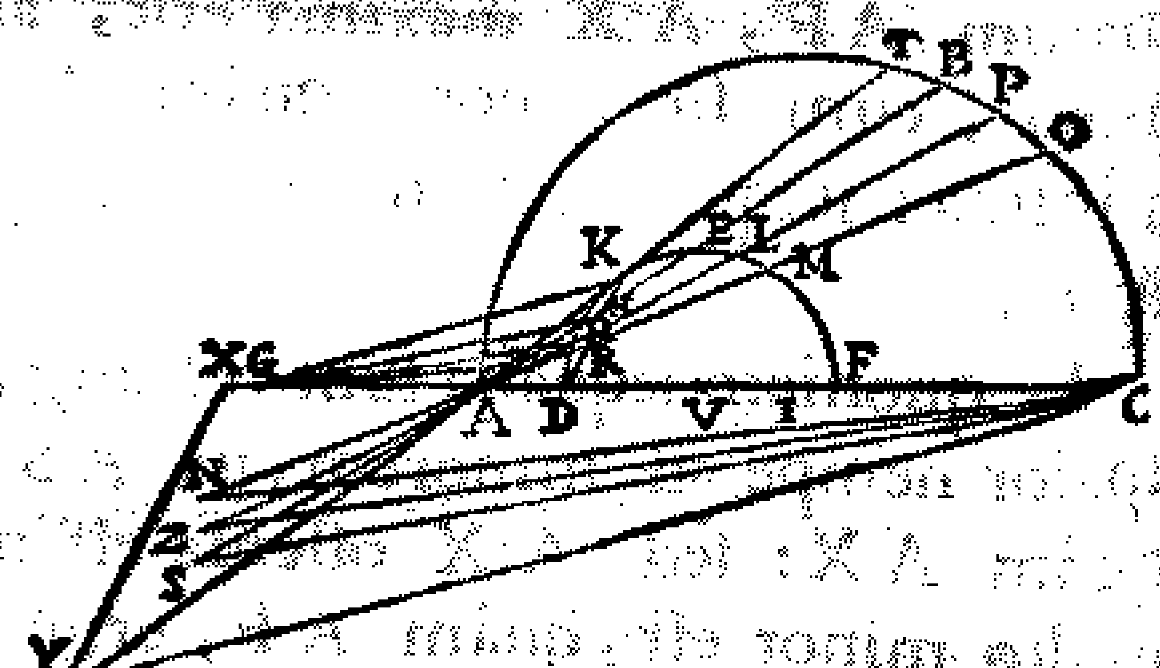
hæc enim tangit circulum D E F; illa vero secat; ergo ipsa A F æqualis erit A y.

Corol. Lem. 1 Et quoniam * æqualia sunt rectangula y A k, E A S; erit A y ad A E, vt A S ad A K; sed A y, cum sit æqualis ipsi A F, maior est, quam A E, ergo & A S maior erit, quàm A k, vnde quatuor proportionalium A y, Theor. 1 huius A E, A S, A K, minima erit A K; & per * consequens maxima A y, 25 quinti itaque y K composita ex maxima, & minima * & maior erit, quàm S e composita ex reliquis.

Postremo quoniam est vt A G ad A C, ita E B ad B S & ita k T ad T y; erit k T ad T y, vt E B ad B S: & conuertendo, vt y T ad T K, ita S B ad B e: & diuidendo, vt y k ad k T, ita erit S e ad e B; sed y k ostensa est maior quam S e, ergo & K T maior erit, quam e B.

Atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare & F C, cum sit æqualis ipsi k T, erit quoque omnibus maior: itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum K T, F C, maxima est omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias K F, T C interijciuntur. quod est primum.

Deinde secet recta A M circumferentiam k D in R, & iungatur G R, eique parallela agatur C N secans M A productam in N. Rectangulum igi-Lem. 3 tur M A N * æquale erit quadrato A I; hoc est quadrato A M sunt enim æquales A I, A M, ex constructione, quare A M æqualis erit ipsi A N, & cum Lem. 1 17 sexti sit rectangulum F A x * æquale quadrato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A F, A M, A x sunt autem & inæqualis, quia A F maior est, quàm A M, ergo x F composita ex extremis, maior erit quàm dupla media, hoc est, quàm M N. Et Lem. 3 quoniam est, vt A G ad A C, * ita F C ad C x, & * ita M O ad O N; erit F C ad C x, vt M O ad O N: & conuertendo, vt x c ad C F, ita N O ad O M: & diuidendo, vt x F ad F C, ita erit N M ad M O; sed x F ostensa est maior, quàm N M, ergo & F C maior erit, quàm M O.



Lem. 1 17 sexti Æque quoniam rectangulum y A k * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A k, A M, A y: sunt autem & inæquales; y k composita ex extremis maior erit, quàm M N, media videlicet du-Lem. 3 pla. Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita k T ad T y, & * ita M O ad O N: erit K T ad T y, vt M O ad O N, & conuertendo vt y T ad T k, ita N O ad O M, & diuidendo, vt y K ad k T, ita erit N M ad M O: sed y k ostensa est maior, quam N M, ergo & k T maior erit, quàm M O.

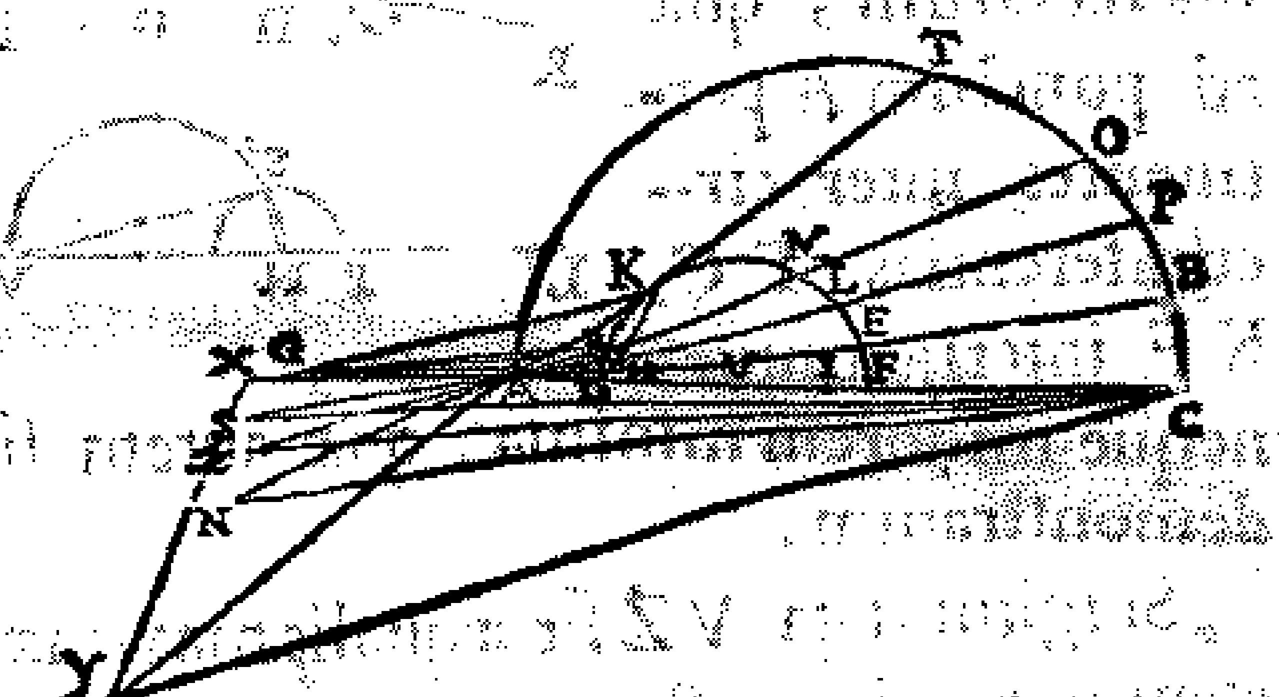
Lem. 1 17 sexti Eadem ratione quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A E, A M, A S, sunt autem & inæquales. ergo S E, composita ex extremis, maior erit quàm dupla

A dupla media; hoc est, quàm NM. Et quoniam est vt AG ad AC, * ita EB ad BS, & * ita MO ad ON, erit EB ad BS, vt MO ad ON: & conuertendo, vt Se ad EB, ita NO ad OM; & diuidendo, vt Se ad eB, ita erit NM ad MO: sed Se maior est, quàm NM, vt demonstrauimus, ergo & EB maior erit, quam MO. Atque eadem ratione ostendemus omnes alias maiores esse ipsa MO. Minima est igitur MO omnium quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias kF, TC interijciuntur. quod est secundum. Lem. 3

Postremo ducatur alia recta ALP secans circumferentias kF, TC in punctis LP, sintque LP, EB, ex eadem parte minimæ MO, quarum LP ipsi MO sit propinquior, quàm EB, & recta AP secet circumferentiam
B kD in Q, & iungatur GK, eique parallela agatur CZ occurrens PA continuatæ in Z. * æqualia erunt rectangula LAZ, EAS: quare vt * AL ad AE, ita erit AS ad AZ. siquidem AL propinquior est centro V, quàm AE, sic argumentor, sed AL maior est, quàm AE, ergo & AS maior erit, quàm Az. Et quoniam rectangulum EAS * æquale est quadrato AI, hoc est quadrato AM, * proportionales erunt AE, AM, AS; sed AE minor est, quàm AM, ergo & AM minor erit quàm AS: itaque AS maior erit, quàm AL, & multo maior quàm AE est quoque maior, quam Az, vt demonstrauimus; ipsa igitur AS maxima erit quatuor proportionalium AL, AE, AS, Az, & * consequenter AE minima; vnde SE composita ex maxima, & minima maior erit, quàm zL
C composita ex reliquis, hoc est zL minor, quàm Se. Corol. Lem. 5 16 sexti; Lem. 5 17 sexti; Theor. 5 huius

Si vero AL remotior est à centro V, quàm AE, argumentor in hunc modū, sed AL minor est, quàm AE: ergo & AS minor erit, quam Az.

Et quoniam rectangulum EAS * æquale est quadrato AI, vel AM: * proportionales erunt AE, AM, AS. sed AE maior est, quàm AM, ergo & AM maior erit, quàm AS. Lem. 5 17 sexti



D quare AS minor erit, quàm AL, & multo minor quam AE; atque est minor, quàm Az, vt demonstrauimus. itaque AS minima erit quatuor proportionalium AL, AE, AS, Az, & * consequenter AE maxima; quare SE composita ex maxima, & minima, * maior erit quàm zL, composita ex reliquis, quod etiam demonstrauimus & supra. Theor. 5 huius; 25 quinti

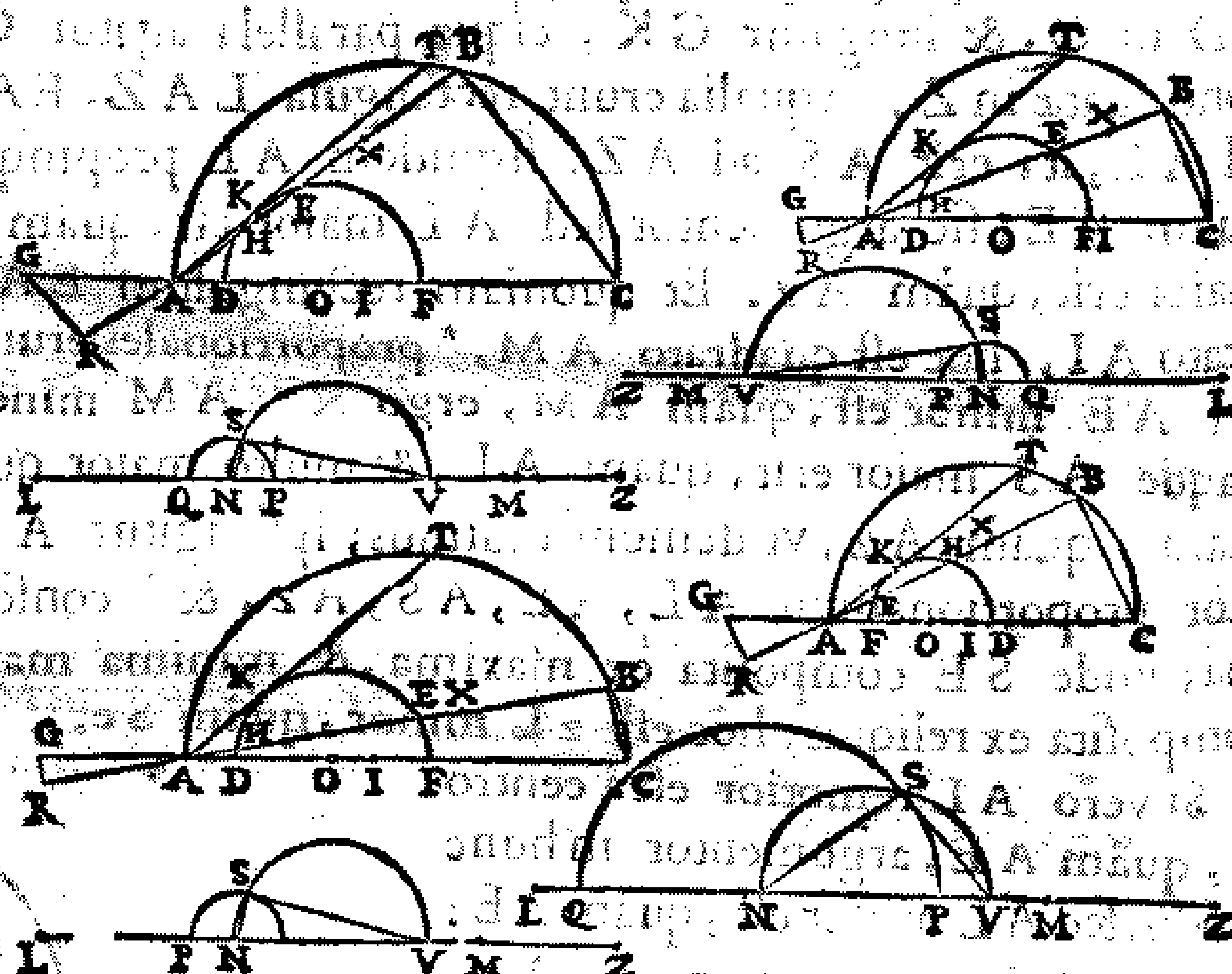
At quoniam in vtroque Casu est, vt AG ad AC, ita * EB ad BS & ita * LP ad Pz, erit vt LP ad Pz, ita EB ad BS; & conuertendo vt zP ad PL, ita SB ad Be; & diuidendo, vt zL ad LP, ita Se ad eB; sed zL ostensa est minor, quàm Se, ergo & LP minor erit, quàm EB, hoc est propinquior minimæ, minor remotiore ex eadem parte. Quod tertio loco erat ostendendum. Lem. 3

Corollarium.

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores sint, manifestum est KT maximam esse omnium, quæ inter circumferentias KM, TO interijciuntur. Earum verò quæ interijciuntur inter circumferentias MF, OC maximam esse FC.

Compositio tertij Casus.

SInt dati duo semicirculi ABC, DEF, vt dictum est; data autem recta linea VZ, & cõtingat Ak semicirculũ DEF in k; semicirculum vero ABC secet in T. Oportet inter circũferentias TC, KE ponere rectam lineã æqualem VZ, ita vt ad punctum A pertineat, Oportet autem ipsam VZ non esse maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias TC, KF interijciuntur, neque minorem minima. quæ autem sit maxima, quæue minima, iam est demonstratum.



Si igitur data VZ sit æqualis maximæ, factum iam erit, quod proponitur, etenim maxima est ea, quæ maior est rectarum kT, FC, si vero sit æqualis minimæ, minimaq. sit vel FC, vel KT itidem factum erit, quod proponitur. Si autem neutra ipsarum FC, kT sit minima inuenta, minima Problemati satisfiet, inuentio autem minime patet ex Lemmate sexto. Sed si VZ minor sit maxima, maior autem minima, ponatur ex centro circuli DEF, quod sit O recta OG æqualis OC, &.* fiat vt AG ad AC, ita quadratum AK ad aliud quadratum, quod sit AI. Similiter fiat, vt AG ad AC, ita VZ ad aliam, quæ sit ZL; & sit ipsarum Vz, zL differentia LV, quæ secetur bifariam in N: Cum igitur à quadrato NV debeat auferri quadratum AI, vt Porisma iubet; describatur in VN semicirculus, in quo accommodetur VS æqualis AI infra demonstrabimus ipsam AI minorem esse, quàm VN, & iungatur SN: Quadratum igitur Nv superat

Probl. 1 hu.us

qua-

A quadratum S V, quadrato S N, cum sit rectus angulus V S N in semi-
circulo: itaque rectæ V N auferenda est vel addenda recta æqualis N S;
sic Porisma fieri iubet; auferatur igitur, vel addatur prout sequentia
præcepta docebunt; eaque sic diminuta, vel aucta sit V P, ea non erit mi-
nior minore restarum A F, A k, nec maior maiore, vt etia sequentia Lem-
mata ostendent; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci
recta A E æqualis V P. ducatur igitur A E, & producatur ad circumferen-
tiam T C in B. Dico E B Problema efficere.

Secet enim B A circumferentiam k D in H, & centro N interuallo
N P describatur circulus secans V L in Q, is circulus tanget rectam S V
in S, ac proinde quadratum V S, æquale erit rectangulo P V Q, vel
B V P L, seu quod idem est rectangulo V P, L Z minus rectangulo V P Z.
Si igitur fiat, vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad
alia plana, itidem manebit inter ea plana æqualitas.

At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum
A I, ex constructione, hoc est ad quadratum V S; erit conuertendo vt
A C ad A G, ita quadratum V S ad quadratum A K; quadratum igitur
A K erit vna pars æqualitatis; alteram vero sic explorabimus.

Quoniam est vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex constructione, erit
conuertendo vt A C ad A G, ita L Z ad z V: vt autem L z ad z V, ita
est rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, eandem enim habent
altitudinem P V, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z
C ad rectangulum P V z.

Deinde fiat, vt A C ad A G, hoc est vt L z ad z V, ita P z ad aliam,
quæ sit z M erit z V maior, quam z M, quoniam & L z maior est,
quàm P z; vt autem P z ad z M; ita est rectangulum V P Z ad rectan-
gulum V P, z M; sunt enim eiusdem altitudinis V P, ergo vt A C ad A G,
ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M, sed ita ostensum
est & rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, ergo vt rectangu-
lum V P, L z ad rectangulum P V z, ita erit rectangulum V P z ad re-
ctangulum V P, z M, hoc est vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum,
quare & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum, i. e. & rectangu-
lum V P, L z minus rectangulo V P z. ad rectangulum P V z minus re-
D ctangulo V P, z M erit vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z,
hoc est vt A C ad A G. Itaque rectangulum P V z minus rectangulo V P,
z M erit altera pars æqualitatis.

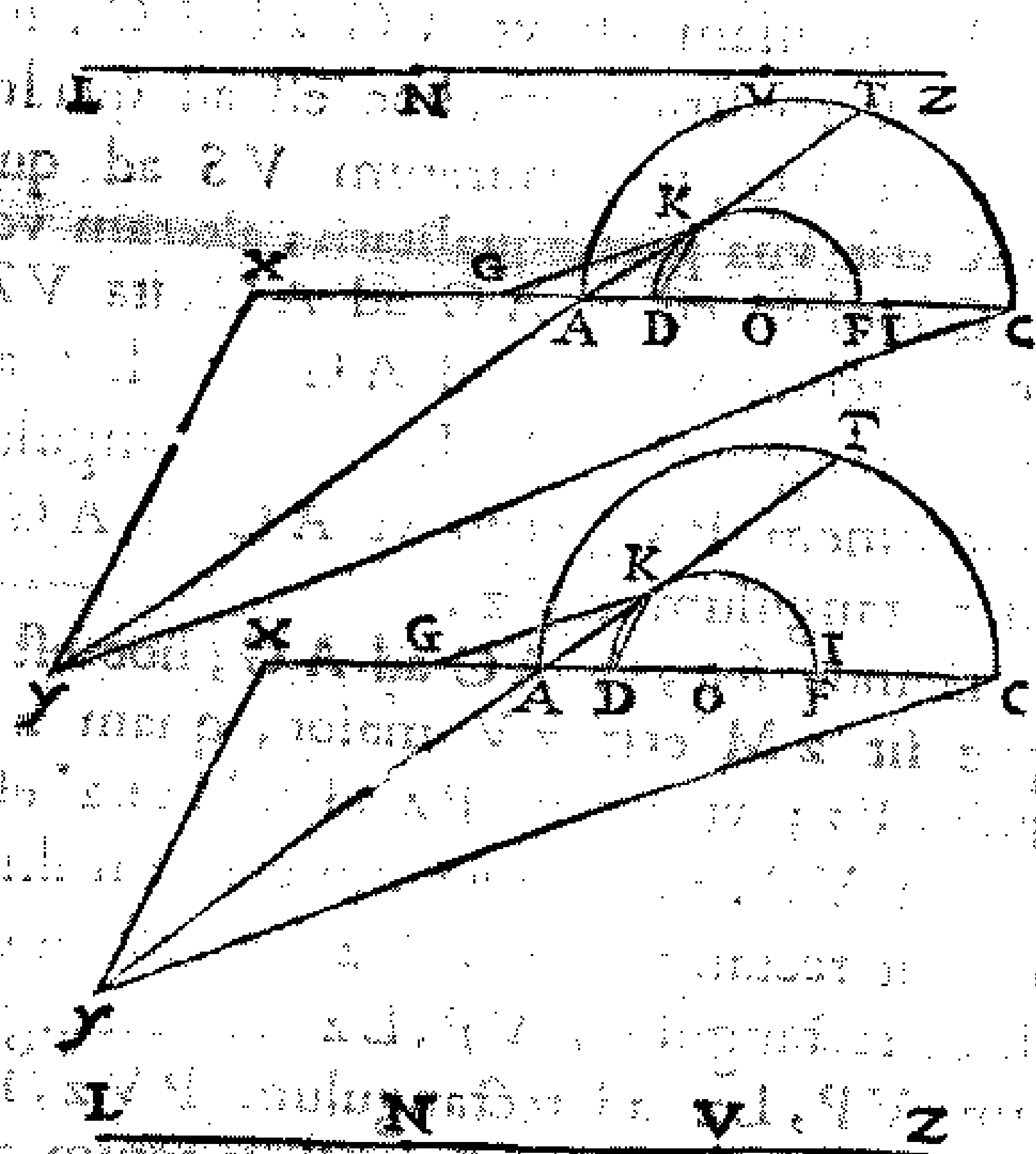
Quadratum igitur A K, hoc est rectangulum E A H æquale erit re-
ctangulo P V z, minus rectangulo P V, z M, hoc est æquale erit rectan-
gulo P V M, sed P V æqualis est A E, ex constructione, ergo & V M
æqualis erit A H.

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans E A con-
tinuatam in R, angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, &
ideo rectus cum sit rectus, & ipse A B C in semicirculo; quare æquales

erunt E B, H R, & sumpta E x æquali E H, vel V M, reliqua x B æqualis erit reliquæ A R, & cum sint æquales A E, V P, & æquales E X, V M tota A X toti P M æqualis erit. A

Et quoniam similia sunt triangula A B C, A R G anguli enim A B C, A R G sunt æquales, quia recti, hic ex constructione, ille ex vi semicirculi. Atque anguli B A C, R A G ad verticem sunt æquales, ideo vt A C ad A G, ita erit A B ad A R, sed vt A C ad A G, ita est quoque P Z ad Z M, ex constructione, ergo vt A B ad A R, hoc est ad B X, ita erit P Z ad Z M, & diuidendo vt A x ad x B, ita erit P M ad M Z, sed A x ostensa est æqualis P M, ergo & x B æqualis erit M Z, sed E x æqualis est V M, ex constructione, ergo tota E B æqualis erit toti V Z. Posita est igitur inter circumferentias k F, T C recta E B æqualis V Z datæ, eaque ad punctum A pertinet, quod erat faciendum. B

At vero rectam A I minorem esse, quàm V N sic demonstrabimus.



Duo sunt Casus, aut enim A D ad A F minorem rationem habet quam A G ad A C, aut non minorem. primum habeat non minorem & F C sic intercepta inter conuexam circumferentiam K F, & cauam T c, ergo A I
Lem. 4 Lem. 5 non * erit minor, quàm A F, atque F c * minima erit omnium interceptarum inter circumferentias k F, T c. C

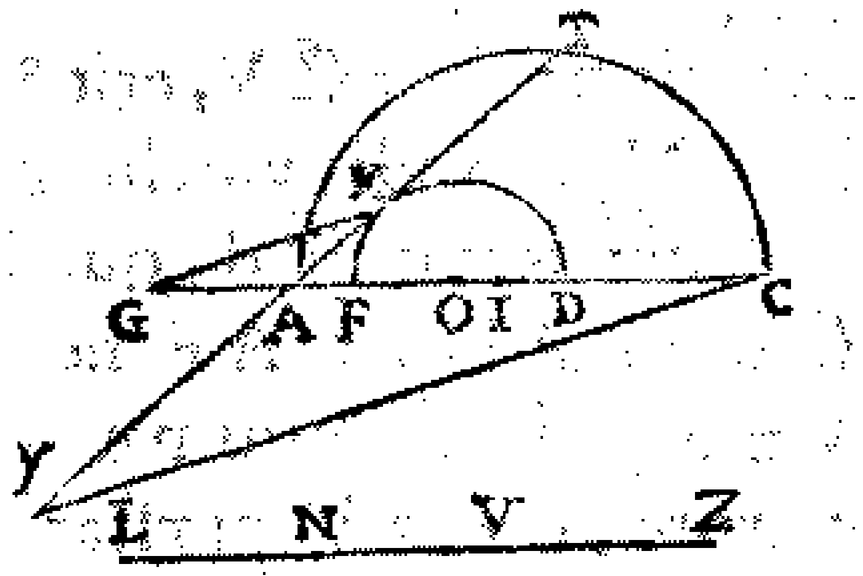
Connectantur autem G k, k D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes T A, C A productas in punctis y x: rectangulum igitur
Lem. 1 F A x * æquale est quadrato A I:
Lem. 3 quare * proportionales sunt F A, A I, A x vnde F x composita ex extremis, non erit minor, quàm dupla media A I.

Et quoniam est vt A G ad A C * ita F C ad c x, & ita V Z ad Z L ex constructione, erit F c ad c x, vt V Z ad Z L, & diuidendo vt c F ad F x, ita erit Z V ad V L, sed C F cum sit omnium interceptarum minima minor est, quàm Z V, ponitur enim Z V maior minima, ergo & F x minor erit, quàm V L: sed F x ostensa est maior, quàm A I dupla, ergo A I dupla minor erit, quàm V L, & consequenter simpla A I minor quàm V N dimidia videlicet ipsius V L. D

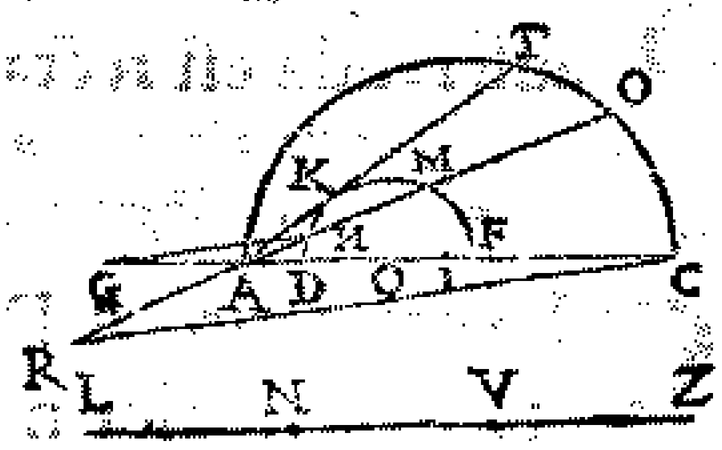
Lem. 5 Sed sit F C intercepta inter cauas circumferentias k F, T C, ergo k T * minima erit omnium interceptarum inter circumferentias K F, T C. Connectatur autem G K, & ei parallela agatur c y occurrens K A productæ in y.

Re-

A Rectangulum igitur y A K* æquale erit quadrato A I; & ideo* proportionales erunt y A, A I, A K; sunt autem & inæquales, quia A I* maior est, quam A K, ergo y k composita ex extremis maior erit, quàm A I dupla; Et quoniam est vt A G ad A C* ita K T ad T y, & ita quoque V z ad z L, ex constructione, erit K T ad T y vt V z z L; & diuidendo erit vt T K ad k y, ita z V ad V L, sed T K cum sit omnium interceptarum minima minor est, quàm z V, ergo & K y minor erit, quam V L, sed k y ostensa est maior, quàm dupla A I, ergo A I dupla minor erit, quàm V L & consequenter A I B simpla minor, quàm V N dimidia videlicet ipsius V L. Lem. 1 17 sexti Lem. 4 Lem. 5



Sed habeat A D ad A F minorem rationem, quàm A G ad A C, ergo A I* minor erit, quam A F, maior autem quàm A K, itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta æqualis A I. ducatur ergo, eaque sit A M, quæ producta secet circumferentiam T c in O: erit M O* minima omnium, quæ inter circumferentias k F, T C intercipiuntur. Secet autem recta A M circumferentiam K D in H, & connectatur G H, eique parallela agatur C R occurrens M A continuatæ in R. Rectangulum igitur M A R* æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M quare æquales erunt A R, A M. Lem. 4 Lem. 6 Lem. 5



C Et quoniam est vt A G ad A C,* ita M O, ad O R; & ita V z ad z L ex constructione, erit M O ad O R, vt V z ad z L; & diuidendo erit vt O M ad M R, ita z v ad V L: sed O M cum sit omnium interceptarum minima, minor est, quàm z V ponitur enim z V maior minima; ergo erit & M R minor, quàm V L, & consequenter A M, vel A I minor, quam V N, dimidia videlicet minor quàm dimidia. Quare constat propositum. Lem. 5

Scholium.

Si autem existente ratione A D ad A F non maiori quam A G ad A C data V z sit æqualis minimæ interceptarum, erit & A I æqualis V N, id- D que ita ostendemus.

Primum sit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad A C, ergo F C* minima erit interceptarum & A I* æqualis A F, & cum sit rectangulum F A x* æquale quadrato A I erit & A x æqualis A I, atque adeo tota F x dupla ipsius A I; & quoniam ostensæ sunt supra, proportionales C F, F x, z V, V L, prima autem c F æqualis est z V tertiæ, ponitur enim z V æqualis minimæ, ergo & secunda F x æqualis erit V L quartæ, & consequenter A I æqualis V N, dimidia videlicet dimidiæ. Lem. 5 Lem. 4 Lem. 5

Sed sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. Quoniam igitur ostensæ sunt proportionales O M, M R, z V, V L, & O M minima

æqua-

æqualis ponitur Z V, erit & M R æqualis V L; vnde & A M vel A I æqualis V N, dimidia videlicet dimidiæ. A

Patet igitur illud, quod in Scholio per Resolutionem monuimus; nempe si ratio A D ad A F non sit maior ratione A G ad A C, & præterea data V z æqualis sit minimæ, quadratum V N, dimidiæ videlicet differentiæ rectarum, L z, z V præstare quadrato A I nihilo: id est alteram alteri æquale esse.

Quo autem Casu rectæ V N auferenda sit recta æqualis N S, quoue addenda; ratio his constat præceptis.

Præceptum primum.

SI ratio A D ad A F non sit minor ratione A G ad A C, rectæ V N auferenda est recta æqualis N S. B

Præceptum II.

SI vero ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, & V Z data non maior minore rectarum K T, F C, rectæ V N poterit siue addi, siue auferri recta æqualis N S: in hoc enim Casu recta æqualis datæ V z potest optari inter circumferentias k F, T C ex vtraq; parte minimæ, & ideo duobus modis Problema absolui. Nam si auferatur, aptabitur ea recta è regione K T, si vero addatur aptabitur è regione F C.

Præceptum III.

QVod si V Z data maior sit minore rectarum K T, F C, recta ipsi V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias k F, T C ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum K T, F C, ergo existente k T maiore, quam F C, rectæ V N auferenda est recta æqualis N S existente minore, addenda. C

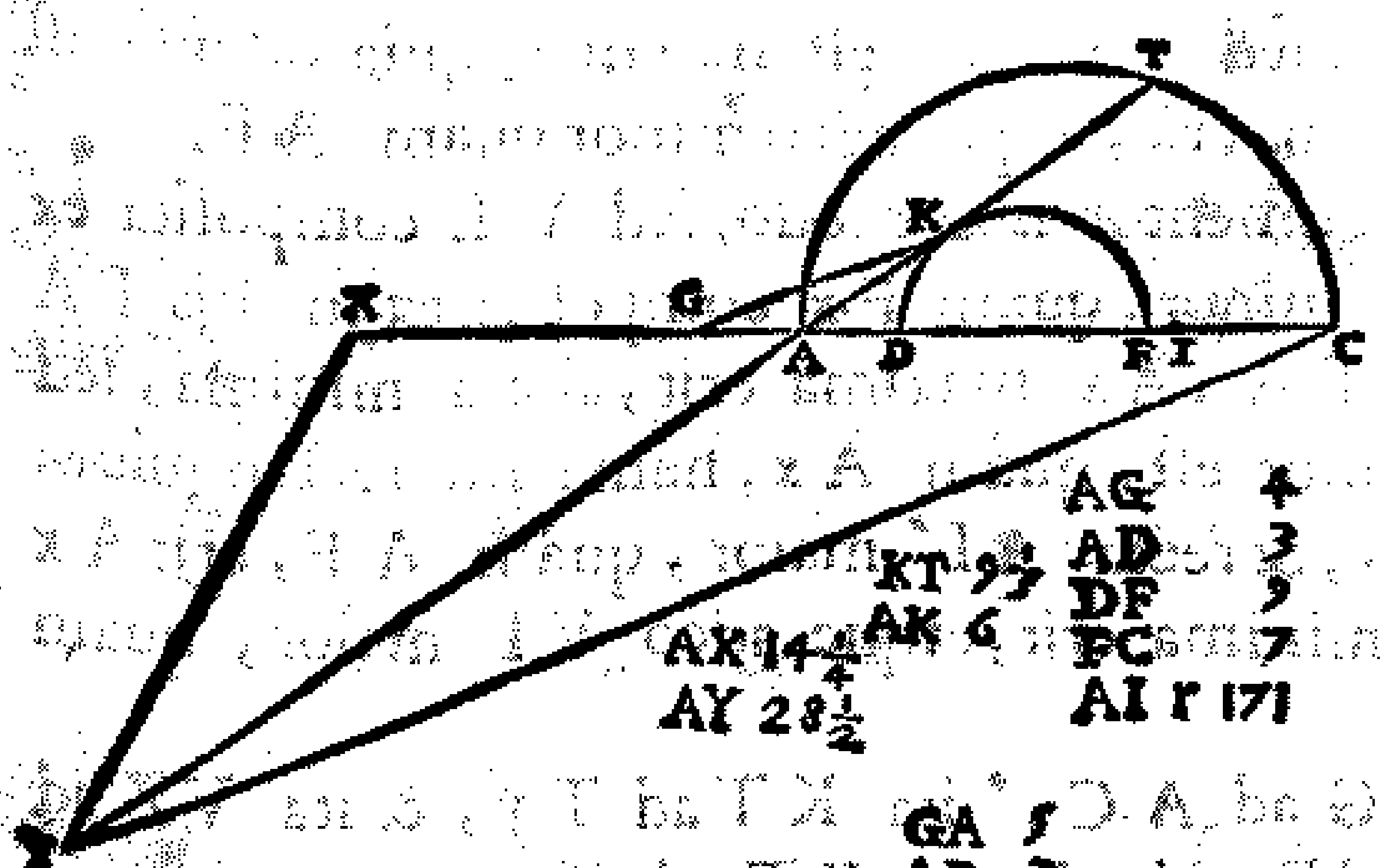
Nunc ostendendum est rectam V P sumptam quemadmodum præcepta docent non esse maiorem maiore rectarum A F, A k, nec minorem minore quo pertinent tria quæ sequuntur Lemmata.

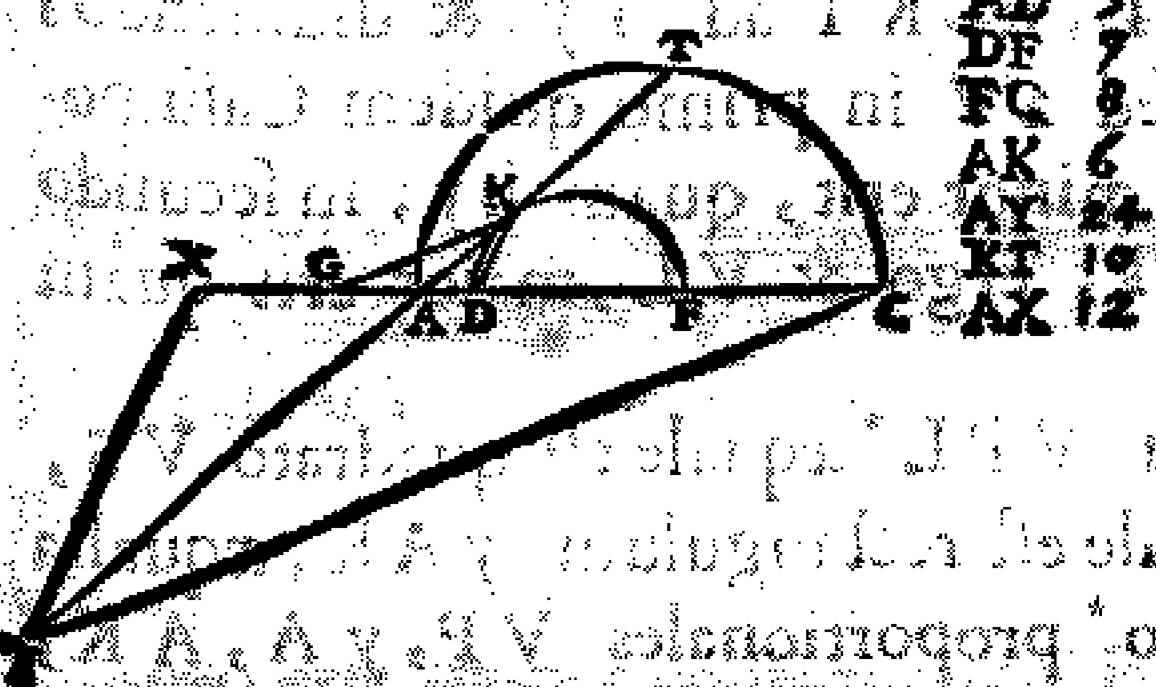
Lemma VII.

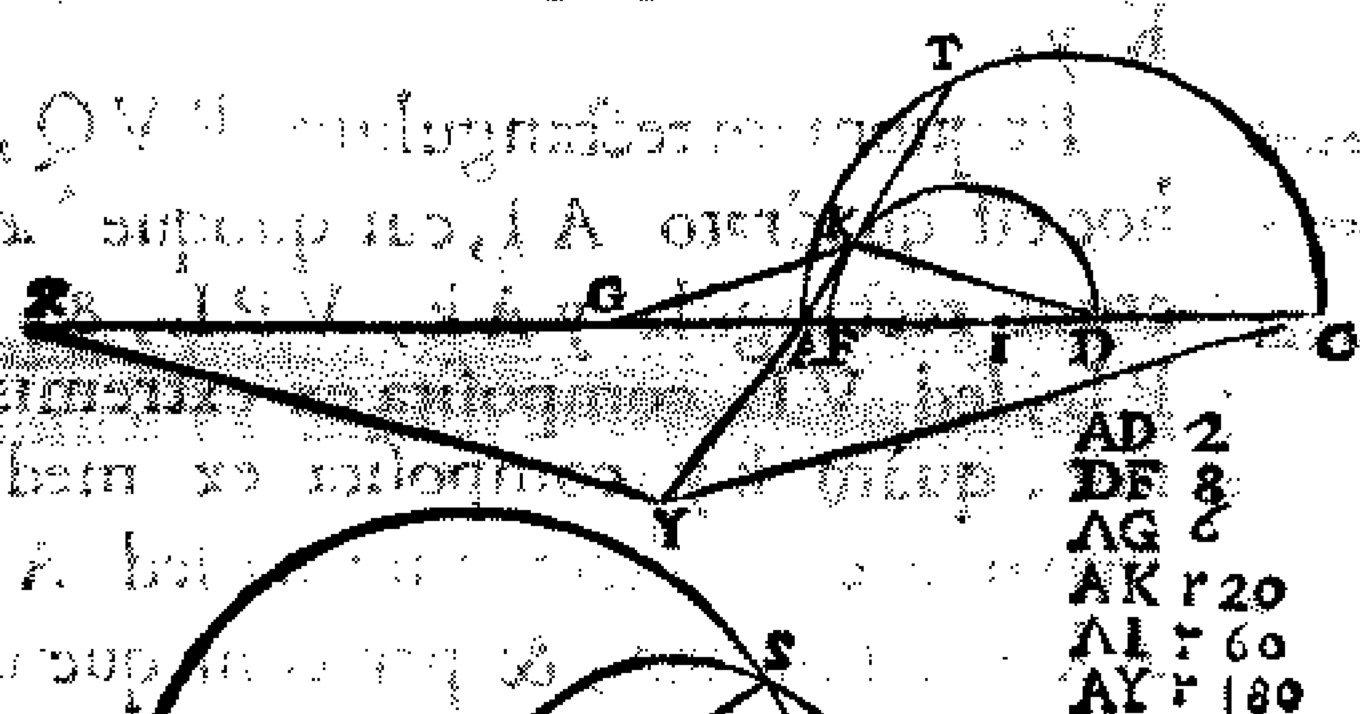
Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico V P æqualem differentiæ rectarum V N, N S minorem esse maiore rectarum A F, A k maiore autem minore. D

AVt enim recta F C intercipitur inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C; quo Casu A F maior est, quàm A k, aut inter vtramque cauam, & A F minor est, quàm A K. Primo Casu k T* maxima est omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur, minima vero F C, itaque V Z data minor est quàm k T, maior autem, quàm F C ponitur enim V Z minor maxima, maior minima.

lem 5







A nima. Secundo Casu* minima est KT, maxima FC, vnde VZ data, maior, est quam kT, minor quàm FC. Lem. 5

Connectantur autem Gk, KD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes kA, CA continuatas in punctis y x. Quoniam igitur est vt AG ad AC,* ita FC ad Cx, & ita VZ ad ZL, ex constructione, erit VZ ad ZL, vt Fc ad Cx: & diuidendo, vt ZV ad VL, ita erit CF ad Fx; sed ZV in primo quidem Casu ponitur maior, quàm CF; ergo & VL maior erit, quàm Fx. in secundo vero Casu ponitur ZV minor, quàm FC ergo & VL minor erit, quàm Fx. Lem. 5

Et quoniam æquales sunt LN, NV, ex constructione, & æquales quoque NP, NQ, vt semidiametri, ergo sunt quoque æquales LP, VQ; B quare rectangulum PVQ æquale erit rectangulo VPL, sed rectangulum PVQ* æquale est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum FAx, ergo rectangulum VLP æquale erit rectangulo FAx quare proportionales erunt VP, FA, Ax, PL. in primo quidem Casu sic argumentor; sed VL composita ex extremis ostensa est maior 6 tertij Lem. 5

ior

ior, quàm Fx composita ex medijs; ergo altera* extremarum VP, PL maxima erit, altera minima, sed VP non est maxima, quia ostensa est minor, quàm PL, ergo minima erit, atque adeo minor quàm AF. A

In secundo autem Casu argumentor hoc modo, sed VL composita ex extremis VP, PL ostensa est minor, quàm Fx composita ex medijs FA Ax, ergo altera* mediarum FA, Ax maxima erit, altera minima, sed AF non est maxima, quia minor est, quàm Ax, nam cum rectangulum FAx* æquale sit quadrato AI, & recta AI* maior, quàm AF, erit Ax multo maior, ergo ipsa AF minima erit, atque adeo VP maior, quàm AF.

Theor. 2 huius

Lem. 3 Lem. 4

Lem. 3 Rursus quoniam est vt AG ad AC,* ita KT ad Ty, & ita VZ ad zL, ex constructione, erit vt Vz ad zL, ita KT ad Ty; & diuidendo, vt zV ad VL, ita erit Tk ad ky; sed zV in primo quidem Casu ponitur minor, quàm Tk; ergo & VL minor erit, quàm ky; in secundo vero Casu zV ponitur maior, quàm Tk, ergo & VL, maior erit quàm Ky. B

36 tertij Et quoniam rectangulum PVQ, seu VPL* æquale est quadrato VS,
Lem. 1 hoc est quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum yAK, æqualia
16 sexti erunt rectangula yAk, VPL, & ideo* proportionales VP, yA, AK, PL, sed VL composita ex extremis, in primo quidem Casu ostensa est mi-
2 nor, quàm ky composita ex medijs, ergo altera* mediarum yA, Ak maxima erit, altera minima sed Ay ostensa est maior, quàm Ak; ergo Ak erit minima, & per consequens VP maior, quam Ak. C

Theor. 2 huius In secundo autem Casu VL composita ex extremis VP, PL, ostensa est maior, quàm yK composita ex medijs; ergo altera* extremarum VP, PL maxima erit, altera minima; sed VP minor est quàm PL; ergo ipsa VP minima erit, atque adeo minor, quàm Ak. Existente igitur ratione AD ad AF, non minori, quàm AG ad AC, recta VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS, minor est maiore rectarum AF, AK, maior minore, quod erat ostendendum.

Lemma VIII.

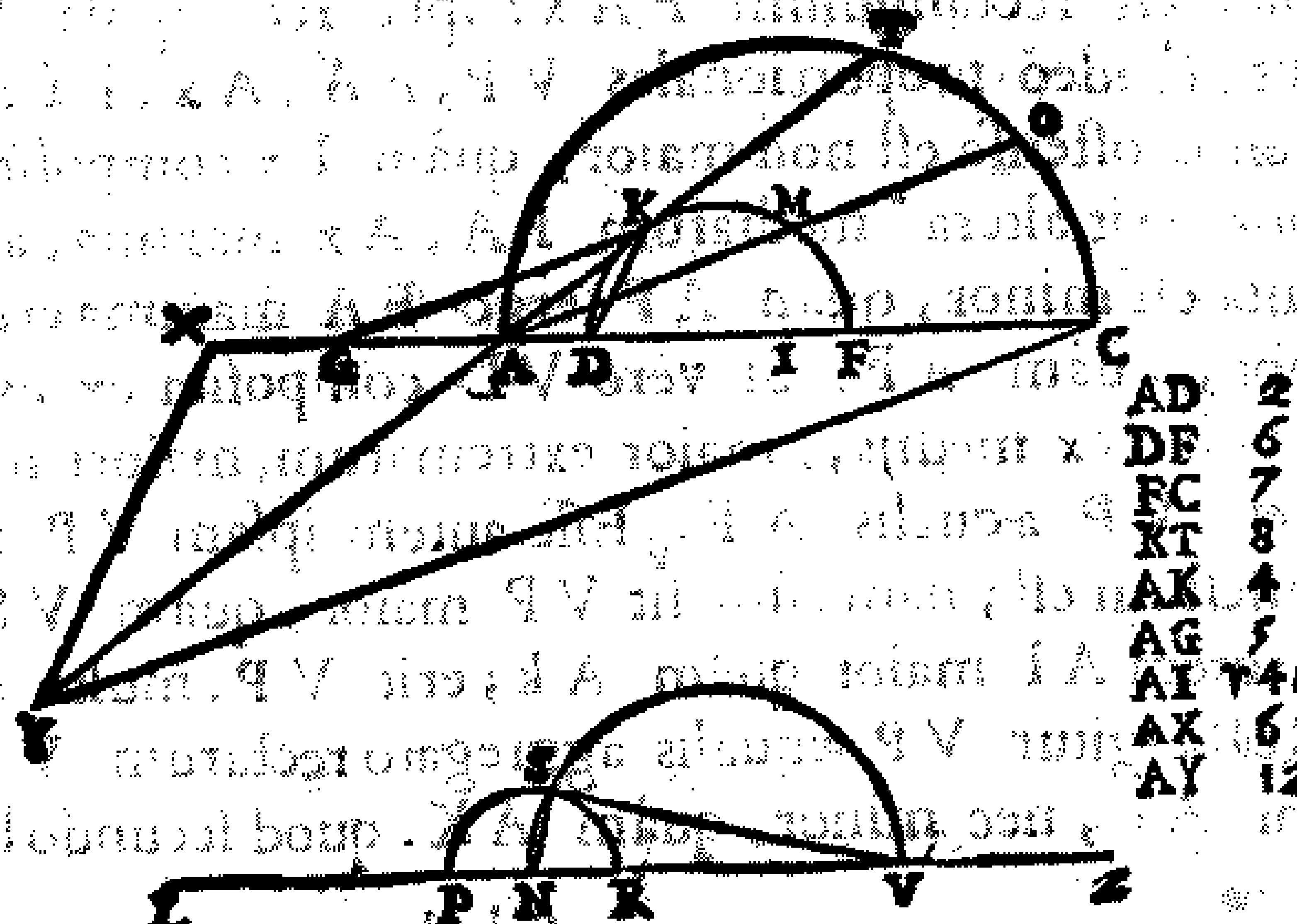
Sit ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC, & data Vz non maior minore rectarum KT, FC. Dico neque differentiam rectarum VN, NS, neque compositam ex ijsdem minorem esse, quàm AK, aut maiorem, quàm AF. D

Connectantur enim Gk, kD quibus parallelæ agantur cy, yx secantes TA, CA productas in punctis y x, & sit primum VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS.

Lem. 3 Quoniam igitur est vt AG ad AC,* ita kT ad Ty, & ita quoque VZ ad ZL ex constructione erit, vt VZ ad ZL, ita KT ad Ty: & diuidendo, vt ZV ad VL, ita erit TK ad Ky, sed ZV non est maior, quàm Tk,

po-

A ponitur enim ZV non maior minore rectarū KT, FC; ergo neque VL maior erit quàm Ky. & cum sit rectangulum yAK* æquale quadrato AI, & recta AI,* maior, quàm AK erit Ay multo maior. lem. 3 lem. 4

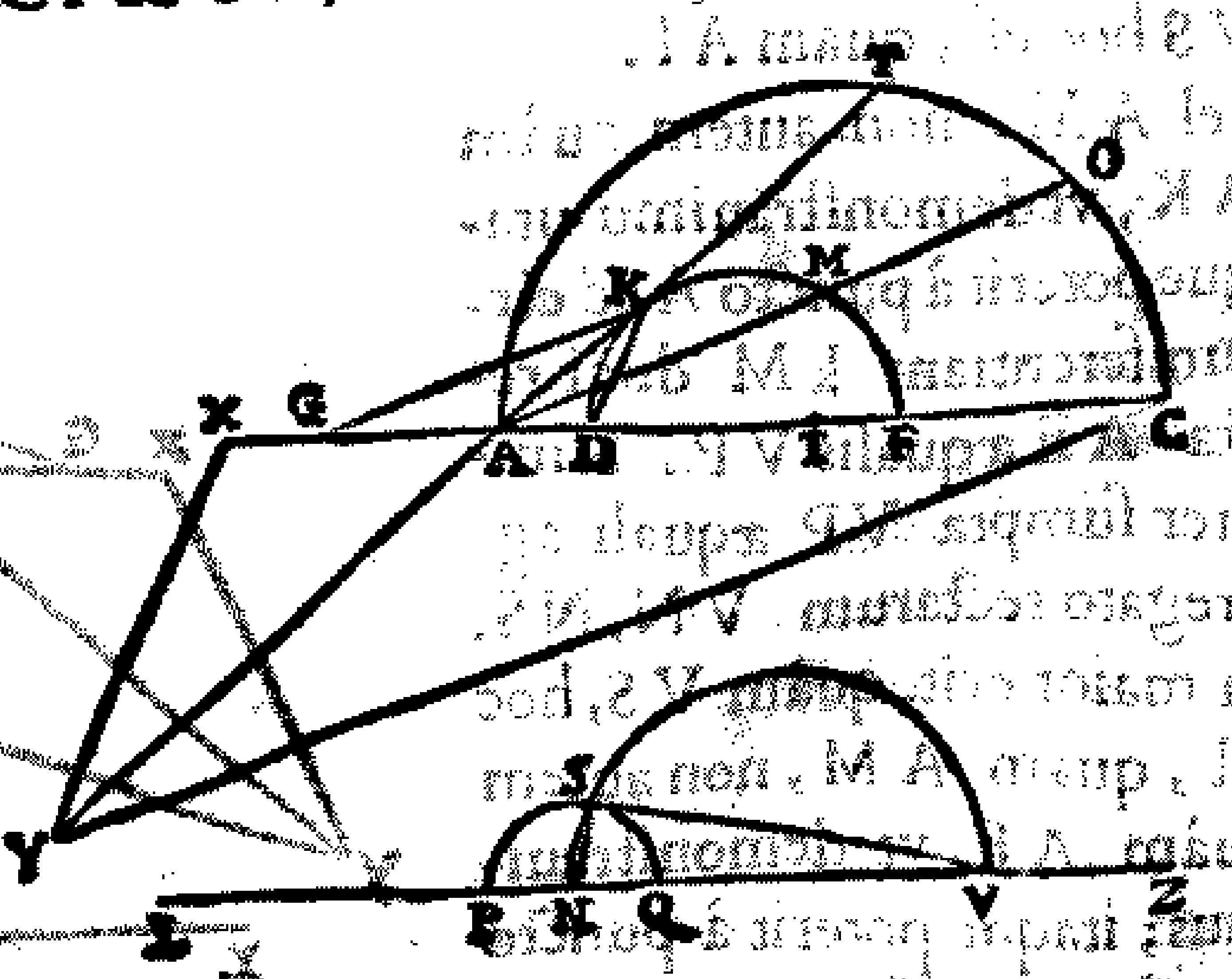


Et quoniam rectangulum PVQ, hoc est
B VPL (sunt enim æquales VQ, PL) *æquale est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum yAk; ideo æqualia erunt rectangula VPL, yAK, & ideo proportionales VP, yA, AK PL: sed VL composita ex extremis ostensa est non maior, quàm ky composita ex medijs, ergo si est minor, erit altera * mediarum yA, Ak maxima, altera minima; sed Ay ostensa est maior, quàm AK ergo AK minima erit, & per consequens VP maior, quàm AK. Si vero VL composita ex extremis æqualis est yK compositæ ex medijs, minor extremarum minori mediarum, *æqualis erit: hoc est VP æqualis Ak. 3. tertij lem. 3 Theor. 8 huius Theor. 8 huius

C Ipsam autem VP minorem esse, quàm AF patet; nam cum sit VP minor, quàm VS hoc est, quam AI, ipsa autem AI* minor, quam AF, erit VP multo minor. Recta igitur VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS non est minor, quàm AK, nec maior, quàm AF. quod est primum. lem. 4

Sed sit VP æqualis aggregato rectarum VN, NS.

Quoniam igitur est vt AG ad AC,* ita Fc ad cx, & ita quoque VZ ad ZL, ex constructione, erit vt VZ ad ZL ita FC ad Cx; & diuidendo vt ZV ad VL, ita CF ad Fx; sed ZV non est maior quam CF: ponitur enim ZV non maior minore rectarum KT, FC, ergo neque VL
D maior erit, quàm Fx. Et cum sit rectangulum FAx* æquale quadrato AI, & recta AI* minor, quàm AF, erit Ax multo minor. lem. 3 lem. 3 lem. 4



Et quoniam rectangulum PVZ, hoc est VPL (sunt enim æquales VQ, PL)* æquale est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque* lem. 3 lem. 3

æqua

æquale est rectangulum F A x: ipsa rectangula V P L, F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V P, F A, A x, P L: sed V L composita ex extremis ostensa est non maior, quàm F x composita ex medijs; ergo si est minor, erit altera * mediarum F A, A x maxima, altera minima; sed A x ostensa est minor, quàm A F: ergo F A maxima erit, & consequenter V P minor, quàm A F. Si vero V L composita ex extremis æqualis est F x compositæ ex medijs, * maior extremarum maiori mediarum æqualis erit; hoc est V P æqualis A F. Esse autem ipsam V P maiorem, quàm A k, manifestum est; nam cùm sit V P maior, quàm V S, hoc est, quàm A I; ipsa autem A I maior quàm A k; erit V P, multo maior.

Theor. 1 huius

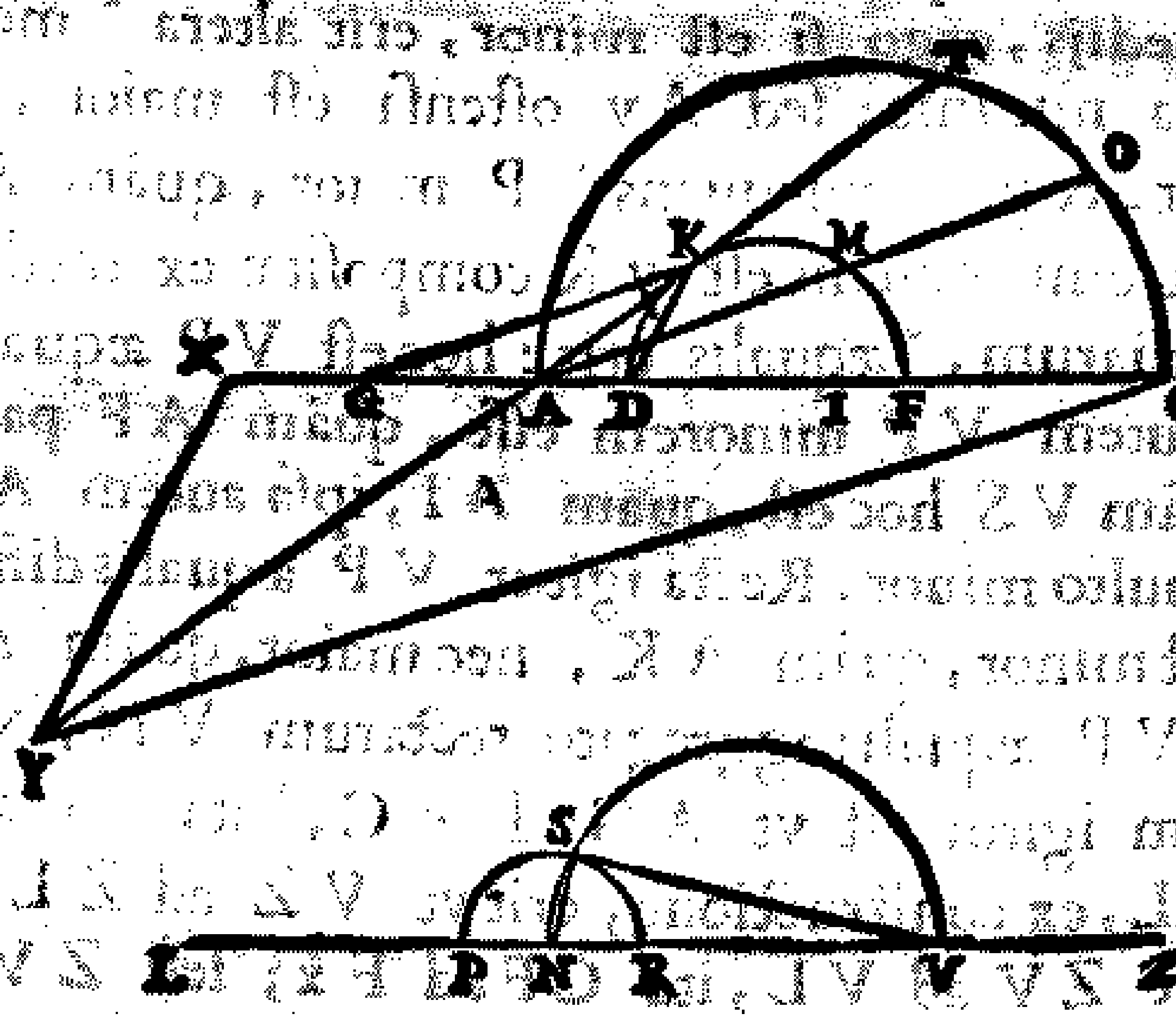
Lem. 3 huius

Recta igitur V P æqualis aggregato rectarum V N, N S non est maior quàm A F, nec minor, quàm A K. quod secundo loco erat ostendendum.

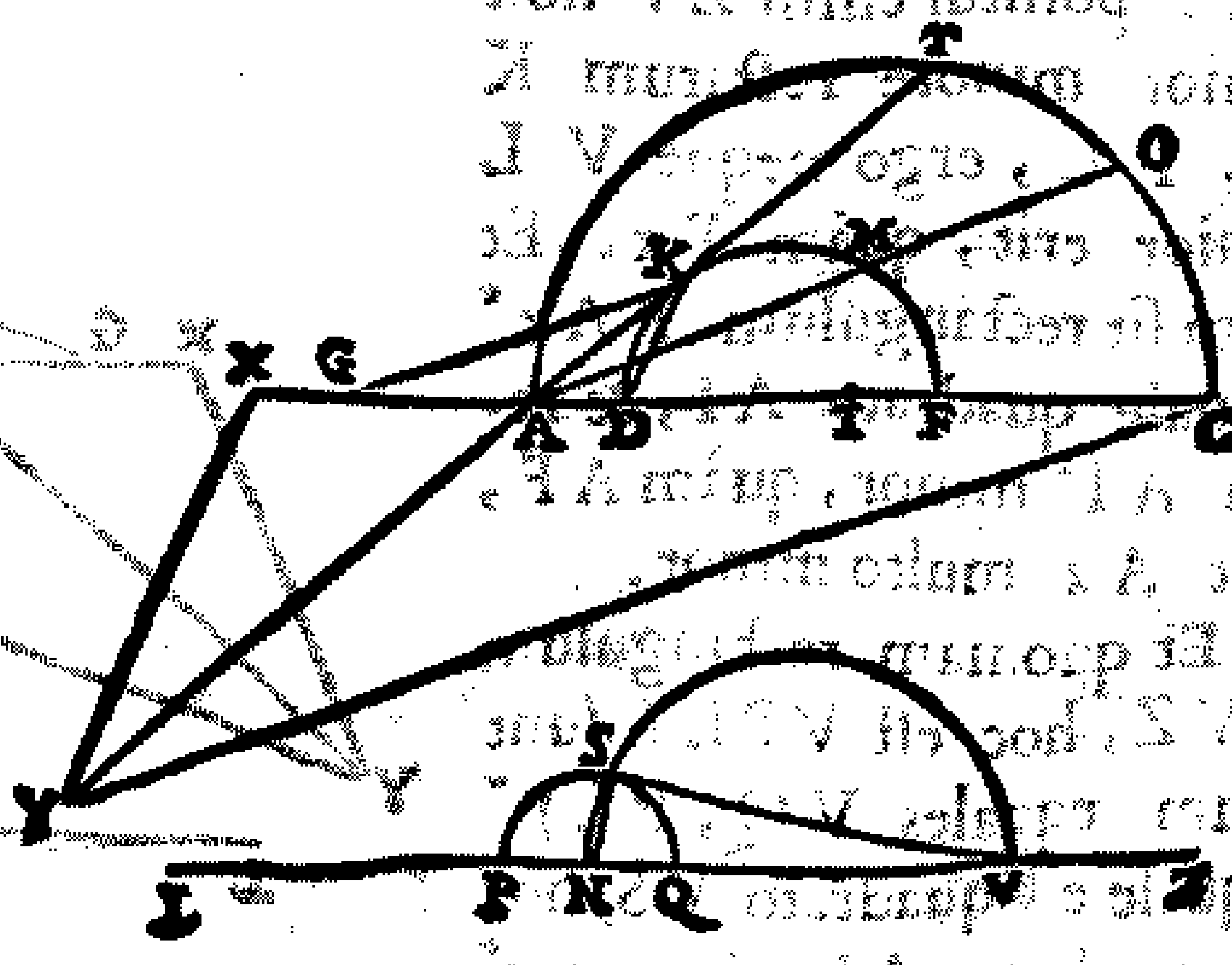
Scholium.

Ex demonstratis patet, cum A D ad A F minorem rationem habet, quàm A G ad A C, data autem V Z non est maior minore rectarum k T, F C; Problema duobus modis absolui posse. Nam si à puncto A ad circumferentiam K F ducatur recta A M æqualis A I, & producatur donec secet circumferentiã T C in O, erit M O minima omnium, quæ inter circumferentias KF, T C interijciuntur, & sumpta V P æquali differentiæ rectarum V N, N S, ea minor erit, quá V S hoc est, quàm A I, vel A M, non autem quàm A K, vt demonstrauimus; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k M duci recta A E æqualis V P. Similiter sumpta V P æquali aggregato rectarum V N, N S, ea maior erit, quàm V S, hoc est, quàm A M, non autem quàm A F, vt demonstrauimus; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam M F

Lem. 4



AD	2
DF	6
FC	7
KT	8
AK	4
AG	5
AI	√48
AX	6
AY	12



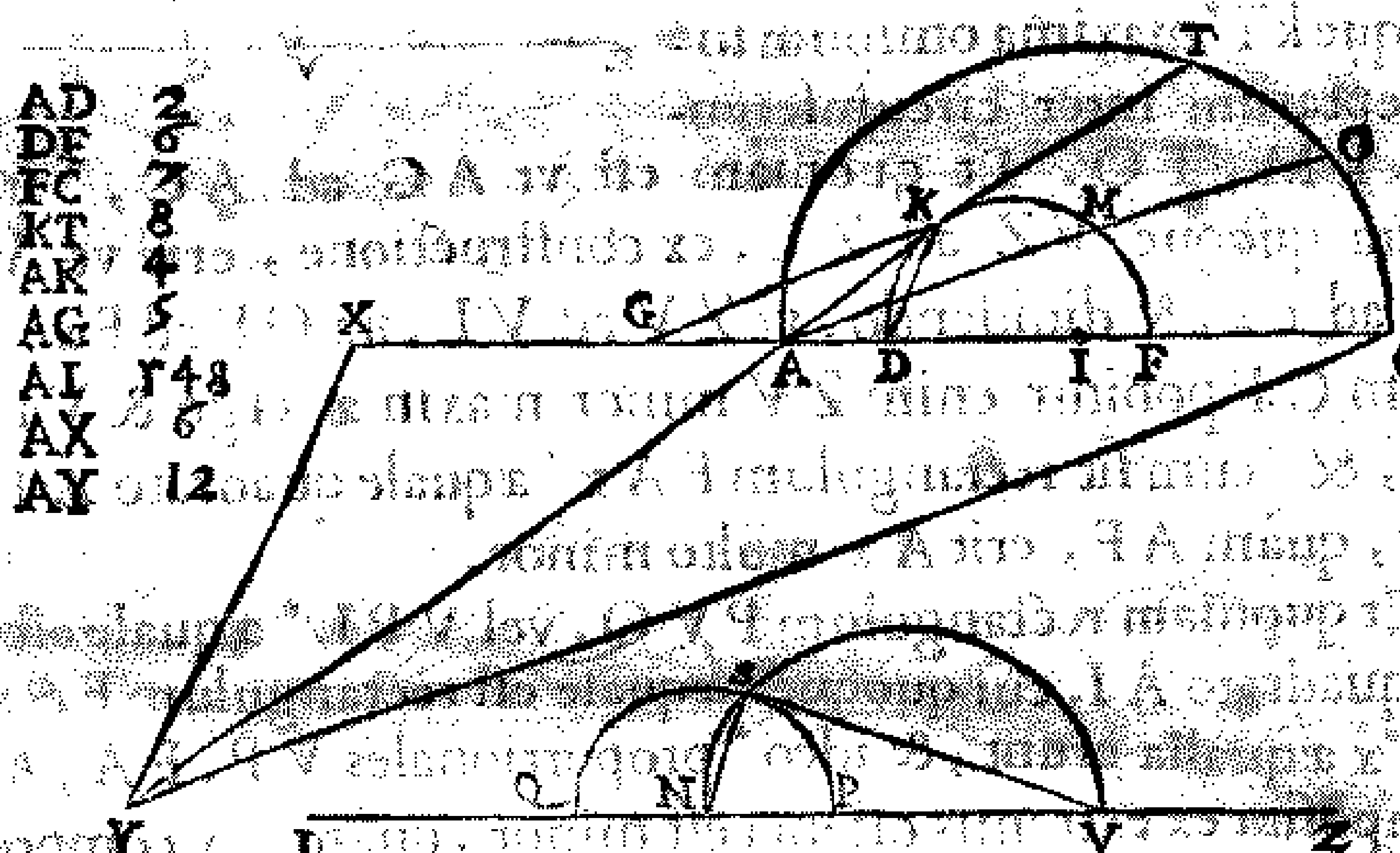
du-

A duci recta A E æqualis ipsi V P. Igitur si A E ducatur æqualis differentiæ rectarum V N, N S, aptabitur recta datæ V z æqualis inter circumferentias K M, T O, si vero ducatur A L æqualis aggregato ipsarum V N, N S, aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C, atque adeo poterit aptari ex vtraque parte minimæ M O, ac proinde Problema duobus modis absolui. quod in præcepto secundo monuimus.

Lemma IX.

Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, data autem V Z sit maior minore rectarum K T, F C, & à puncto A ad circumferen-
B tiam k F ducatur A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam T C
in O, est autem A I* minor, quàm A F, & maior quam A k. Dico si K T Lem. 4
maior sit, quàm F C, differentiam rectarum V N, N S maiorem esse, quàm A K, minorem quam A M; sin minor, compositam ex V N, N S, minorem esse, quàm A E, maiorem, quàm A M.

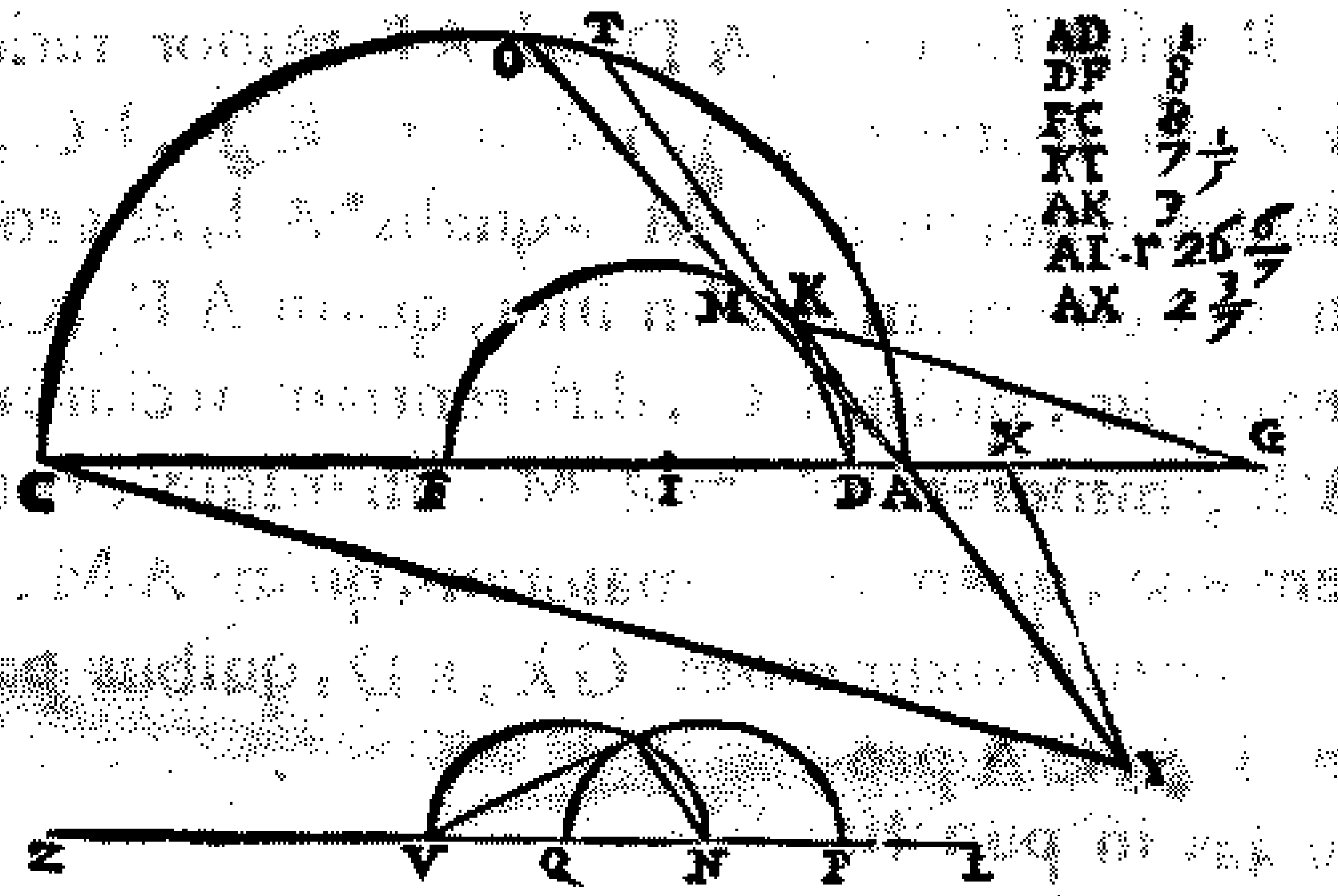
Connectantur enim G k, k D, quibus parallelæ agantur C y, y x secantes T A, C A productas in punctis y x, & sit primum V P æqualis differentiæ re-
C ctarum V N, N S. & k T maior, quá FC, ergo ipsa k T maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias K F, T C: quare recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias k M, T O, non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit Corol.
D V Z maior, quam F C, ex positione, ipsaq. F C* maxima omnium interce- Lem. 4
ptarum inter circumferentias M F, O C. Quoniam igitur est vt AG ad A C, lem. 3
*ita K T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita k T ad T y; & diuidendo, vt Z V ad V L, ita T K ad k y: sed Z V minor est, quàm T k; ponitur enim Z V minor maxima, ergo & V L minor
erit, quàm k y, & cum sit rectangulum y A K* æquale quadrato A I, & recta lem. 3 lem. 4
A I* maior, quàm A k, erit A y multo maior.



Et quoniam rectangulum P V Q hoc est V P L (sunt enim æquales V Q,
P L)* æquale est quadrato V S, vel quadrato A I, cui quoque *æquale 36. tertij lem. 3
est rectangulum y A k, æqualia erunt rectangula V P L, y A k, &

ideo* proportionales V P, y A, A K, P L, sed V L composita ex extremis A
Theor. 2 huius ostensa est minor, quam k y composita ex medijs, ergo altera* mediarum y A, A k maxima erit, altera minima; sed A y ostensa est maior, quàm A k ergo A k minima erit, & consequenter V P maior, quàm A k. Quod autem ipsa V P minor sit, quàm A M patet ex eo, quod ea minor est quàm V S, ipsique V S æqualis A I, vel A M, ex constructione. Existente igitur k T maiore, quàm F C, recta V P differentia rectarum V N, N S maior est, quàm A K, minor autem quam A M. quod est primum.

Sed sit V P æqualis compositæ ex V N, N S, & K T minor,
Lem. 6 quam F C, ergo F C* maxima est omnium interceptarum inter circumferentias k F, T C, quare recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non etiam inter circumferentias k M, T O cum sit V Z maior quam k T ex positione,
Corol. Lem. 6 ipsaque k T* maxima omnium interceptarum inter circumferentias k M, T O.



Lem. 3 Et quoniam est vt A G ad A C,* ita F C ad C X, & ita quoque V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x; & diuidendo, vt Z V ad V L, ita C F ad F x: sed Z V minor est C
quàm C F ponitur enim Z V minor maxima, ergo & V L minor erit, quam F x, & cum sit rectangulum F A x* æquale quadrato A I, & recta A I* mi-
Lem. 3 Lem. 4 nor, quàm A F, erit A x multo minor.

36 tertij Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L* æquale est quadrato V S, hoc
lem. 3 est quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum F A x rectangula V P L
16 sexti F A x æqualia erunt, & ideo* proportionales V P, F A, A x, P L, sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quàm F x composita ex medijs ergo
Theor. 2 huius altera* mediarum F A, A x maxima erit, altera minima; sed A x ostensa est minor, quàm F A, ergo ipsa F A maxima erit, quare V P minor, quàm A F. Ipsam autem V P maiorem esse, quam A M manifestum est: nam ea maior est D
quam V S, V S autem æqualis A I, vel A M, ex constructione. Existente igitur K T minorem, quam F C recta V P æqualis compositæ ex V N, N S minor est, quàm A F, maior autem quam A M. quod secundo loco erat ostendendum, quare constat propositum.

Plerumque accidit vt Resolutio Problematis incidat in æquationem de duobus terminis explicabilem, ex quibus vnus tantum solutioni Problematis idoneus sit, quippe non semper vterque indicat id quod quæritur, sed alter tantum, interdum minor, interdum maior. Dicendum est igitur quomodo terminus quæsitum indicans dignoscatur.

Dignoscitur terminus quæsitum indicans ipsa terminorum, prout

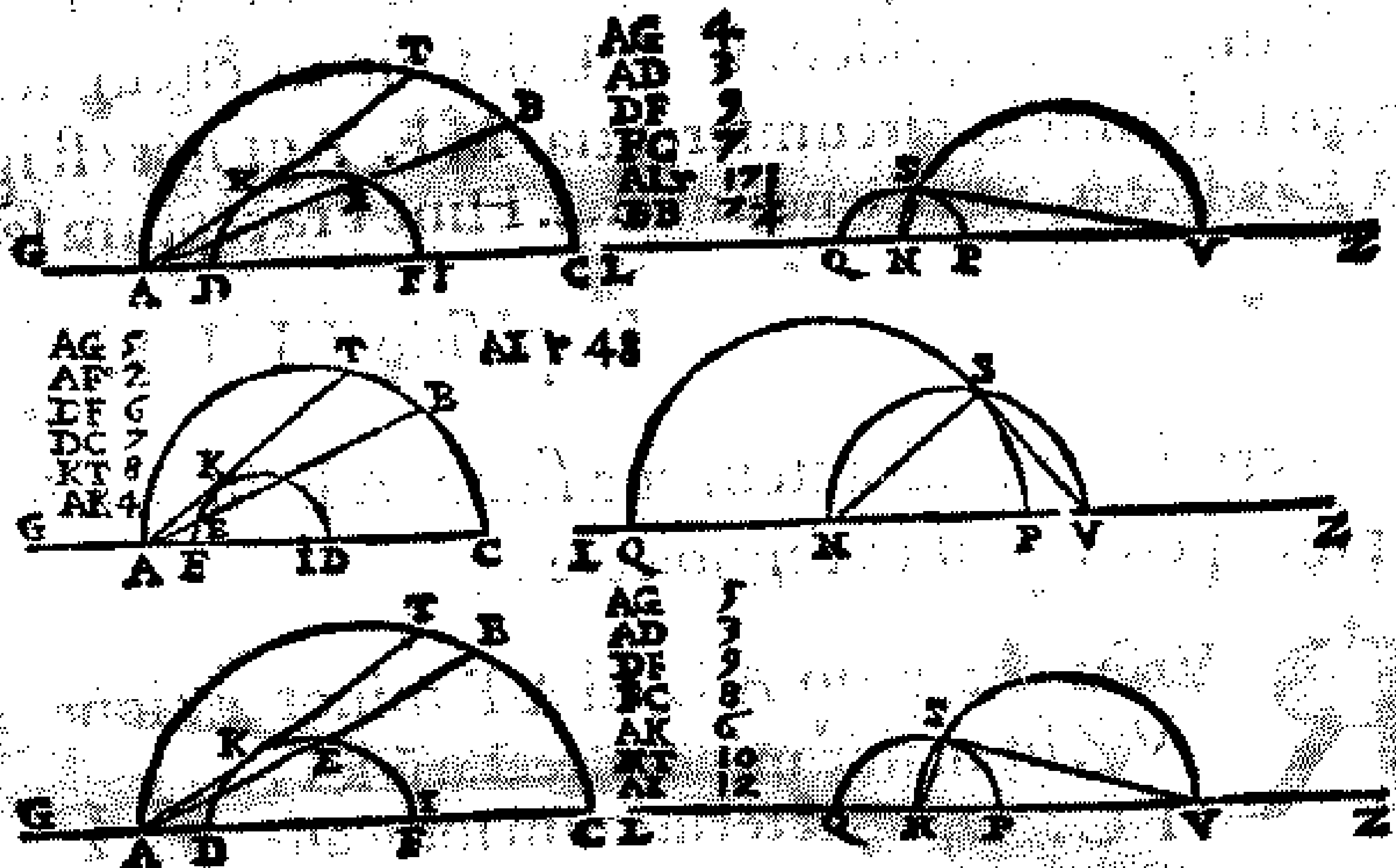
Po-

A Porisma præcipit, exhibitione: nam exhibitis illis terminis, si vnus tantum idoneus est solutioni Problematis, alter in construendo Problemate manifesto se ostendit, aut maiorem quæsito, aut minorem, aut etiam alia via constructioni aduersantem: is ergo reijciendus; sumendus autem alter pro indice quæsiti; si vero vterque terminus solutioni idoneus est, quia vero non indicat eundem quæsitum vterque, sunt enim eo Casu duæ magnitudines, de quibus potest quæri, altera minor, altera maior. Ideo si de minore quæritur sumendus est pro indice quæsiti terminus minor, si verò de maiore sumendus maior. Hæc omnia exemplis fient euidentiora.

Propositio I.

B Terminum quæsitam A E indicantem in semicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoscere.

SIt ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Resumantur compositionis figuræ ad huiusmodi Casum pertinẽtes. Quoniam igitur termini de quibus Æquatio explicabilis est sunt V P differentia rectarum V N, N S, & V Q aggregatum earundem, manifestum est alterum C eorum quæsitam A E indicare. Et quoniam ratio A D ad A F ponitur non minor ratione A G ad A C, recta A I non erit* minor maiore rectarum A F, A k, vnde A E quæsita minor erit, quam A I, hoc est quam V S, & multo minor quam V Q. ipsa igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V P. Itaque existente ratione A D ad A F, non minore quam A G ad A C, differentia rectarum V N, N S indicat D A E quæsitam. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum constitutum est.

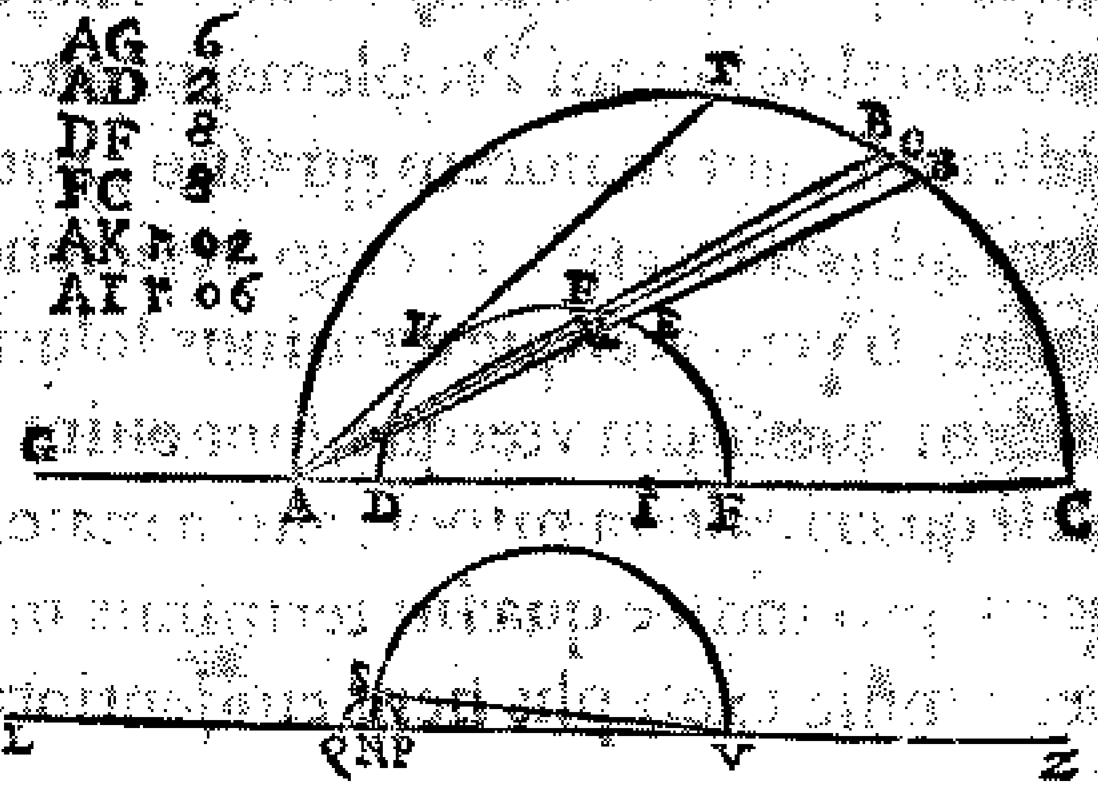


lem. 4

Propositio I I.

Terminum quæsitam A E indicantem in semicirculis ad secundum Præceptum pertinentibus dignoscere.

SIt ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & data V Z non sit maior minore rectarum K T, F C. Oportet terminum quæsitam A E indicantem dignoscere. Resumatur Compositionis figura ad huiusmodi casum



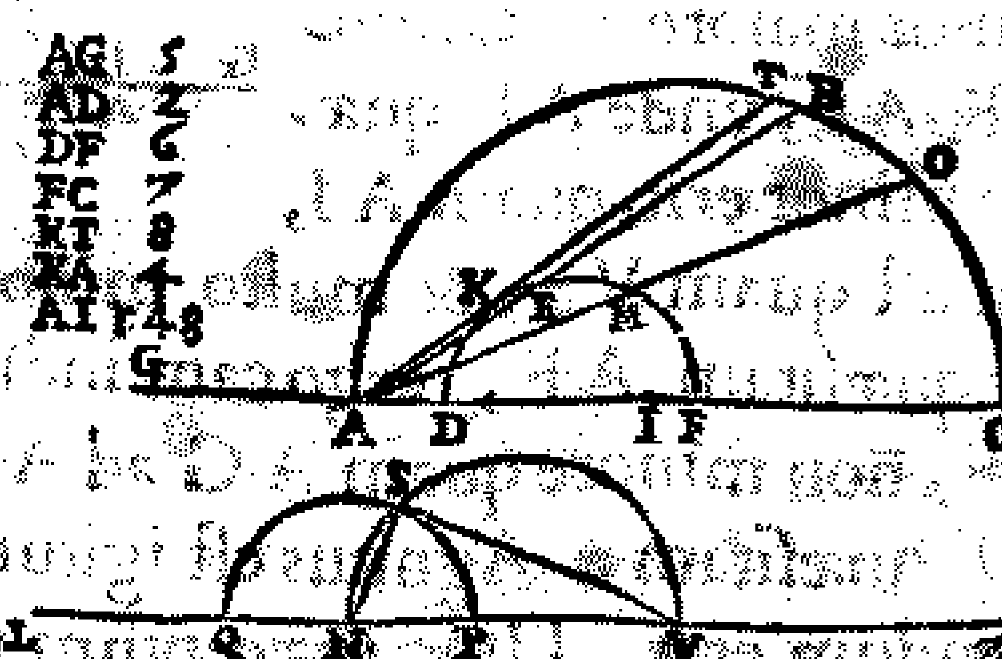
sum pertinens. Quoniam igitur termini, de quibus æquatio explicabilis est sunt V P minor, V Q maior, manifestũ est alterum eorum indicare quæsitam A E. Ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, hoc

lem. 4 potest fieri, est enim A I* minor quàm A F, maior autem quam A k. Aut igitur quæsita A E desinit in circumferẽtia M K, aut in circumferentia M F. Si in M K, ea erit minor quam A M, hoc est quam A I, seu V S, & multo minor, quàm V Q aggregatum rectarum V N, N S. Recta igitur V Q non indicat A E quæsitam, ergo eam indicat V P differentia ipsarum V N, N S.

Si verò quæsita A E desinit in circumferentia M F, ea maior est, quã A M, hoc est quam A I, vel V S, & multo maior quam V P. recta igitur V P non indicat A E, quæsitum ergo eam indicat V Q. Si igitur ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, & data V Z non sit maior minore rectarũ K T F C indicabit quæsitam A E, tum differentia, tum aggregatum rectarum V N N S, differentia quidem si A E desinit in circumferentia k M, aggregatum vero si desinit in circumferentia M F. Agnitus est igitur terminus quæsitum A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum secundum cõstitutum est.

Propositio III.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoscere.



Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, data autem V Z sit maior minore rectarũ k T, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Fiat cõstructio vt supra, & producatur A M ad cir-

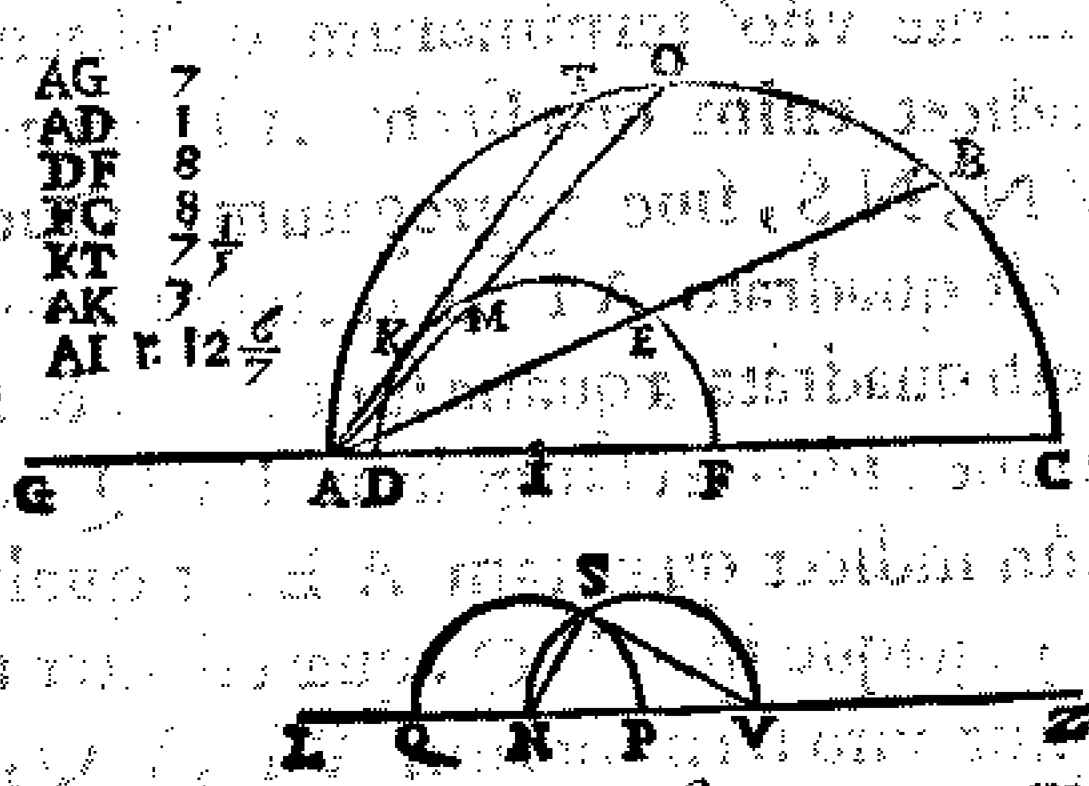
Lem. 6 cumferentiam T C in O, erit M O* minima omnium interceptarum inter circumferẽtias k F, T C; manifestum est igitur rectã datæ V Z æquale posse aptari inter circumferentias semicirculum ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum K T, F C. Itaque sit primum k T maior quam F C, ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias K M, T O, non etiam inter circumferentias M F, O C cum sit V z maior quam F C, ipsaque F C

Corol. lem. 6 * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur: itaque A E quæsita desinit in circumferentia K M, & ideo minor est quam A M, hoc est quam A I, seu quam A S, & multo minor quàm V Q, quæ est æqualis aggregato rectarum V N, N S. Recta igitur V Q non indicat quæsitam

A E,

A AE, ergo eam indicat V P æqualis differentiæ ipsarum V N, N S.

Sed sit F C maior, quàm K T, ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias K M, T O. Itaque A E quæsita desinit in circumferentia M F, & ideo maior est, quam A M, hoc est quam A I, seu quàm V S, atque multo maior, quàm V P. Ipsa igitur V P nō indicat quæsitam A E, ergo eam indicat recta V Q. Si igitur ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, data autem V z maior minore rectarum K T,

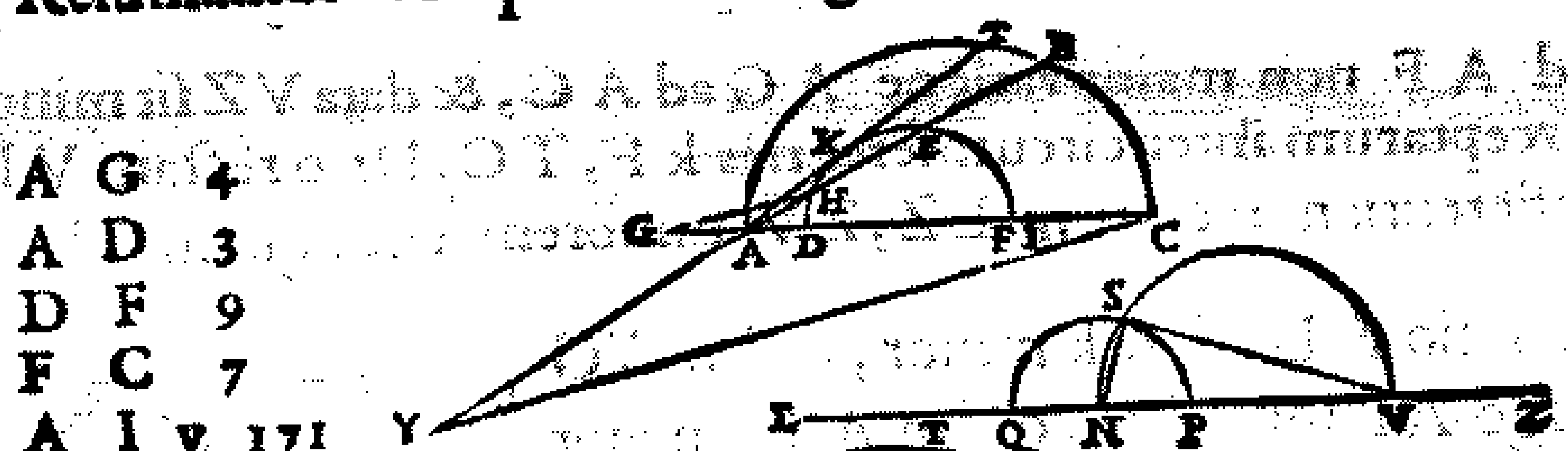


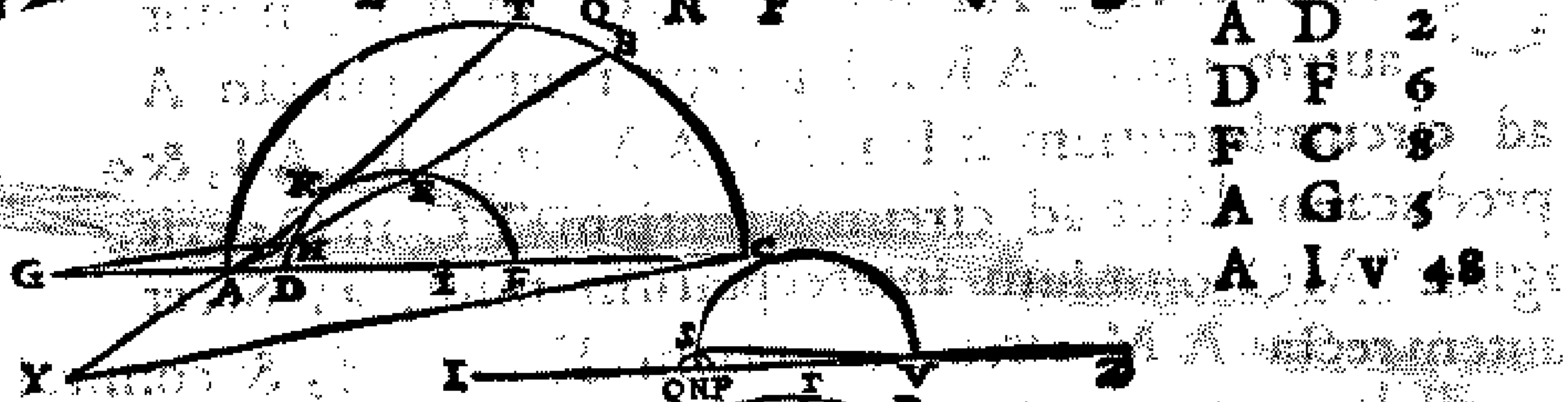
B F C, differentiam rectarum V N, N S existente K T maiore, quam F C indicabit A E quæsitam, existente vero minore, aggregatum. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans vt faciendum erat. Hinc præceptum tertium constitutum est.

Ostensa ratione qua sciri possit vter terminorum de quibus Æquatio explicabilis est, indicet A E quæsitam, consentaneum est ostendere, indicante vno terminorum quæsitam A E quid indicet terminus alter.

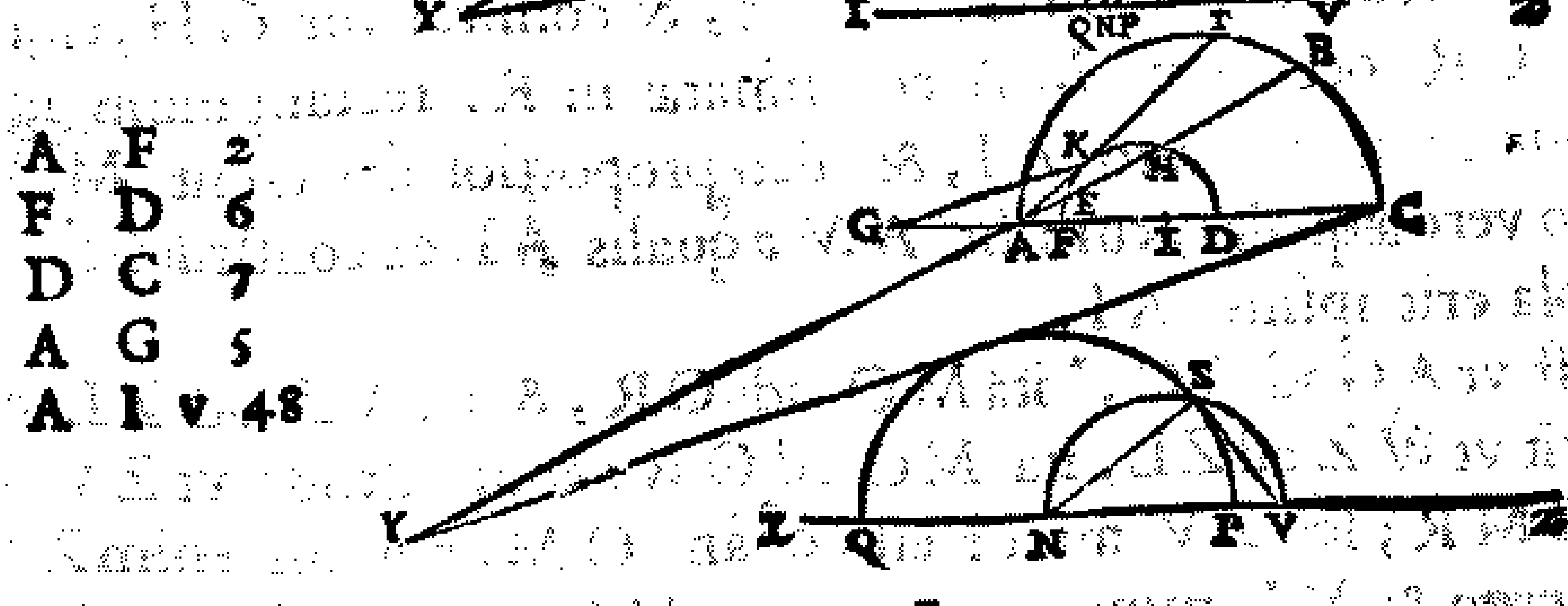
Resumantur compositionis figuræ & connectatur G H eique paral-

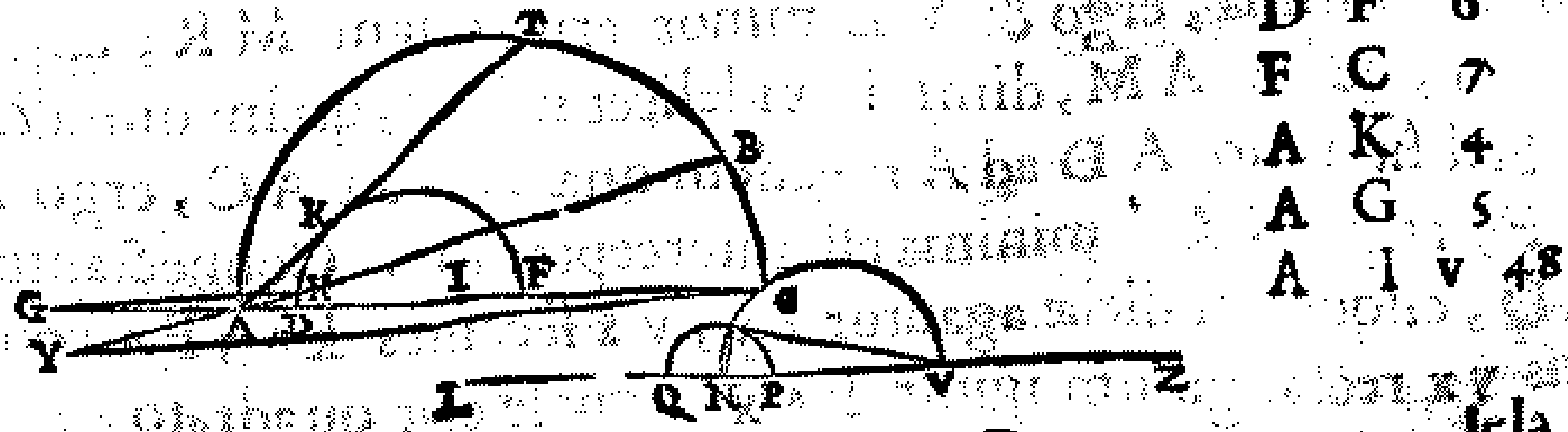
C





D





lela agatur c y occurrens B A continuatæ in y. Duos terminos Porisma constituit, de quibus A E explicabilis est, vnum quidem differentiam rectarum V N, N S, alterum verò aggregatum earundem. Dico igitur indicante vno terminorum quæsitam A E alterum rectæ A y indicem esse. Indicet enim quæsitam A E terminus V P, siue sit differentia rectarum V N, N S, siue aggregatum. Quoniam igitur rectangulum E A y * æquale est quadrato A I, & rectangulum P V Q * æquale quadrato V S, quæ quidem quadrata æqualia sunt, quia & rectæ A I, V S æquales sunt ex constructione; ideo rectangulum P V Q æquale erit rectangulo E A y, sed V P, cum indicet quæsitam A E, æqualis est ipsi A E, ergo & V Q æqualis erit A y. itaque ipsa V Q, quæ est alter terminus indicat rectam Ay. Indicante igitur vno terminorum V P, V Q, quæsitam A E alter rectam A y indicat quod erat ostendendum. A

Lem. 3. 36 tertij

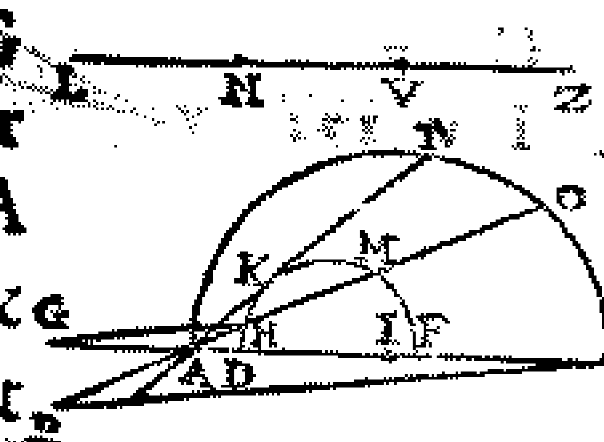
B

Expositis quæ ad constructionem pertinent non alienum videtur instantias constructioni aduersantes, & vnde ipsæ oriantur indicare, quod in Scholio post Resolutionem monuimus: quo circa tres sequentes propositiones proferuntur.

Propositio I.

Sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C, & data V Z sit minor minima interceptarum inter circumferentias k F, T C. Dico rectam V N dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem esse, quam A I. C

Lem. 4



SIt primum ratio A D ad A k minor, quàm A G ad A C ergo A I minor est, quàm A F, maior autem quam A K. Ducatur igitur à puncto A ad circumferentiam k F recta A M æqualis A I, & producatur vsque ad circumferentiam T C in O; erit igitur * M O omnium interceptarum minima. Secet autem recta A M circumferentiam K D in H, & connectatur G H, eique parallela agatur C R occurrens M A continuatæ in R. rectangulum igitur M A R * æquale erit quadrato A I, & ideo proportionales erunt M A, A I, A R: immo verò æquales, cum sit A M æqualis A I, ex constructione; quare R M dupla erit ipsius A I. D

Lem. 6

Lem. 3

Lem. 3

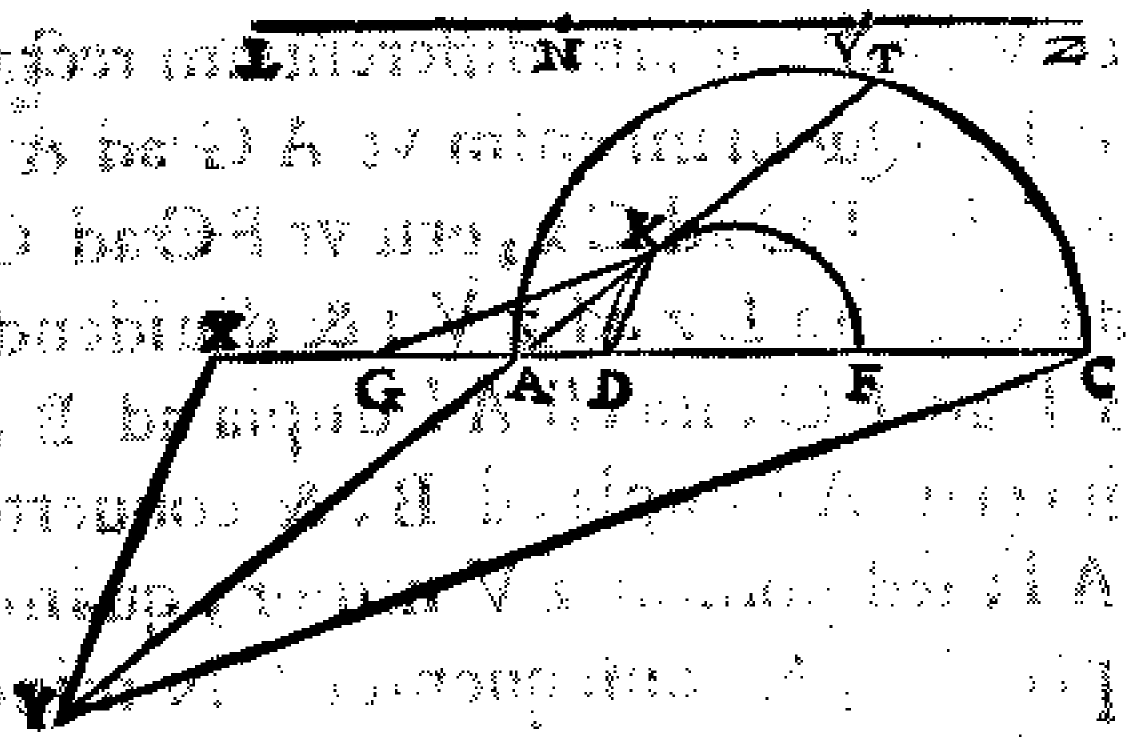
Et quoniam est vt A G ad A C, * ita M O ad O R, & ita V Z ad Z L ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita M O ad O R: & diuidendo vt Z V ad V L, ita O M ad M R; sed Z V minor est, quàm O M, ponitur enim Z V minor minima, ergo & V L minor erit, quàm M R; atque adeo & V N minor, quàm A M, dimidia videlicet minor, quàm dimidia.

Lem. 4 Lem. 5

Sed sit ratio A D ad A F eadem quæ A G ad A C, ergo A I * æqualis est A F, atque F C * minima est interceptarum. Connectantur autem G K, K D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes k ∧, F ∧ continuatas in punctis y x rectangulum igitur F ∧ x * æquale erit quadrato ∧ I, hoc est quadra-

Lem. 3

to



A to A F: vnde æquales erunt FA, Ax, ac proinde Fx dupla erit ipsius A F, vel A I.

Et quoniam est vt A G ad A C, ita VZ ad ZL, ex constructione, & ita FC ad cx erit VZ ad ZL, vt Fc ad cx. & diuidendo vt ZV ad VL, ita CF ad Fx, sed ZV cum sit minor minima minor est quàm CF, ergo & VL minor erit quàm Fx: vnde & VN minor, quam A I, dimidia videlicet minor, quàm dimidia. Lem. 3

B

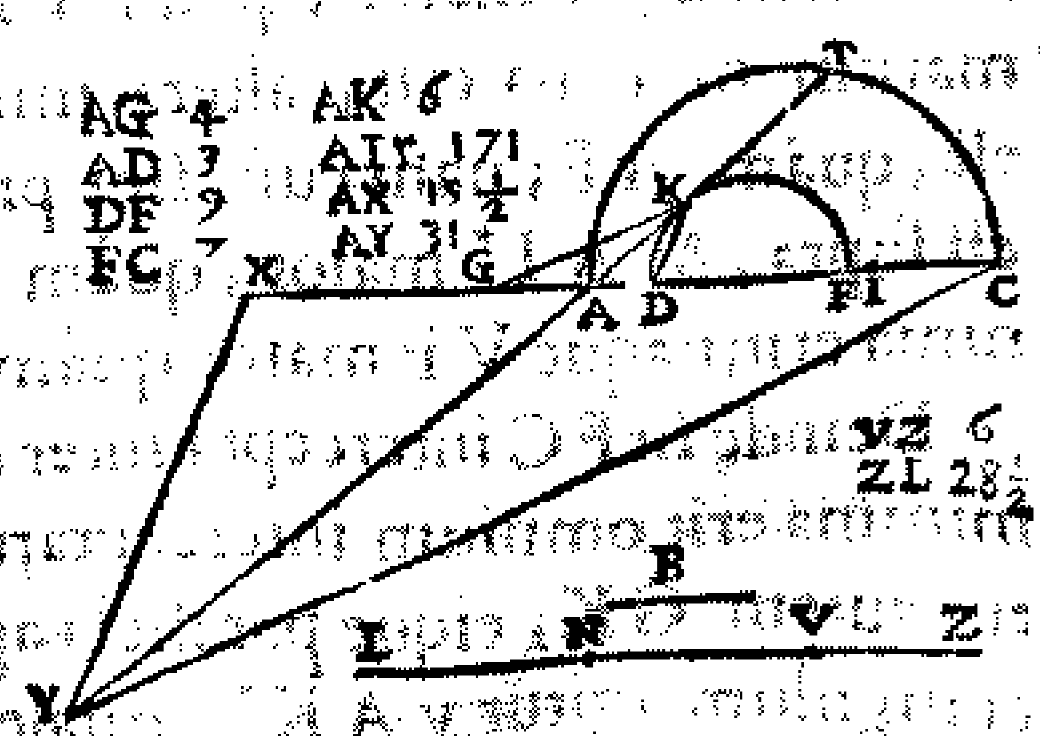
Scholium.

Ex his constat cum ratio A D ad A F non est maior, quàm AG ad AC instantiam constructioni aduersantem oriri ex data VZ deficiente à minima. nam eo Casu necesse est, quod VN dimidia differentia rectarum LZ, ZV minor sit quàm A I, & ob id recta ipsi A I æqualis non possit aptari in circulo, cuius diameter est VN, prout Porisma fieri iubet, atque adeo constructio Problematis perfici non possit.

Propositio, II.

C Sed sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & data VZ sit minor minima interceptarum inter circumferentias K F, TC. Dico aut dimidiam differentiam rectarum LZ, ZV minorem esse, quàm A I, aut terminum indicantem quæsitam A E, maiorem esse maiore rectarum A F, A k.

Duplex est Casus, aut enim F C intercepta est inter cauam circumferentiam T C, & conuexam K F, & ideo A F maior est, quàm A k, aut inter cauam vtramque, & ideo A K maior, quam A F. Sit primum intercepta inter cauam & conuexam; ergo FC minima est omnium interceptarum inter dictas circumferentias. Connectantur autem Gk, kD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes AK, FA continuatas in punctis y x. rectangulum igitur FA x æquale erit quadrato A I; quare proportionales erunt FA, A I, A x; sunt autem inæquales, quia A I, maior est, quàm A F, ergo Fx composita ex extremis maior erit, quàm dupla media. Fiat igitur vt x F ad Fc, ita dupla A I ad aliam, quæ sit B: ea minor erit quàm FC, cum sit & A I dupla minor, quam FK. Lem. 5 D

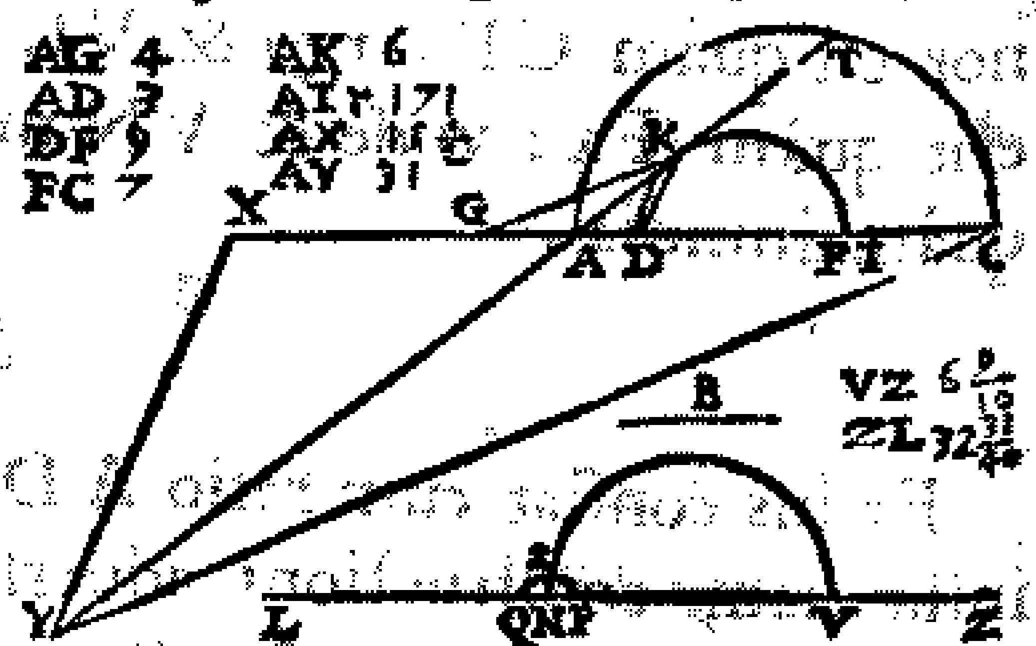


Lem. 4 17 lex.1 Lem. 4

Sit primum VZ minor, quam B, ea multo minor erit, quam FC. Dico

co V N dimidiam differentiam rectarum L Z, z V, minorem esse, quàm A
A I. Quoniam enim vt A G ad A C ita est V z ad z L, ex constructione,
lem. 3 &* ita F C ad C x, erit vt F C ad C x, ita V z ad z L, & conuertendo vt x c
ad C F ita L z ad z V: & diuidendo vt x F ad F C, ita L V ad V z; sed
x F ad F C, ita est A I dupla ad B, ex constructione, ergo vt L V ad V z,
ita erit A I dupla ad B, & conuertendo vt z V ad V L, ita B ad duplam
A I; sed ponitur z V minor, quàm B, ergo & V L minor erit, quàm du-
pla A I, & consequenter V N minor, quàm simpla A I, quod est primum.

Sed sit V z non minor, quàm B, minor autem quàm F C. Eadem ratione quà supra, ijsdemque verbis ostendemus, vt Z V ad V L, ita esse B ad duplam A I; sed ponitur z V non minor, quàm B; ergo neque V L minor erit quàm A I dupla; idcirco nec V N minor quàm A I simpla.

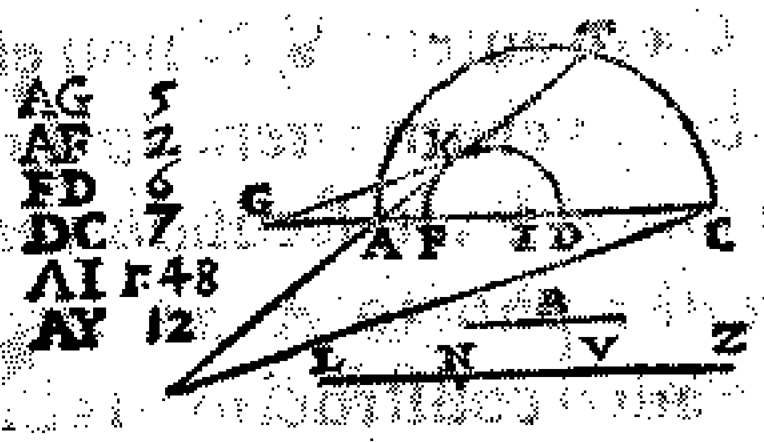


In circulo igitur circa diametrum V N descripto poterit aptari recta æqualis A I. aptetur ergo, eaque sit V S, & connectatur N S, cui æqualis e x, N V auferatur N P; reliqua V P indicat A E B
quæsitam sic habetur in Porismate, per cuius rationem texuimus constructionem Problematis. Dico igitur ipsam V P maiorem esse, quàm A F. Quo-
lem. 3 niam enim vt A G ad A C, ita est V z ad z L ex constructione, & * ita F C
ad C X, erit vt F c ad c x, ita V z ad z L. & diuidendo vt C F ad F x ita erit
z V ad V L, sed C F ponitur maior quam z V, ergo & F x maior erit C
quam V L.

Describatur autem ex centro N ad interuallum N S, vel N P circulus se-
14 sexti cans N L in Q. rectangulum igitur P V Q* æquale erit quadrato V S, hoc
est quadrato A I, sed rectangulum quidem P V Q æquale est rectangulo
lem. 3 V P L; sunt enim æquales V P, P L, quadratum vero A I* æquale rectangulo
F A x, ergo rectangulum F A x rectangulo V P L æquale erit, quare*
16 sexti proportionales erunt F A, V P, P L, A X; sed F x composita ex extre-
Theor. 1 huius mis ostensa est maior, quàm V L composita ex medijs, ergo altera* extremarum maxima erit, altera minima; sed A x non est minima, quia maior
est, quàm A F; nam cum sint proportionales F A, A I, A X, vt ostensum
lem. 4 est supra, & A I* maior, quàm A F, erit A x multo maior, ergo A F mi- D
nima erit; itaque V P maior quàm A F quod secundo loco erat ostendendum.
lem. 5 Deinde sit F C intercepta inter cauas circumferentias T C, k F, ergo k T*
minima erit omnium interceptarum inter dictas circumferentias, connectatur autem G K, eique parallela agatur c y secans k A continuatam in y. re-
lem. 3 17 sexti ctangulum igitur y A K* æquale erit quadrato A I; quare* proportionales
Lem. 4 erunt y A, A I, A K; sunt autem inæquales, quia A I* maior est, quàm A K,
ergo y k composita ex extremis maior erit quam dupla media A I. Fiat igitur vt y K ad k T, ita dupla A I ad aliam, quæ sit B. ea minor erit, quàm k T
cum sit & A I dupla minor, quàm y k.

Pri-

A Primum igitur sit V Z data minor, quam B. ea multo minor erit, quam K T. Dico V N dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem esse, quàm A I. Quoniam enim vt A G ad A C, ita est V Z ad Z L ex constructione, & * ita K T ad T y, erit vt k T ad T y, ita V Z ad Z L: & conuertendo vt y T ad T k, ita L Z ad Z V: & diuidendo, vt y k ad K T, ita L V ad V Z: sed vt y K ad K T, ita est A I dupla ad B, ergo vt L V ad V z, ita erit A I dupla ad B; & conuertendo, vt Z V ad V L, ita B ad duplam A I; sed Z V ponitur minor quam B, ergo & V L minor erit, quàm A I dupla, vnde & V N minor, quàm A I simpla, quod est primum. lem. 3



B Sed sit data V Z non minor, quàm B, minor autem quàm k T: eadem ratione qua supra ijsdemque prorsus verbis ostendemus, vt z V ad V L ita esse B ad duplam A I, sed z V ponitur non minor, quam B, ergo neque V L minor erit, quàm A I dupla, atque adeo nec V N minor quam A I simpla. in circulo igitur cuius diameter V N aptetur recta V S æqualis A I, & connectatur N S, & ex N V abscindatur N P æqualis N S; reliqua V P indicat A E quæsitam: sic enunciatum est in Porismate. Dico igitur ipsam V P maiorem esse, quàm A k.

Quoniam enim vt A G ad A C, ita est V z ad z L ex constructione, & * ita k T ad T y, erit vt k T ad T y, ita V z ad z L, & diuidendo vt T k ad K y, ita erit z V ad V L sed T k ponitur maior, quàm z V, ergo & k y maior erit, quàm V L. lem. 3

C Describatur autem circulus sub N centro interuallo N S, vel N P secans N L in Q: rectangulum igitur P V Q hoc est V P L * æquale erit quadrato V S, hoc est, quadrato A I, seu quod idem est * rectangulo y A k, quare * proportionales erunt y A, V P, P L, A k, sed y K composita ex extremis, ostensa est maior, quam V L composita ex medijs, ergo altera * extremarum y A; A K maxima erit, altera minima, sed A y non est minima, quia maior est quàm A K, nam cum sint proportionales y A, A I, A K, & A I maior quam A k, vt demonstratum est, vtrumque erit A y multo maior ergo A k minima erit, quare V P maior quam A k. quod secundo loco erat D ostendendum. 36 tertij lem. 2 16 sexti Theor. 2 huius

Scholium.

Existente igitur ratione A D ad A F maiore, quàm A G ad A C, manifestum est ex data V z minore minima interceptarum, alteram è duabus instantijs constructioni aduersantibus oriri; oritur enim prima instantia cum V N dimidia differentia rectarum L z, z V minor est, quàm A I; nam recta æqualis ipsi A I non potest aptari in circulo circa diametrum V N descripto, quemadmodum Porisma fieri iubet, & ideo Problema construi non potest.

Cum

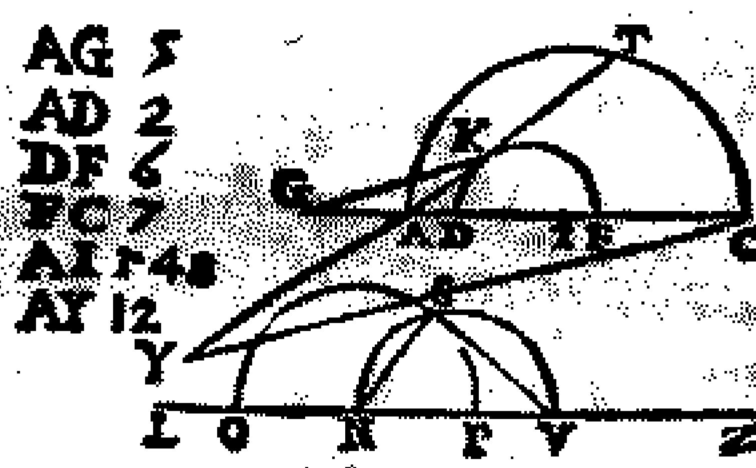
Cum autem V N non est minor, quam A I, prædicta instantia locum non habet, verum altera surgit, nam recta V P fit maior in primo quidem Casu quàm A F, in secundo vero quàm A K; itaque recta æqualis ipsi V P, non potest à puncto A ad circumferentiam K F duci, vt Porisma præcipit, atque adeo constructio Problematis perfici nequit. A

Propositio III.

Sed in quacumque ratione extiterint A D ad A F, & A G ad A C. sit data V z maior maxima interceptarum inter circumferentias K F, T C. Dico differentiam quidem rectarum V N, N S minorem esse minore rectarum A F, A K, compositam vero ex ijsdem maiorem maiore. B

Sit V P differentia rectarum V N, N S, composita autem ex ipsis V Q, & connectantur G k, K D, quibus parallelæ agantur c y, y x secantes k A, F A productas in punctis y x. Aut igitur F C intercepta est inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C aut inter vtramque cauam. Primum sit intercepta inter conuexam, & cauam, ergo A F maior erit, quam A k. Et quoniam est vt A G ad A C* ita K T ad T y, & ita A z ad z L, ex constructione, erit vt V z ad z L ita k T ad A y, & diuidendo vt z V ad V L, ita T k ad K y, sed z V maior est, quam T K, ponitur enim z V maior maxima, ergo & V L maior erit, quàm k y. C

lem. 3



16 tertij lem. 3

Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L* æquale est quadrato V S, & rectangulum y A k* æquale quadrato A I, quæ quidem quadrata æqualia sunt, cum sint æquales & rectæ V S, A I ex constructione, ideo rectangula V P L, y A K æqualia erunt, & ideo* proportionales V P, y A, A K, P L; sed V L composita ex extremis, ostensa est maior, quam y K composita ex medijs, ergo altera* extremarum V P, P L maxima erit, altera minima, sed cum sit V P minor, quam P L; ipsa V P minima, & per consequens minor quàm A K.

16 sexti

Theor. 2 huius

lem. 3

Rursus quoniam est A G ad A C,* ita F c ad c x, & ita V z ad z L ex constructione; erit vt V z ad Z L, ita F c ad c x: & diuidendo vt z V ad V L, ita C F ad F x: sed z V cum sit maior maxima, maior est quam C F, ergo & V L maior erit quam F x. D

16 tertij Lem. 3

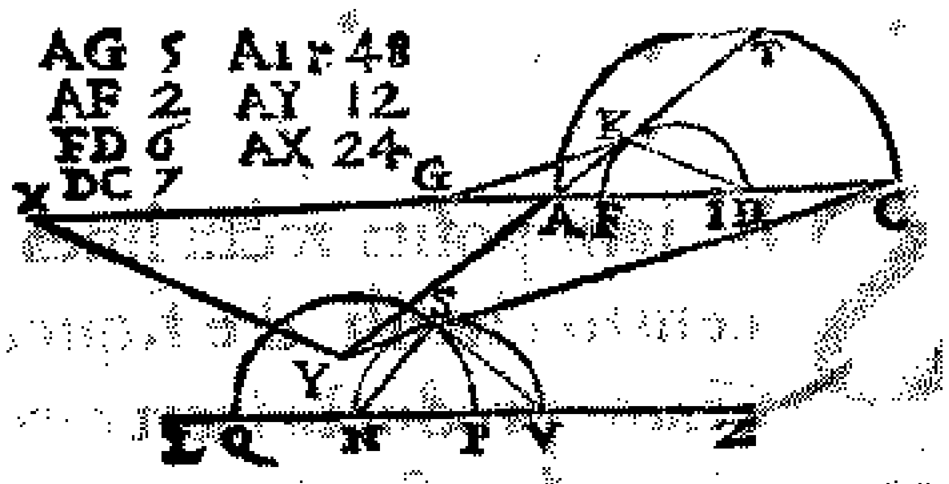
16 sexti

Theor. 2 huius

Et quoniam rectangulum P V Q, vel V Q L* æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui* æquale est & rectangulū F A x rectangulum V Q L rectangulo F A x æquale erit,* quare proportionales erunt V Q, F A, A x, Q L, sed V L composita ex extremis ostensa est maior, quàm F x composita ex medijs, ergo altera* extremarum V Q, Q L maxima erit, altera minima; sed V Q maior est, quàm Q L ergo ipsa V Q maxima erit, & per consequens maior quàm A F.

Sed sit F C intercepta inter cauas circumferentias K F, T C, ergo A F

minor



A minor erit, quàm A K, & quoniam est vt A G ad A C,* ita F C ad c x, & ita Vz ad Z L ex constructione, erit vt V Z ad z L ita F C ad c x: & diuidendo vt z V ad V L, ita C F ad F x: sed z V maior est, quàm C F ea enim ponitur maior maxima; ergo & V L maior erit, quam F x.

Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L* æquale est quadrato V S, vel quadrato A I, cui* æquale est, & rectangulum F A x rectangula V P L, F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V P, F A, A x, P L; sed V L composita ex extremis ostensa est maior, quam F x composita ex medijs, ergo altera* extremarum maxima erit altera minima, sed V P minor est, quam P L, ergo ipsa V P minima erit, & per consequens minor, quam A F. 16 tertij lem. 5 Theor. 2 huius

B Rectam autem V Q maiorem esse, quàm A k manifestum est; nam cum sit vt A G ad A C minor nempe ad maiorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione, erit & quadratum A K minus quadrato A I, vnde & recta A k minor, quàm recta A I hoc est quam recta V S, & multo minor quam recta VQ.

Existente igitur V Z maiore maxima interceptarum differentia rectarum V N, N S minor est minore rectarum A F, A k; composita vero ex ijsdem V N, N S maior maiore, quod erat ostendendum.

Scholium.

C Constat igitur instantiam constructioni aduersantem oriri ex data VZ excedente maximam interceptarum, cum eo Casu necesse sit, vt recta V P quæsitam A E indicans vel minor sit minore rectarum A F, A k, vel maior maiore, & ideo recta æqualis ipsi V P non possit à puncto A ad circumferentiam K F duci, quemadmodum Porisma fieri præcipit, & propterea constructio problematis perfici non possit.

Casus quartus.

Sed vergant ad diuersas partes dati duo semicirculi neutro reliquum includente etiamsi complerentur.

D Sint igitur tales duo semicirculi a b c, d e f data autem recta linea G, & ducatur A k contingens semicirculum d e f in K; ipsum vero a b c secans in T. Oportet inter circumferentias t c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum A pertineant.

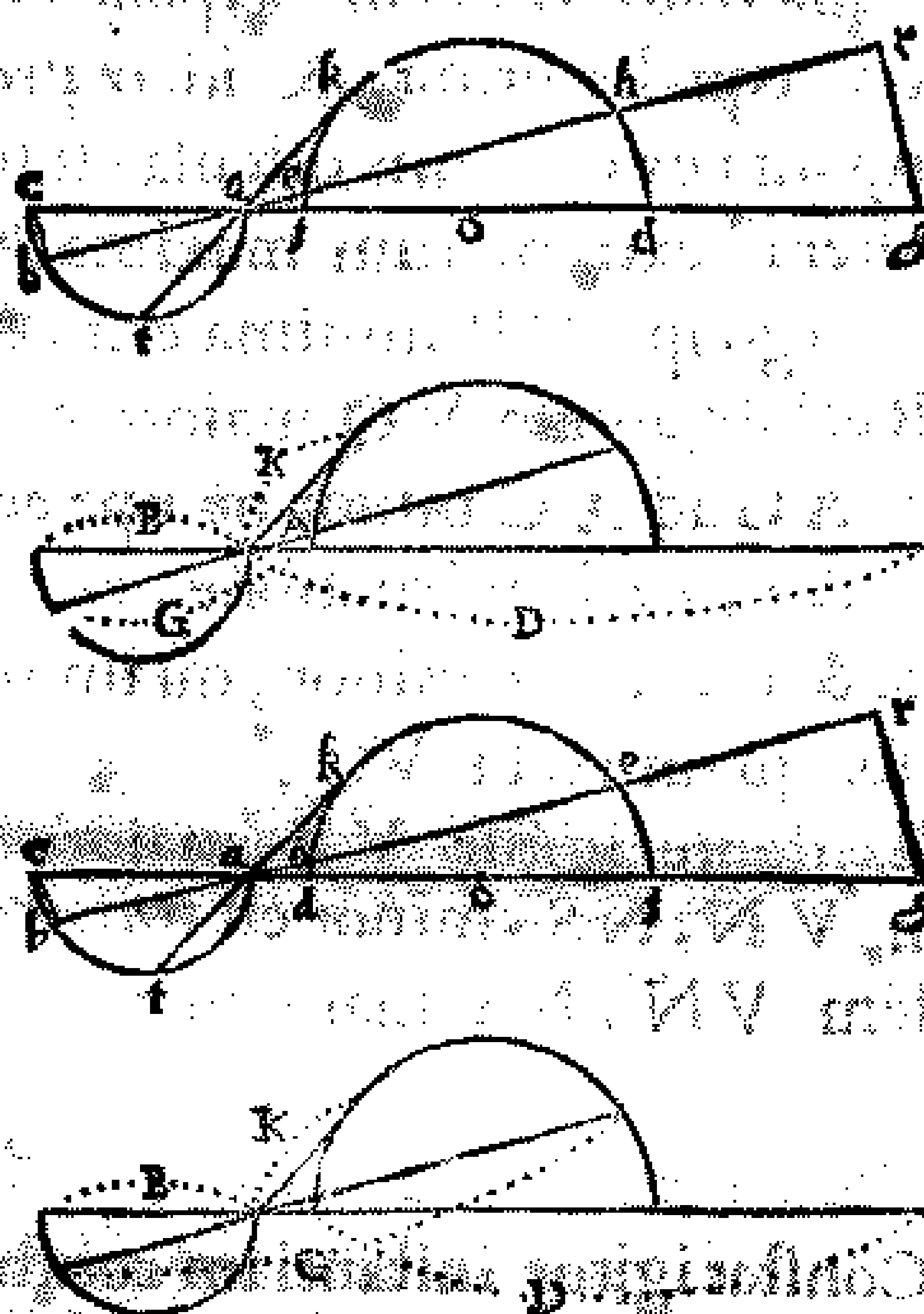
Hic quoque Casus in duos alios Casus diuiditur: in primo quidem ponenda est ea recta inter cauam circumferentiam vnius semicirculi, & conuexam alterius, in secundo vero ponenda est inter cauas vtriusque.

Re-

Resolutio.

SIt iam posita recta linea b a e æqualis datæ G, vt impetratum est, & ex centro circuli d e f, quod sit O ponatur o g æqualis o c, & recta b a e etiam producta secet circumferentiam k d in h, & ducatur g r ipsi be productæ ad rectos angulos, & connectatur c b angulus igitur a b c in semicirculo rectus est, ac proinde h r* æqualis e b. A

Lem 3.



Et quoniam datæ sunt a c, a g, b e, a k; prima sit B, secunda D, tertia G, quarta k, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus: & quæratur a e, esto illa A, ergo recta a b erit G -- A, & cum sint similia triangula a b c, a r g; anguli enim a b c, a r g sunt æquales, quia recti; hic ex constructione, ille ex vi semicirculi, & æquales quoque b a c, r a o, quia sunt ad verticem, erit vt a c, ad a g, ita a b ad a r. hoc est in figuris ad Resolutionem pertinentibus, vt B ad D, ita G -- A ad $\frac{D \text{ in } G -- D \text{ in } A}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } G -- D \text{ in } A}{B}$, à qua si abscindatur recta h r æqualis ipsi e b, remanebit a h, quæ ideo erit $\frac{D \text{ in } G -- D \text{ in } A}{B}$ -- G; sed rectangulum e a h æquale est quadrato a k, ergo B

$\frac{D \text{ in } G \text{ in } A -- D \text{ in } AQ}{B}$ -- G in A æquabitur KQ. C

Ducantur omnia in B; ergo

D in G in A -- B in G in A -- D in A Q æquabitur K Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt A Q ex se subsistat; ergo G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ -- A Q æquabitur $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est, nempe fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum quod sit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ facta igitur transmutatione. D

G in A -- F in A -- A Q æquabitur Z Q

hoc est G -- F in A -- A Q æquabitur Z Q.

Et explicata æquatione G $\frac{1}{2}$ — F $\frac{1}{2}$ + L. V. (G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ Q -- Z Q) æquabitur A

Vel G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ -- L. V. (G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ Q -- Z Q) æquabitur A.

In hac quoque æquatione A explicabilis est de duobus terminis, maiore, & minore; sed quo Casu terminus maior indicet quæsitam a e, quoue terminus minor quoue etiam vterque suo loco dicetur.

Po-

Porisma.

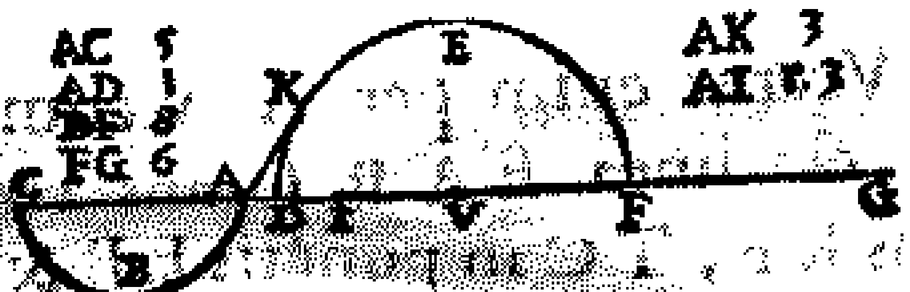
Fiat vt ag ad ac, ita quadratum ak ad aliud quadratum, quod sit ai, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. deinde dimidiæ differentiæ, qua G superat ipsam F, addita recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ differentiæ superat quadratum ai, fiet terminus maior. Vel eidem dimidiæ differentiæ dempta eadem recta, reliqua erit terminus minor.

Antequam constructio fiat ostendendæ sunt maxima, & minima rectarum, quæ ad punctum a pertinentes, inter circumferentias Kf, ec intercipiuntur, idque vt data G possit determinari, ne maximam superaret, neue à
B minima superaretur. sed prius sequens Lemma demonstrabo, quò facilius, ac clarius ea, quæ sequuntur demonstrentur.

Lemma X.

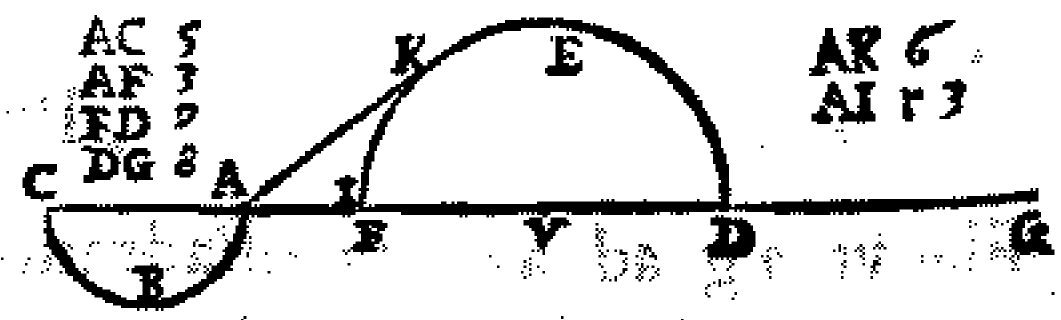
Sint duo semicirculi ABC, DEF, quales in præsenti Casu ponuntur, & contingat recta AK semicirculum DEF in K. & ex centro circuli DEF, quod sit V ponatur VG æqualis VC, & fiat vt AG ad AC, ita quadratum AK ad quadratum AI. Dico si ratio AD ad AF minor sit ratione AG ad AC, & rectam AI minorem esse minore rectarum AF, Ak, & si æqualis æqualem, & si maior maiorem: at minorem maiore.

C Sit primum ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC. aut igitur recta FC intercepta est inter cauas vtriusque semicirculi circumferentias, aut inter cauam vnius, & conuexam alterius. Sit primum intercepta inter cauas. Quoniam igitur est, vt AG ad AC, maior nempe ad minorem, ita quadratum AK ad quadratum AI ex constructione, quadratum AK maius erit quadrato AI, vnde & recta Ak maior, quàm recta AI.

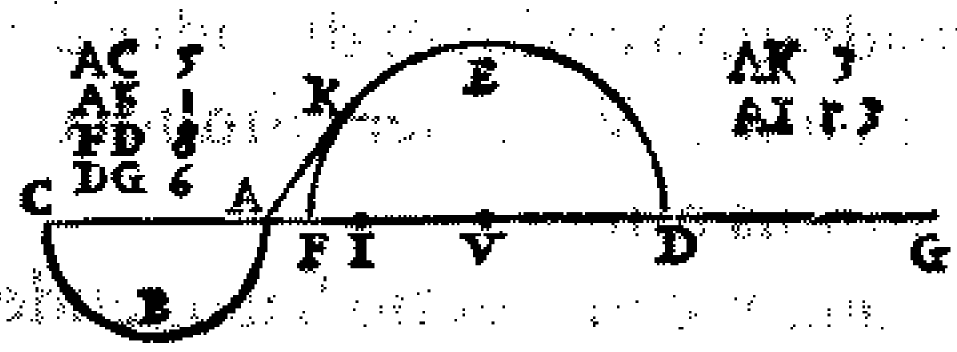


Deinde sit FC intercepta inter cauam, & conuexam circumferentiam. Quoniam igitur ratio AD ad AF ponitur minor ratione AG ad AC, vt autem
D AG ad AC, ita est quadratum AK ad quadratum AI, ergo ratio AD ad AF minor erit ratione quadrati Ak ad quadratum AI, sed vt AD ad AF prima videlicet trium proportionalium AD, Ak, AF ad tertiam, ita est quadratum secundæ Ak ad quadratum AF tertiæ, ergo ratio quadrati Ak ad quadratum AF, minor erit ratione quadrati Ak ad quadratum AI: quare quadratum AI * minus erit quadrato AF, & per consequens recta AI * quinti
minor, quàm recta Af, recta igitur AI minor est minore rectarum Af, Ak, quod est primum.

Deinde sit ratio AD ad AF eadem, quæ AG ad AC, ergo eadem erit,



quæ quadrati A K ad quadratum A I, sed vt A D ad A F, ita est quadratum A K ad quadratum A F, vt demonstrauimus: ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, quare & recta A I æqualis rectæ A F, quod est secundum.

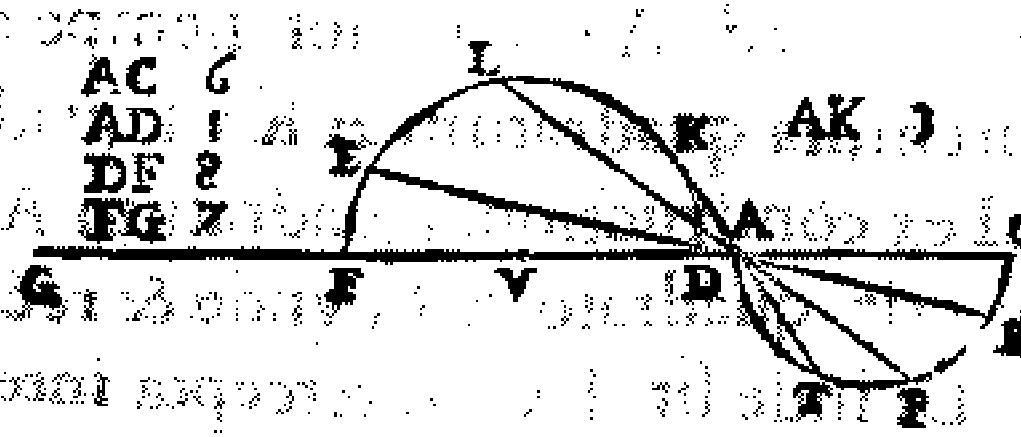


Postremo sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo maior erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I; sed vt A D ad A F, ita ostensum est quadratum A K ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A K ad quadratum A F maior erit ratione quadrati A K ad quadratum A I; quare quadratum * A I maius erit quadrato A F, & consequenter recta A I maior, quam recta A F; quod est tertium.

Denique quoniam est vt A G ad A C maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I; quadratum A K maius erit quadrato A I: vnde & recta A K maior quam recta A I. Recta igitur A I minor est maiore rectarum A F, A K; quod vltimo loco erat ostendendum.

Lemma X I.

Iisdem positis, sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C. Dico K T maximam esse omnium, quæ per punctum A ductæ inter conuexam circumferentiam K F, & cauam T C intercipiuntur, minimam F C; earum verò quæ inter cauas circumferentias intercipiuntur, minimam esse K T, maximam F C. Aliarum autem vtroque casu propinquiorem minima remotiore maiorem esse.



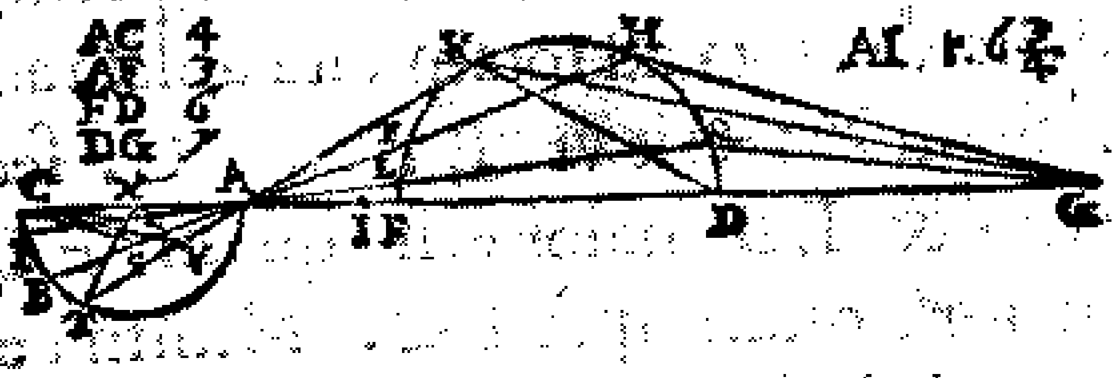
In quinti

DVcatur enim per A vtcumque recta linea E A B secans circumferentias K F, T C in punctis E B & sit primum F C intercepta inter cauas circumferentias K F, T C. Quoniam igitur A C maior est, quam A B, & A F maior quam A E tota C F maior erit, quam tota B E, & sic ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur F C.

Pari ratione quoniam A T minor est, quàm A B, & A K minor quam A E, tota K T minor erit, quàm tota E B, atque eadem ratione ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur K T.

Rursus ducatur per A alia recta L A P secans circumferentias K F, T C in punctis L P, sitque L P minimæ K T propinquior, quam E B; erit A P minor quam A B, & A L minor quam A E, atque adeo tota P L minor, quam tota B E, hoc est propinquior minimæ, minor remotiore.

Sed



A Sed sit F C intercepta inter cauam circumferentiã T C, & conuexã K F, & connectantur G k, k D, quibus parallelæ agãtur c y, y x secantes A T, A C in punctis y x. rectangulum igitur F A X * æquale erit quadrato A I, sed recta A I ex antecedente Lemmate non est maior quàm A F, ergo neque Ax maior erit quam ipsa A F, alioquin rectangulum F A X maius esset quadrato A I. lem. 3

Et quoniam rectangulum F A x * æquale est rectangulo y A k, erit vt A K ad A F, * ita A x ad A y: sed A k maior est, quam A F, ergo & A x maior erit quàm A y; sed A x ostensa est non maior, quàm A F, ergo & A F maior erit quàm A y, atque A K multo maior. Itaque quatuor proportionalium A K, A F, A x, A y minima erit A y, & * consequenter maxima A K, atque adeo y k composita ex maxima & minima * maior, quàm F x composita ex reliquis. Corol. Lem. 8 16 sexti

B Theor. 6 huius 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita F x ad C x, & * ita k T ad T y, erit vt K T ad T y, ita F c ad c x: & permutando vt k T ad F C, ita T y ad c x videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam, quare & reliqua y k ad reliquam X F, erit vt tota k T ad F C totam, sed y K ostensa est maior, quam X F, ergo & k T maior erit, quàm F C. lem. 3

Producatur autem B E donec secet circumferentiam k D in H, & connectatur G H, cui parallela agatur C S secans ipsam A B in S: rectangulum igitur y A k * æquale erit rectangulo S A E: quare vt A K * ad A E, ita erit A S ad A y, sed A k maior est, quam A E, ergo & A S maior erit quam A y: est autem & A F maior, quam A y, vt demonstrauimus, ergo A E multo maior erit, atque A K multo maior. Sic igitur quatuor proportionalium A k, A E, A S, A y minima est A y, maxima vero A K vnde y K composita ex maxima & minima * maior, quam S E composita ex reliquis. Corol. lem. 5 16 sexti

C 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & * ita k T ad T y, erit vt K T ad T y, ita E B ad B S: & permutando vt k T ad E B, ita T y ad B S videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam: quare & * reliqua y K ad reliquam S E erit, vt k T ad E B; sed y k ostensa est maior, quam S E, ergo k T maior erit, quam E B, eademque ratione ostendetur ipsa K T omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium K T. Lem. 3

D

Deinde quoniam rectangulum F A x * æquale est rectangulo E a S, erit vt A E ad A F, ita A X ad A S; sed A E maior est, quam A F, ergo & A X maior erit, quam A S; sed a X ostensa est non maior, quam A F, ergo & A F maior erit, quam a S, atque a E multo maior. itaque quatuor proportionalium a E, a F, a x, a S maxima esto a S, minima vero a E, atque adeo S E composita ex maxima, & minima * maior, quàm x F composita ex reliquis. Corol. Lem. 8 16 sexti 25 quinti

Et quoniam est vt a G ad a C, * ita E B ad B S, & ita F C ad c x, erit vt lem. 3

E B ad B S, ita F C ad c x, & permutando vt E B ad F C, ita B S ad c x, videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; quare & * reliqua S E ad reliquam X F erit vt E B ad F C; sed S E ostensa est maior, quàm X F, ergo & E B maior erit, quam F C; & sic quæcumque alia demonstrabitur maior, quàm ipsa F C. Minima est igitur F C. A

Sed ducatur per A alia recta P A L secans circumferentias T C, k F in punctis P L, circumferentiam vero K D in Q, & sit P L minimæ C F propinquior, quàm E B, & connectatur G Q, & ei parallela agatur C Z secans rectam P A in Z. Rectangula igitur L A Z, E A S * æqualia erunt, & ideo * proportionales A L, A E, A S, A Z; sed A L minor est quam A E; ergo & A S minor erit, quam A Z.

Corol. Lem. 3 xvi sexti

Lem. 1 17 sexti

Et quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, erunt proportionales A E, A I, A S, sed A E maior est, quam A I, cum ipsa A I non sit * maior, quàm A F; ergo & A I maior erit, quam A S: itaque ipsa A S minor erit quàm A L, & multo minor, quam A E: est etiam minor quam A Z, vt demonstrauimus, ergo ipsa A S minima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A z. quare A E maxima, atque S E composita ex maxima, & minima maior erit, quam z L composita ex reliquis, hoc est z L minor, quam S E. B

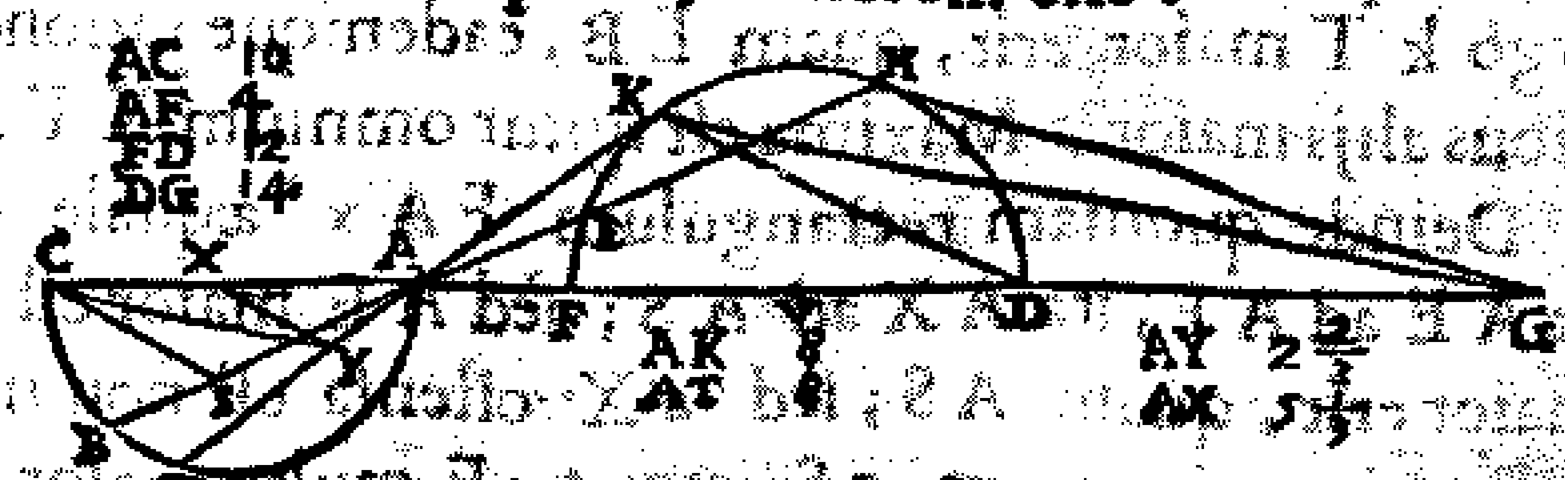
Lem. 10

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & ita L P ad P z, erit vt L P ad P z, ita E B ad B S, & per conuersionem rationis vt P L ad L z; ita B E ad E S, & conuertendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B, sed z L ostensa est minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quam E B, hoc est propinquior minimæ minor remotiore. quare constat propositum. C

Lemma XII.

Rursus ijsdem positis. sit autem ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo A I * maior erit, quam A F, minor autem, quam A k, itaque ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, eaque producatur ad circumferentiam T C in O. Dico maiorem rectarum k T, F C maximam esse omnium, quæ per A transeunt, & inter circumferentias k F, T C interijciuntur, minimam vero M O. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore ex eadem parte, minorem esse. D

Lem. 10



Dvcatur enim per A vtcũq; recta B A E, secans circũferentias K F, T C in punctis E B; circũferentiam vero K D in N, & connectantur G H, G k, K D, quibus parallelæ agantur c s, c y, y x, secantes A B, A T, A C in punctis s y x, & sit primum k T maior, quàm F c. Quoniam igitur est, vt A G ad A C, ita * F c ad c x, & ita * k T ad T y; erit k T ad T y, vt F c ad c x, & per conuersionem rationis

Lem. 5

erit

A erit, vt K T ad k y, ita F C ad F X; sed k T ponitur maior, quam F C, ergo & K y maior erit quam F x.

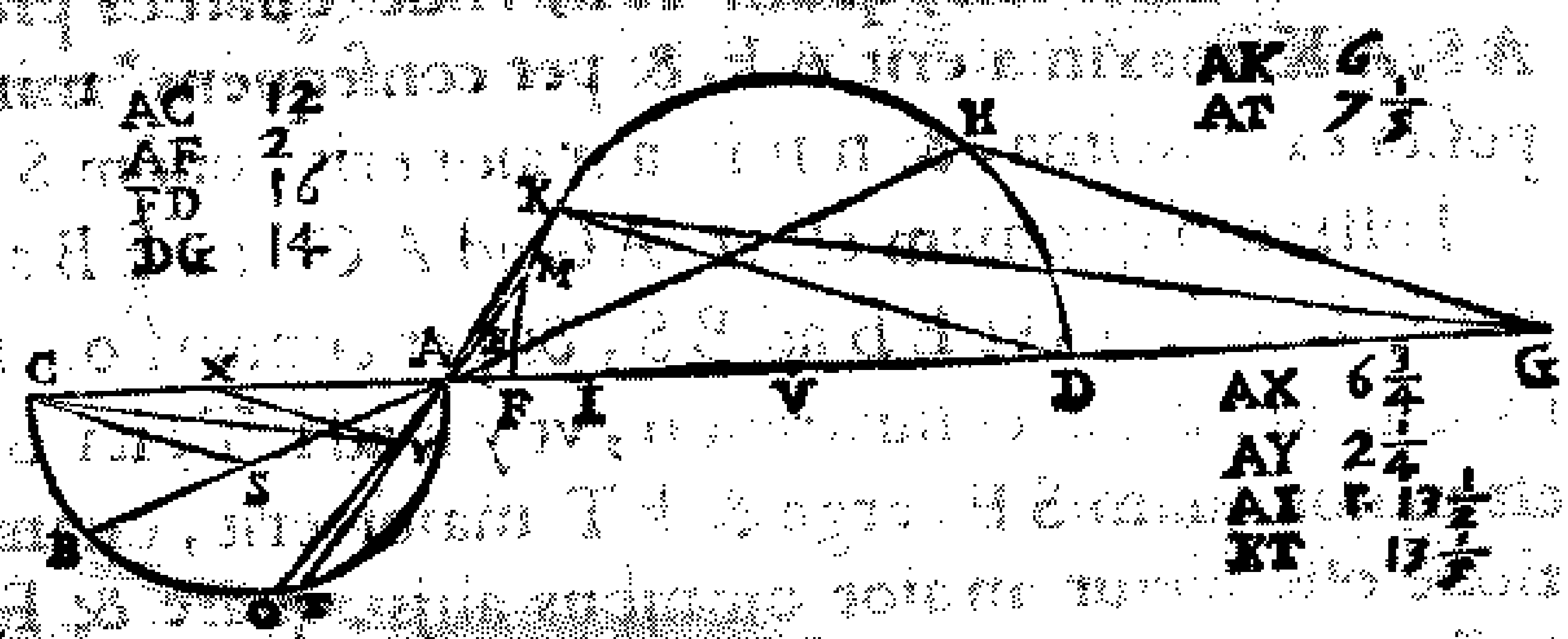
Et quoniam æqualia sunt rectangula y A k, F A X, * proportionales erunt y A, A F, A X, A k, sed K y composita ex extremis ostensa est maior, quam F x composita ex medijs, ergo * altera extremarum y A, A k maxima erit, altera minima; sed A k non est minima, quia maior est, quàm A F, ergo maxima erit, & per consequens A y minima. itaque A y minor est, quam A F, & multo minor, quam A E. Corol. lem. 3 16 sexti

Similiter quoniam * æqualia sunt rectangula E A S, k A y, erit * vt E A ad A k, ita A y ad A S; sed A E minor est, quàm A K, ergo & A y minor erit, quàm A S. cum igitur A y minor sit quam A S, & minor quam A E, vt demonstraui, & multo minor, quàm A k, erit ipsa A y minima quatuor proportionalium E A, A k, A y, A S; * maxima vero A K, vnde y K composita ex maxima & minima * maior erit, quam S E composita ex reliquis. Corol. lem. 3 16 sexti Theor. 1 huius

B Et quoniam est vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita k T ad T y, erit k T ad T y, vt E B ad B S; & per conuersioné rationis vt K T ad K y, ita erit E B ad E S: & conuertendo vt y k ad K T, ita S E ad E B; sed y K ostensa est maior, quàm S E; ergo & K T maior erit, quam E B; & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium K T. lem. 3

Sed sit F C maior, quã k T. Quoniã igitur est vt A G ad A C, * ita F C ad C x, & * ita K T ad T y erit vt F C ad c x, ita K T ad T y, & per conuersionem rationis vt F C ad F x, ita k T ad k y; sed F C ponitur maior, quàm k T, ergo & F x maior erit, quam K y; sed ipsa F x composita est ex extremis quatuor proportionalium A F, A y, A K, A x; ipsa vero K y ex medijs (constat autem eas proportionales esse ex eo, quod æqualia sunt rectangula F A x, y A K) ergo * altera extremarum A F, A x maxima erit, altera minima, sed A F non est maxima, quia minor est, quam A K, ergo minima erit, vnde A x maxima itaque A x maior erit, quàm A k, & multo maior quam A E. Et quoniam * æqualia sunt rectangula E A S, F A x, erit * vt A E ad A F maior nempe ad minorem, ita A x ad A S, quare & A x maior erit, quàm A S; sed ipsa A x ostensa maior, quam A E, & ideo multo maior, quam A F, ergo quatuor proportionalium E A, A F, A x, A S maxima erit A x, vnde A F minima, atque adeo x F composita ex maxima, & minima maior, quam S e composita ex reliquis. lem. 3 Theor. 2 huius Corol. lem. 3 16 sexti

C



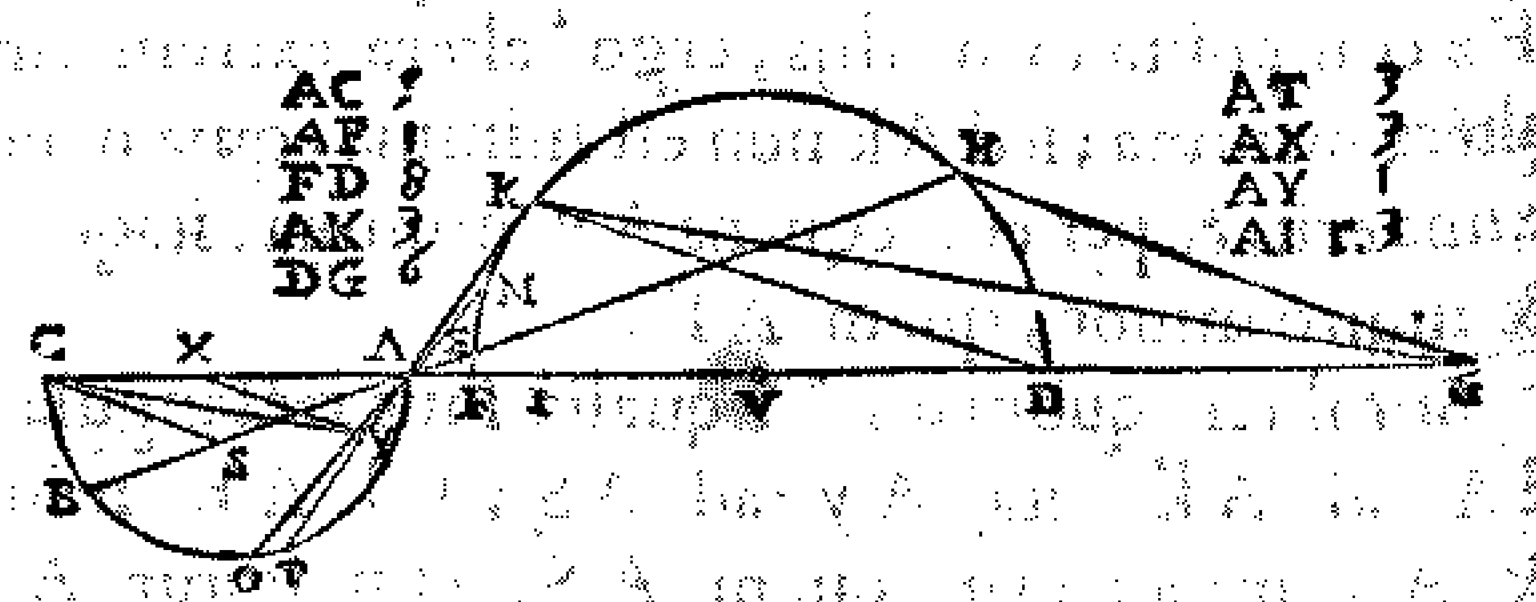
D

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita F C ad c x, & ita E B ad B S, erit vt F C ad c x, ita E B ad B S, & per conuersioné rationis vt F C ad F x, ita E B lem. 3

F B ad A S; & conuertendo vt X F ad F C, ita erit S E ad E B, sed x F ostensa est maior, quam S E, ergo & F C, quam E B maior erit. Eademque ratione ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium F C. A

Sed sint æquales k T, F C. Quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita F C ad C X, & * ita K T ad T y erit F C ad C x, vt K T ad T y, sed proponuntur æquales F C, k T, ergo æquales erunt & C x, T y, quæ si ab æqualibus C F, T k auferantur reliquæ X F, y K æquales erunt sed X F composita est ex extremis quatuor proportionalium F A, A y, A k, A x; ipsa vero y K ex medijs, constat autem eas proportionales esse ex eo quod * rectangula F A x, y A K sunt æqualia, ergo * maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit; sed A I extrema non est æqualis mediæ A k, hæc enim tangit circulum D L F, illa vero secat ergo æqualis erit ipsi A y. B

Lem 3.



Corol. Lem. 3 Theor. 3 huius

Et quoniam * æqualia sunt rectangula y A K, F A S, erit vt * A y ad A E, ita A S ad A K; sed A y cum sit æqualis A F minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit, quàm A k, vt de quatuor proportionalium A y, A E, A S, A K maxima erit A k, & per consequens * minima A y; itaque y k composita ex maxima, & minima maior erit, quàm S E composita ex reliquis. C

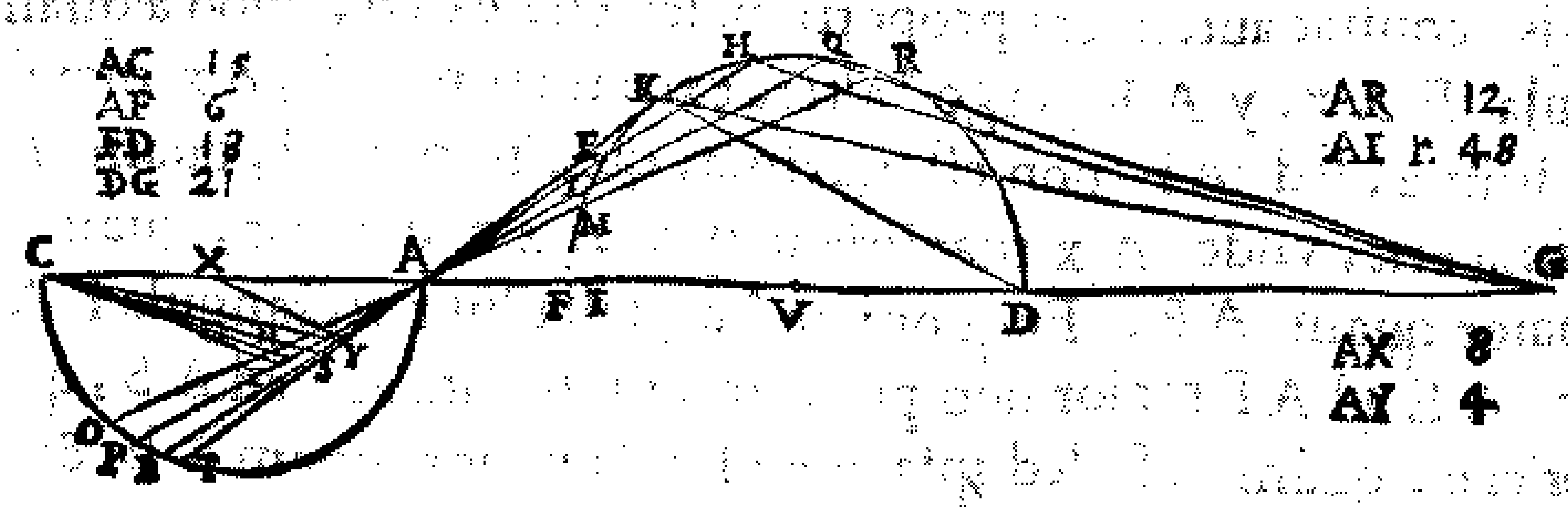
Corol. Lem. 3 16 sexti

Theor. 1 huius

Postremo quoniam est vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita k T ad T y, erit k T ad T y, vt E B ad B S, & per conuersionem rationis vt k T ad K y, ita E B ad E S; & conuertendo, vt y k ad k T, ita S e ad E B; sed y K ostensa est maior quam S E, ergo & k T maior erit, quàm E B. Atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare & F C, cum sit æqualis ipsi k T, erit quoque omnibus maior; itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum k T, F C maxima est omnium quæ per A ducuntur, & inter circumferentias k F, T C interijciuntur, quod est primum.

lem. 8

Deinde secet O M producta circumferentiam K D in R, & connectatur G R, eique parallela agatur C N secans rectam O M in N. Rectangulum igitur M A N * æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M, sunt enim æquales A I, A M, quare A M æqualis erit ipsi A N, & cum rectangulum F A x * æquale sit quadrato A I, seu quadrato A M, * proportionales erunt A F, A M, A x, sunt autem & D



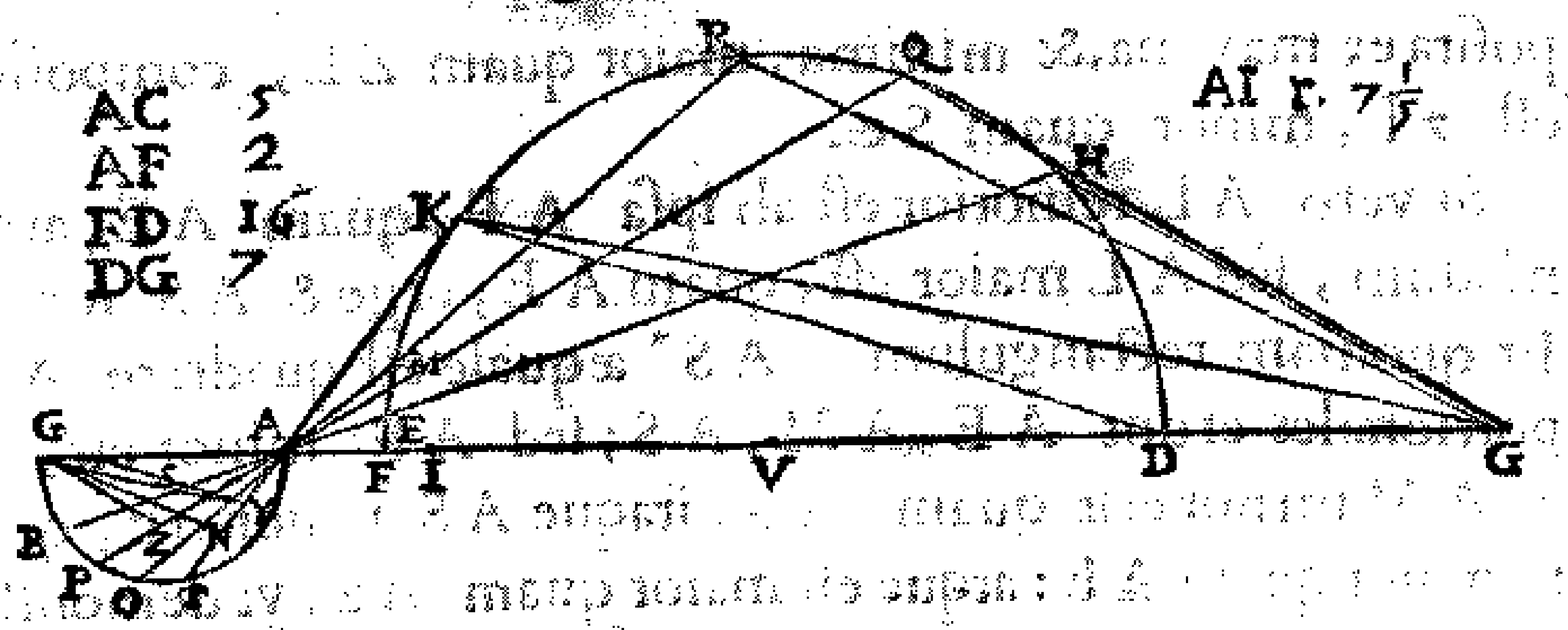
lem. 3

lem. 3

17 sexti

in-

A inæquales, ergo x F composita ex extremis maior erit, quam dupla media, hoc est quam M N. Et quoniam est vt A G ad A C* ita F C ad C x, & ita*



M O ad O N, erit F C ad c x vt M O ad O N, & per conuersionem rationis vt F C ad F x, ita M O ad M N, & conuertendo vt x F ad F c, ita N M

B ad M O; sed x F ostensa est maior, quam M N, ergo & F c maior erit, quam M O; Æque quoniam rectangulum y A K* æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M,* proportionales erunt A k, A M, A y, sunt autem & inæquales, quare y K composita ex extremis, maior erit, quam M N media videlicet dupla, & quoniam est vt A G ad A C,* ita k T ad T y, & ita* M O ad O N, erit K T ad T y, vt M O ad O N; & per conuersionem rationis, vt K T ad K y, ita erit N O ad M N: & conuertendo, vt y k ad K T, ita N M ad M O; sed y k ostensa est maior, quàm M N, ergo & K T maior erit, quàm M O. Lem. 3 17 sexti

Eadem ratione quoniam rectangulum E A S* æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt A E, A M, A S, sunt autem Lem. 3 xvij sexti

C & inæquales, ergo S E composita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc est quam N M. Et quoniam est, vt A G ad A C,* ita E B ad B S, & * ita M O ad O N, erit vt E B ad B S, ita M O ad O N: & per conuersionem rationis vt E B ad E S, ita M O ad M N; & conuertendo vt S E ad E B, ita N M ad M O; sed S E ostensa est maior, quam N M, ergo & E B maior erit, quàm M O. Atque eadem ratione ostendemus omnes alias maiores esse ipsa M O: Minima est igitur M O omnium, quæ per A ducuntur, & inter circumferentias K F, T C interijciuntur, quod est secundum. Postremo ducatur per A alia recta P A L secans circumferentias T C, k F in punctis P L, sintque P L, B E ex eadem parte minima M O, & sit P L ipsi M O propinquior, quàm B E, & producatur P L Lem. 1

D ad circumferentiam k D in Q, & iungatur G Q, eique parallela agatur C Z secans P A in Z.* æqualia erunt rectangula L A Z, E A S, & ideo proportionales A L, A E, A S, A Z: si quidem A L propinquior est rectæ A F. sic argumentor, sed A L minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit, quam A Z. Et quoniam rectangulum E A S* æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M,* proportionales erunt A E, A M, A S, sed A E maior est, quàm A M, ergo & A M maior erit quam A S, itaque A S minor erit, quàm A L, & multo minor, quàm A E: est quoque minor quam A Z, vt proxime demonstrauimus, ergo ipsa A S minima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A Z: maxima vero A E, atque S E compo- Coroll. Lem. 1 xvi sexti

Lem. 3 xvij sexti

posita ex maxima, & minima, maior quam Z L, composita ex reliquis, hoc est z L, minor quam S e. A

Si vero A L remotior est ab ipsa A F, quam A E; argumentor in hunc modum, sed A L maior est, quam A E, ergo & A S maior erit, quam A z. Et quoniam rectangulum E A S* æquale est quadrato A I, vel A M, proportionales erunt A E, A M, A S; sed A E minor est, quam A M, ergo & A M minor erit quam A S: itaque A S maior erit, quam A L, & multo maior quam A E: atque est maior quam A z, vt demonstrauimus, ergo ipsa A S maxima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A z, &* consequenter A E minimæ atque adeo S e composita ex maxima & minima maior, quam z L composita ex reliquis, hoc est z L minor, quam S e. quod etiam demonstrauimus & supra. B

Theor. 1 huius

lem. 3 Et quoniam in vtroque Casu est vt A G ad A C,* ita E B ad B S, & ita L P ad P z, erit vt L P ad P z, ita E B ad B S, & per conuersionem rationis vt P L ad L z, ita B E ad E S; & conuertendo vt z L ad L P, ita S E ad E B; sed z L ostensa est minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quàm E B, hoc est propinquior minimæ minor remotiore, quod tertio loco erat ostendendum.

Corollarium.

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores sint; manifestum est K T maximam esse omnium, quæ inter circumferentias k M, T O interijciuntur. Earum autem, quæ interijciuntur inter circumferentias M F, O C maximam esse F C. C

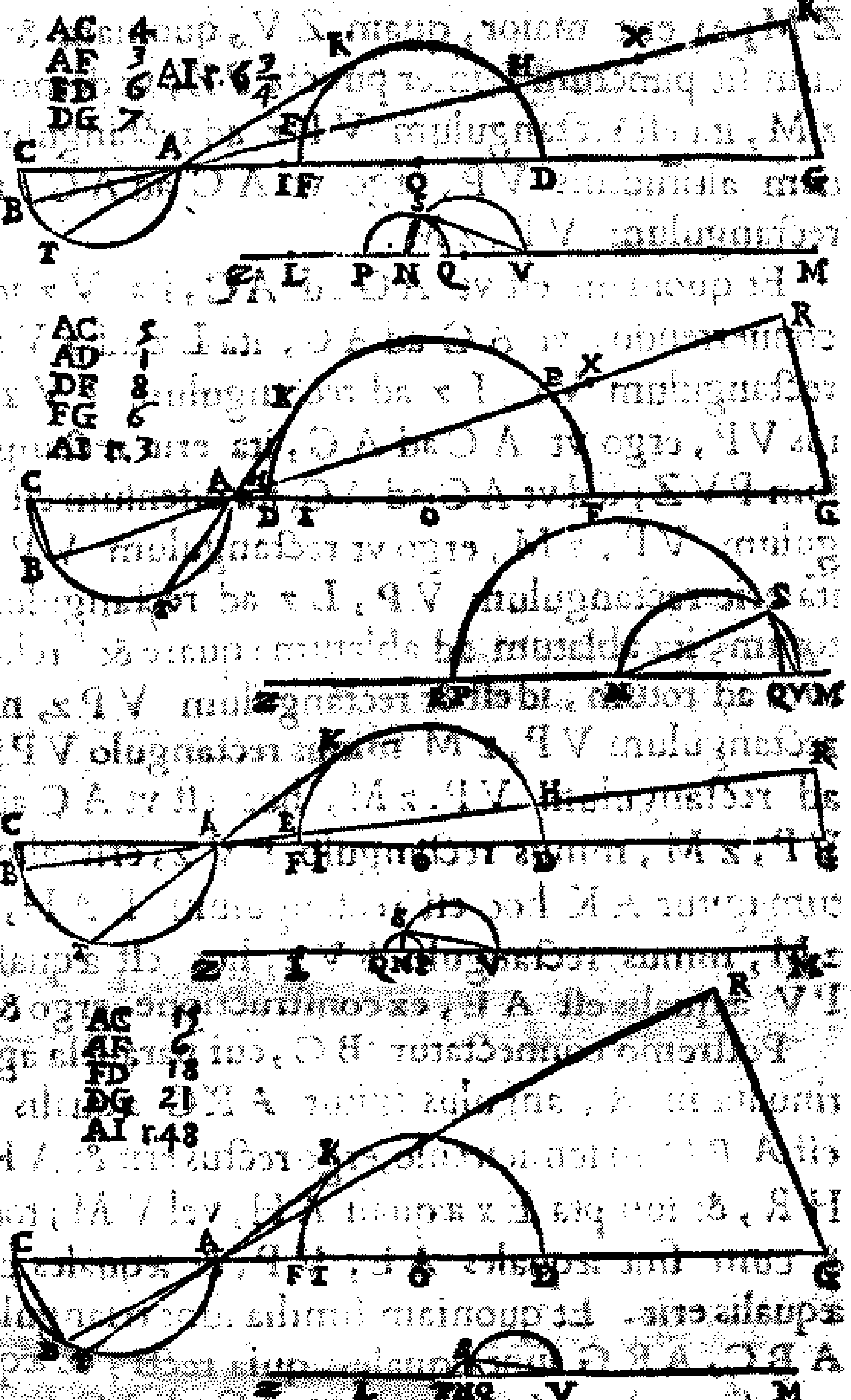
Compositio quarti Casus.

SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur; data autem recta linea V z, & contingat A k semicirculum D E F in k, semicirculum vero A B C secet in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertineat. Oportebit autem ipsam V Z non esse maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinentes, inter circumferentias T C, K F interijciuntur, neque minorem minima, quæ autem sit maxima, quæue minima iam est demonstratum. D

Si igitur data V Z sit æqualis maximæ, factum iam erit quod proponitur; & enim maxima est ea, quæ maior est rectarum k T, F C: si vero sit æqualis minimæ, minima autem sit ea, quæ minor est ipsarum K T, F C: itidem factum erit quod proponitur.

Si autem neutra dictarum k T, F C sit minima, inuenta minima Problemati satisfiet. inuentio autem minimæ constat ex Lemmate 16. Si autem V Z minor sit maxima, maior minima, sumatur ex centro circuli D E F, quod sit O recta O G æqualis O C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum, quod sit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita

V Z



A VZ ad aliam quæ sit ZL, & sit ipsarum VZ, ZL differentia LV, quæ secetur bifariam in N. Cum igitur à quadrato NV debeat auferri quadratum AI, vt Porisma præcipit describatur in VN semicirculus, in quo accomodetur VS æqualis AI infra demonstrabitur ipsa AI minor, quam VN, & conectatur SN. Quadratum igitur NV superat

B quadratum SV quadrato SN angulus enim NSV in semicirculo rectus est. Itaque rectæ VN addenda est, vel auferenda recta æqualis NS, sic Porisma fieri iubet, addatur ergo, vel auferatur prout sequentia præcepta docebunt, eaque aucta, vel diminuta sit VP cui æqualis ducatur à pū-

C cto A ad circumferentiā KF recta AE, & producatur donec secet semicirculum ABC in B. ipsam autem VP non esse minorem minore rectarum AF, Ax, nec maiorem maiore, tribus quæ sequuntur Lemmatibus manifestum fiet. Iam facta est constructio Problematis. Nunc ostendemus repetendo Resolutionis vestigia EB æqualem esse VZ datæ.

Secet recta AE vel continuata, circumferentiam KD in H, & centro N interuallo NS vel NP describatur circulus secans VL in Q, is circulus tan-

D get rectam SV in S, ac proinde quadratum SV* æquale erit rectangulo PVQ, vel VPL, seu quod idem est rectangulo VPZ, minus rectangulo VP, LZ; punctum enim L est inter puncta PZ, nam NP cum sit æqualis NS, maior est diametro NV, hoc est ipsa NL; si igitur fiat vt AC ad AG, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes itidem manebit inter eas partes æqualitas. At quoniam est vt AG ad AC, ita quadratum AK ad quadratum AI, ex constructione; erit conuertendo, vt AC ad AG, ita quadratum AI, hoc est quadratum SV, ad quadratum AK, quadratum igitur AK erit vna pars æqualitatis, alteram vero sic explorabimus. 96 tertij

Fiat vt AC ad AG, hoc est vt Lz ad ZV, ita PZ ad aliam, quæ sit

ZM:

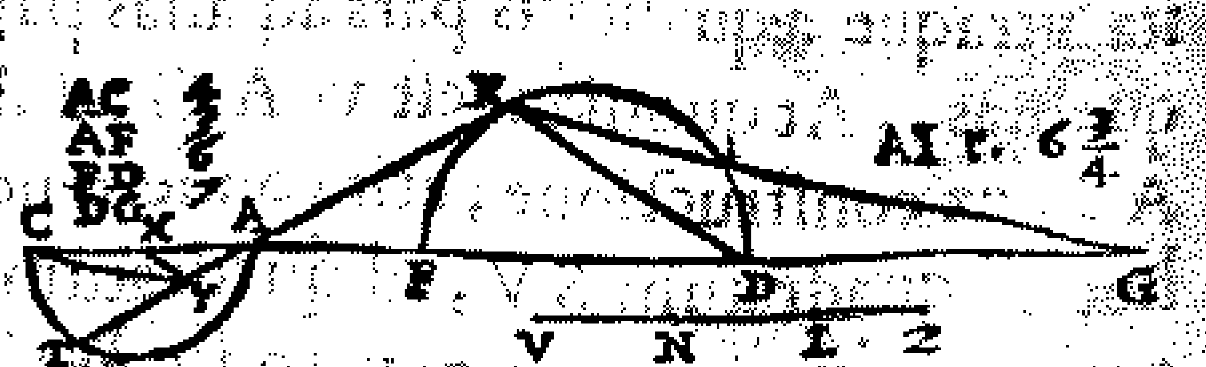
ZM; ea erit maior, quam ZV, quoniam & PZ maior est, quam LZ; A
cum sit punctum L inter puncta PZ, vt demonstrauimus. vt autem PZ ad zM, ita est rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM; sunt enim eiusdem altitudinis VP, ergo vt AC ad AG, ita erit rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM.

Et quoniam est vt AG ad AC, ita Vz ad zL, ex constructione; erit conuertendo, vt AG ad AG, ita Lz ad zV: vt autem Lz ad zV, ita est rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz; sunt enim eiusdem altitudinis VP, ergo vt AC ad AG, ita erit rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVZ; sed vt AC ad AG, ita ostensum est rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, ergo vt rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, ita erit rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz; nempe vt totum ad B
19 quinti totum, ita ablatum ad ablatum; quare & * reliquum ad reliquum erit vt totum ad totum, id est & rectangulum VPz, minus rectangulo VP, Lz, ad rectangulum VP, zM minus rectangulo VPz, erit vt rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, hoc est vt AC ad AG. Itaque rectangulum VP, zM, minus rectangulo PVz, erit altera pars æqualitatis. Quadratum igitur AK hoc est rectangulum EAH, æquale erit rectangulo VP, zM, minus rectangulo PVz, hoc est æquale erit rectangulo PVM, sed PV æqualis est AE, ex constructione, ergo & VM æqualis erit AH.

Postremo connectatur BC, cui parallela agatur GR occurrens AE continuatæ in R, angulus igitur ARG æqualis erit angulo ABC, sed rectus C
lem. ij. est ABC in semicirculo, ergo rectus erit & ARG: quare * æquales erunt EB, HR, & sumpta Ex æquali AH, vel VM; tota Bx æqualis erit toti AR, & cum sint æquales AE, VP, & æquales Ex, VM, tota Ax toti PM æqualis erit. Et quoniam similia sunt triangula ABC, ARG, anguli enim ABC, ARG sunt æquales, quia recti, & æquales quoque BAC, RAG, quia sunt ad verticem, erit vt AC ad AG, ita AB ad AR; sed vt AC ad AG, ita est quoque Pz ad zM, ex constructione; ergo vt AB ad AR, hoc est ad Bx, ita erit Pz ad zM: & permutando; vt AB ad Pz, ita Bx ad zM, videlicet vt pars ad partem, ita tota ad totam; quare & reliqua Ax
19 quinti ad reliquam * MP erit, vt tota Bx ad totam Mz; sed Ax æqualis est MP, ex constructione, ergo & BX æqualis erit zM, sed Ex æqualis est VM ex constructione ergo & reliqua EB reliquæ Vz æqualis erit. Posita est igitur inter circumferentias kF, TC recta EB æqualis datæ Vz, eaque ad D
punctum A pertinet, quod erat faciendum.

At vero rectam AI minorem esse, quam VN sic demonstrabimus.

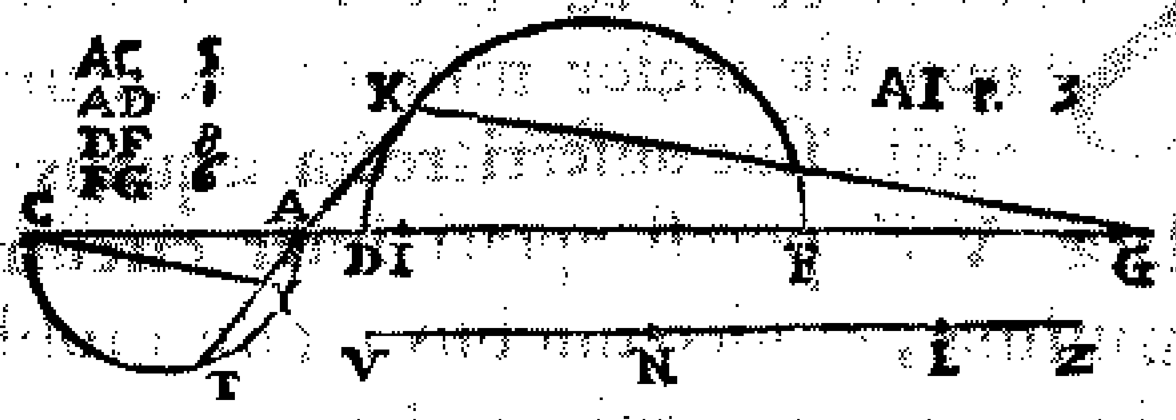
Hanc demonstrationem in duas partes diuidam, aut enim AD ad AF maiorem rationem habet, quam AG ad AC, aut non maiorem. primum habeat non maiorem, & FC sit intercepta inter conuexam circumferentiam KF, & cauam TC; ergo AI * non erit



Lem. 10

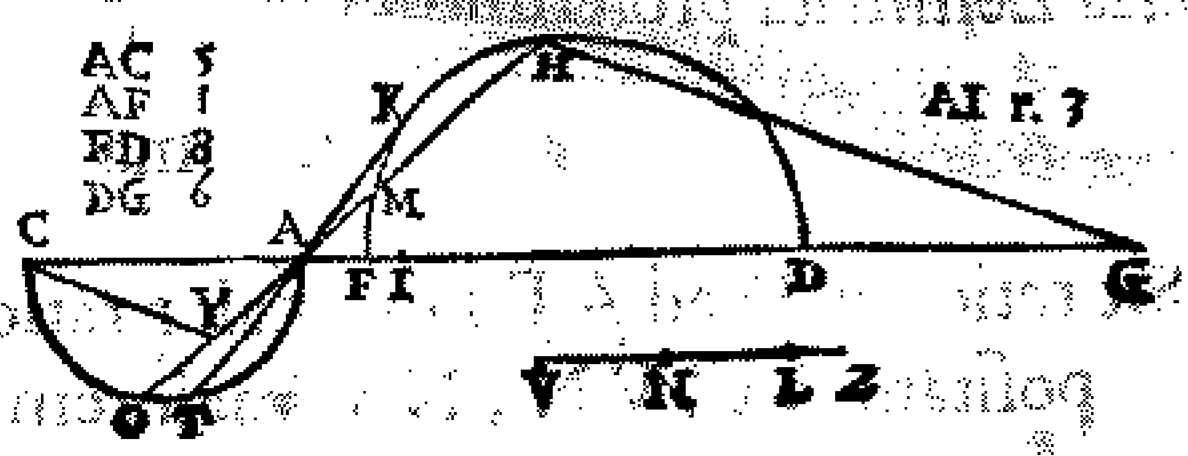
A erit maior, quàm AF, atque FC* minima erit omnium interceptarum in- lem. 12
ter circumferentias KF, TC. Connectantur autem Gk, KD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes AT, AC in punctis y x. Rectangulum igitur FAx* æquale est quadrato AI, & ideo* proportionales FA, AI, lem. 1 17 sexti
Ax, vnde Fx composita ex extremis non erit minor, quàm dupla media AI.

Et quoniam est vt AG ad AC, ita Vz ad zL, ex constructione, & *ita Fc ad cx, erit vt Fc ad cx, ita Vz ad zL: & per conuersionem rationis, vt CF ad Fx, ita erit zV ad VL; sed CF cum sit omnium interceptarum minima minor est, quam zV: ponitur enim zV maior minima, ergo & Fx minor erit, quam VL; sed Fx ostensa est maior, quam AI dupla, ergo AI dupla minor erit, quam VL, & consequenter AI
B simpla minor, quam VN, dimidia videlicet ipsius VL.



Sed sit FC intercepta inter cauas circumferentias kF, TC, ergo* kT minima est omnium, quæ inter dictas circumferentias intercipiuntur. Connectatur autem Gk, & ei parallela agatur cy secans AT in y, rectangulum igitur yAk,* æquale erit quadrato AI. & ideo* proportionales erunt yA, AI, AK; sunt autem & inæquales, quia AI* minor, est quam AK; ergo yk composita ex extremis maior est, quàm AI dupla. Et quoniam est vt AG ad AC,* ita kT ad Ty, & ita Vz ad ZL, ex constructio-
C ne, erit KT ad Ty vt VZ ad ZL, & per conuersionem rationis vt TK ad ky, ita erit ZV ad VL, sed KT cum sit omnium interceptarum minima minor est, quàm ZV, ergo & ky minor erit, quàm VL; sed ky ostensa est maior, quam dupla AI, ergo AI dupla minor erit, quàm VL, & consequenter AI simpla minor, quam VN dimidia videlicet ipsius VL.

Lem. 11 · lem. 1 / 17 sexti · lem. 10 · Lem. 5



Sed habeat AD ad AF maiorem rationem, quam AG ad AC ergo* AI maior erit, quam AF, minor autem, quàm AK: itaque à puncto A ad circumferentiam kF poterit duci recta æqualis AI; ducatur igitur, eaque sit
D AM, & producta secet circumferentiam TC in O, ergo* MO minima est omnium interceptarum inter circumferentias kF, TC. Producatur quoque ipsa AM vsque ad circumferentiam kD in H, & connectatur GH, cui parallela agatur CR secans AO in R. rectangulum igitur MAR æquali erit quadrato AI, hoc est quadrato AM; quare æquales erunt AR, AM.

lem 10 · lem. 12

Et quoniam est vt AG ad AC ita MO ad OR, & ita VZ ad ZL, ex constructione, erit vt MO ad OR, ita VZ ad ZL, & per conuersionem rationis, vt OM ad MR, ita ZV ad VL. sed OM cum sit omnium interceptarum minima, minor est quàm ZV ponitur enim ZV maior minima, Lem. 5

nima,

nima, ergo & MR minor erit, quam VL, & consequenter AM, vel A
AI minor, quam VN dimidia videlicet minor, quam dimidia. quare constat propositum.

Quo autem Casu rectæ VN addenda sit recta æqualis NS, quoue auferenda ratio his constat præceptis.

Præceptum I.

SI ratio AD ad AF non sit maior ratione AG ad AC, rectæ VN addenda est recta æqualis NS.

Præceptum II.

SI ratio AD ad AF maior sit ratione AG ad AC, data autem VZ non sit maior minore rectarum KT, FC, rectæ VN poterit siue addi, siue auferri recta æqualis NS: in hoc enim Casu recta æqualis datæ VZ potest aptari inter circumferentias kF, TC ex vtraque parte minimæ, & ideo duobus modis Problema absolui. Nam si auferatur aptabitur ea recta è regione FC; si vero addatur aptabitur è regione kT. B

Præceptum III.

SI vero data VZ maior sit minore rectarum kT, FC, recta ipsi VZ æqualis poterit aptari inter circumferentias kF, Tc ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum KT, Fc, itaque existente kT maiore, quam FC, rectæ VN addenda est recta æqualis NS, existente minore, auferenda. C

Restat vt recta VP sumpta, quemadmodum præcepta docent, ostendatur non minor minore rectarum AF, AK, nec maior maiore, quo circa tria Lemmata proferuntur.

Lemma XIII.

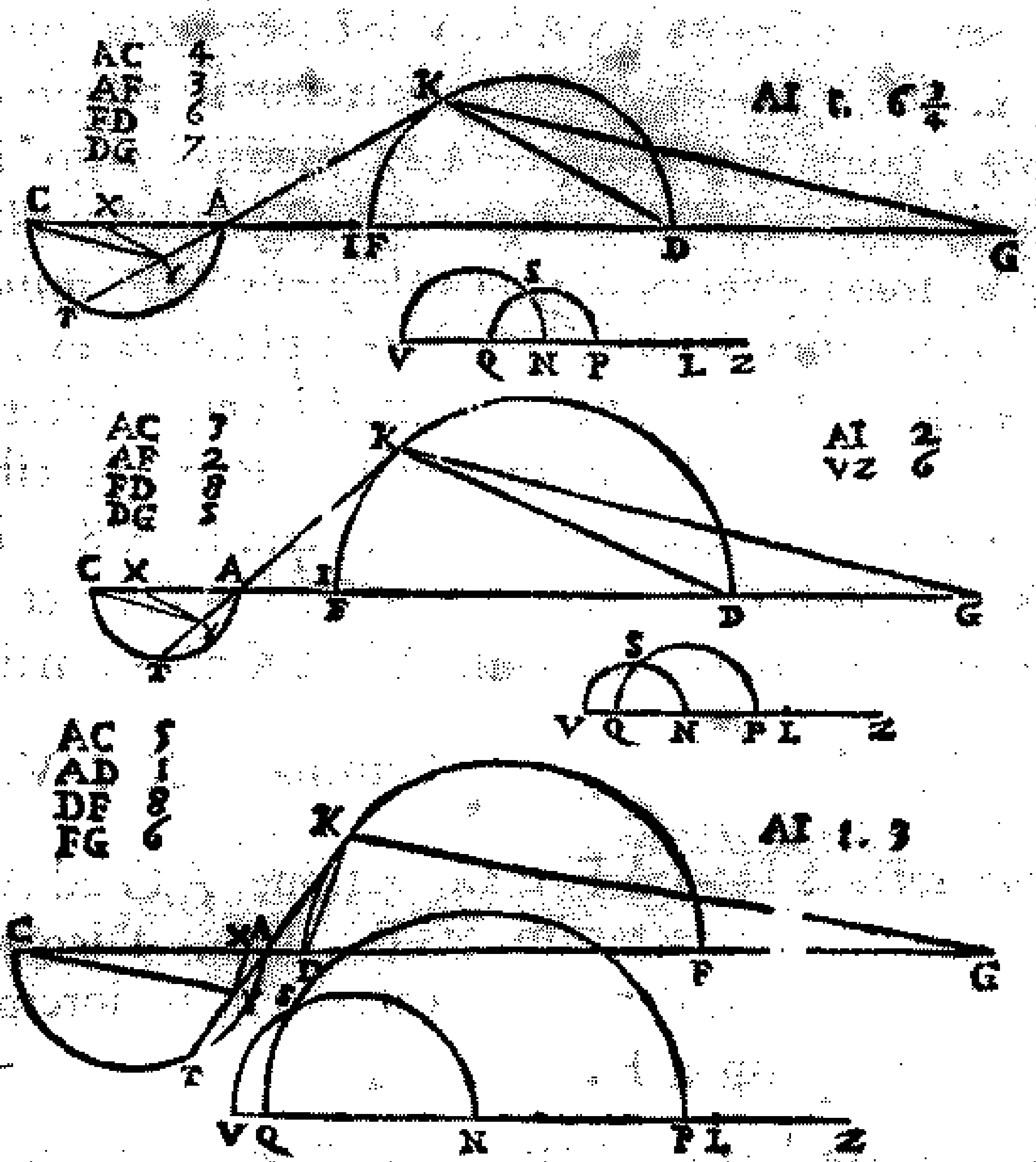
Sit ratio AD ad AF non maior ratione AG ad AC. Dico VP compositam ex, VN, NS maiorem esse minore rectarum AF, AK, minorem autem maiore.

AVt enim recta FC intercepta est inter conuexam circumferentiam KF, & cauam TC: quo Casu AF minor est, quam Ak; aut inter vtramque cauam, quo Casu AF maior est quam AK. Primo Casu KT * maximam est omnium, quæ inter circumferentias KF, TC intercipiuntur, minima vero FC, itaque VZ data minor est quam KT, maior quam FC, ponitur enim VZ minor maxima, maior minima. Secundo autem Casu * minima est KT, maxima FC; vnde VZ data maior est, quam KT, minor quam FC. D

lem. 11

lem. 11

Connectantur autem GK, kD, eisque parallelæ agantur cy, yx secan-



A cantes A T, A C in punctis y x. Quoniam igitur est vt A G ad A C, ita V Z ad Z L ex constructione, & ita * F C ad c x, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x; & per conuersionem rationis vt Z V ad V L, ita C F ad F x, sed z V in primo quidem Casu ponitur maior, quàm F C, ergo & V L maior erit, quam

B F x. In secũdo vero Casu ponitur Z V minor, quã c F, ergo & V L minor erit, quã F x.

Et quoniam æquales sunt L N, N V, ex constructione, & æquales quoque N P, N Q vt semidiametri, ideo fiunt quoque æquales L P, V Q, quare rectangulum P V Q æquale est rectangulo V P L, sed rectangulum P V Q * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum F A x, ergo rectangulum V P L æquale est rectangulo F A x. 36 tertij Lem. 5

C quare * proportionales sunt V P, F A, A x, P L, in primo quidem Casu sic argumentor, sed V L composita ex extremis ostensa est maior, quam F x composita ex medijs, ergo * altera extremarum V P, P L maxima erit, altera minima; sed V P maior est, quam P L, ergo ipsa V P maxima erit, & consequenter maior quam A F. 16 sexti Theor. ij huius

In secundo autem Casu argumentor in hunc modum: sed V L composita ex extremis V P, P L ostensa est minor, quam F x, composita ex medijs. F A A x, ergo * altera mediarum F A, A x maxima erit altera minima, sed A x maior est, quam A F, nam cum rectangulum F A x * æquale sit quadrato A I, & recta A I minor, quam A F erit A x multo minor, ergo ipsa A F maxima erit, atque adeo V P, minor, quam A F, Theor. ij huius lem. 5

D Rursus quoniam est vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex constructione, & ita * K T ad T y, erit vt V z ad z L, ita K T ad T y: & per conuersionem rationis, vt z V ad V L, ita T K ad K y, sed z V, in primo quidem Casu ponitur minor, quam T Q, ergo & V L minor erit, quam k y: in secundo vero Casu z V ponitur maior, quam T K, ergo & V L maior erit, quam k y. lem. 9

Et quoniam rectangulum y A K * æquale est quadrato A I, & recta A I * minor, quam A K: erit A y multo minor. lem. 5 Lem. 10

Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L, * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum y A K æqua- 36 tertij lem. 5

15 sexti lia erunt rectangula y A k, V P L, & ideo* proportionales V P, y A, A K, P L. sed V L composita ex extremis in primo quidem Casu ostensa est minor, quam k y composita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A K maxima erit, altera minima sed, A y ostensa est minor, quam A K, ergo A k maxima erit, & per consequens V P minor, quam A K.

Theor. 2 huius

In secundo vero Casu V L composita ex extremis V P, P L ostensa est maior, quàm K y composita ex medijs; ergo* altera extremarum V P, P L maxima erit, altera minima; sed V P maior est, quam P L, ergo ipsa V P maxima erit, atque adeo maior, quàm A K. Existente igitur ratione A D ad A F, non maiore, quam A G ad A C, recta V P composita ex V N, N S maior erit minore rectarum A F, A K minor maiore. quod erat ostendendum.

Theor. 2 huius

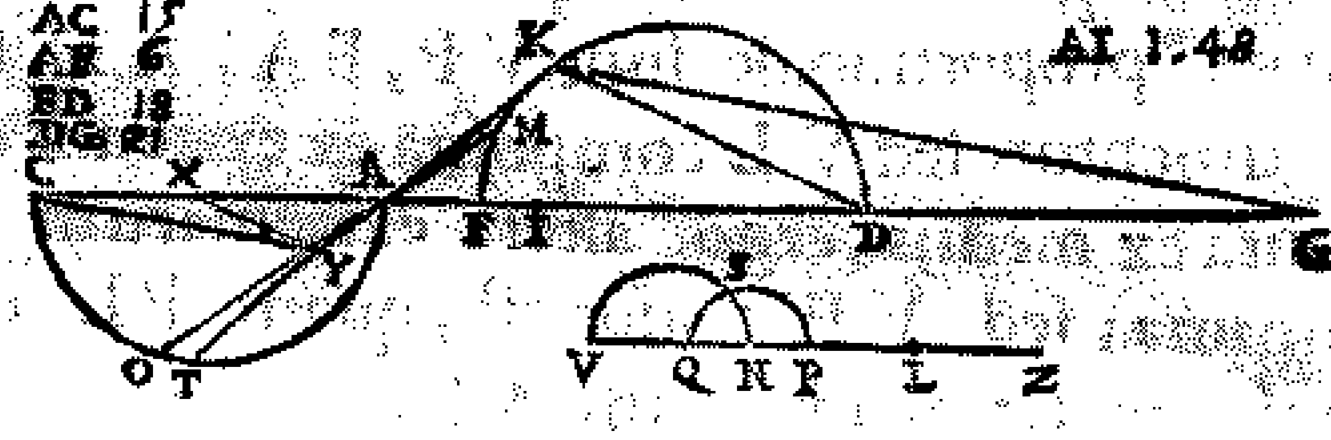
Lemma XIV.

Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, data autem V Z non maior minore rectarum K T, F C. Dico neque compositam ex V N, N S, neq; differentiam earundem maiorem esse, quàm a k, aut minorem, quàm a F.

SIt enim V P æqualis compositæ ex v N, N S, v Q vero æqualis differentiæ earundem, & connectantur G k, k D, eisq. parallelæ agantur c y y x, secantes a T, a C in punctis y x.

Quoniam igitur est, vt a G ad

lem. 1 a C,* ita k T ad T y, & ita v Z ad z L, ex constructione, erit vt v Z ad z L, ita k T ad T y, & per conuersionem rationis, vt Z v ad v L, ita erit T K ad K y; sed Z v non



est maior, quam T k, ponitur enim Z v non maior minore rectarum KT, FC, ergo neque v L maior erit, quam K Y. Et cum sit rectangulum

Lem. 3 Lem. 10 y A K* æquale quadrato a I, & recta a I* minor, quam a K, erit a y multo minor.

Et quoniam rectangulum P v Q, hoc est v P L sunt enim æquales v Q, P L,

Lem. 5 æquale est quadrato v S, hoc est quadrato a I, cui quoque* æquale est rectan-

xvj sexti gulum y a k, æqualia erunt rectangula v P L, y a K, & ideo* proportionales v P y a, a k, P L, sed v L composita ex extremis ostensa est non maior, quam k y, composita ex medijs, ergo si est minor, erit altera mediarum y a, a k maxima, altera minima; sed A y ostensa est minor, quam a k, ergo a k maxima erit, & per consequens V P minor quam a k.

Si vero V L composita ex extremis æqualis est y k composita ex medijs,

Theor. 3 huius maior* extremarum maiori mediarum æqualis erit; hoc est V P æqualis a k. Ipsam autem v P non esse minorem, quam a F manifestum est, nam cum v P

Lem. 10 maior sit, quá v S, hoc est quam a I, ipsa auté a I* maior, quam a F, erit v P multo maior. Recta igitur v P æqualis cópositæ ex v N, N S non est maior quá a k, nec

A nec minor quam A F, quod est primum.

Deinde quoniam V Q minor est quam V S hoc est, quam A I, ipsaque A I* minor, quam A K; erit V Q multo minor; superest igitur vt ipsa V Q ostendatur non minor, quam a F: id autem ita fit manifestum. lem. 10

Quoniam enim vt a G ad a C* ita est F C, ad C x, & ita quoque V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x, & per conuersionem rationis vt Z V ad V L, ita C F ad F x; sed Z V non est maior, quam C F: ponitur enim Z V non maior minore rectarum K T, F C, ergo neque V L maior erit, quàm F x. Et cum rectangulum F A x* æquale sit quadrato a I, & recta a I* maior, quam F a; erit A x multo maior. lem. 8 Lem. 5 lem. 10

Et quoniam rectangulum Q V P; vel V Q L, sunt enim æquales V P, B Q L,* æquale est quadrato V S hoc est quadrato a I, cui quoque æquale est rectangulum F A x, ipsa rectangula V Q L, F A x æqualia erunt, & ideo * proportionales V Q, F a, A x, Q L: sed V L composita ex extremis ostensa est non maior, quàm F x composita ex medijs, ergo si est minor, erit* altera mediarum F A, A x maxima, altera minima; sed A x ostensa est maior, quàm F A; ergo ipsa F A minima erit, & consequenter V Q maior, quam A F. Si vero V L composita ex extremis æqualis est F x compositæ ex medijs, minor extremarum* minori mediarum æqualis erit, hoc est V Q æqualis A F. Recta igitur V Q differentia rectarum V N, N S non est minor, quàm A F, nec maior, quam A K, quod secundo loco erat ostendendum. 36 tertij 16 sexti Theor. 2 huius Theor. 3 huius

C

Scholium.

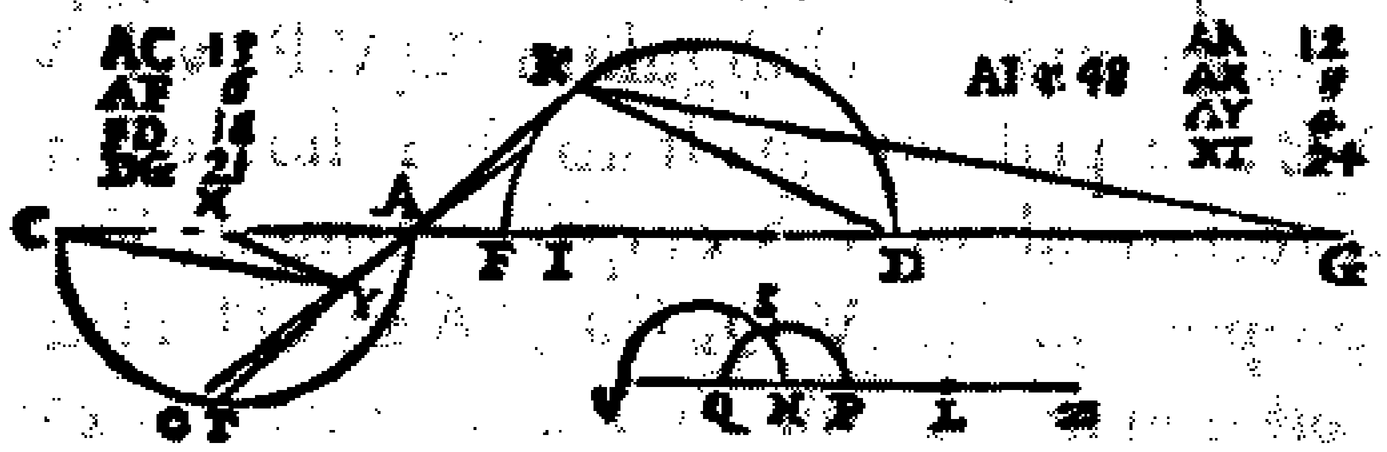
Ex demonstratis igitur manifestum est si A D ad A F maiorem rationem habeat, quàm a G ad a C. data autem V Z non sit maior minore rectarum k F, F C, Problema duobus modis absolui posse; nam si à puncto A ad circumferentiam k F ducatur recta a M, æqualis a I, & producatur ad circumferentiam T C in O, erit* M O minima omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur. Et cum V P composita ex V N, N S ostensa sit maior, quam a I, hoc est quam a M, non autem quam a k; poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta a E, æqualis V P. Similiter cum V Q differentia rectarum V N, N S ostensa sit minor, quam D a M, non autem quam a F, poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta a E æqualis V Q. Itaque si à puncto A ad circumferentiam K F ducatur a E æqualis V P compositæ ex V N, N S, aptabitur recta datæ V Z æqualis inter circumferentias K M, T O. Si vero ducatur a E æqualis V Q differentiæ ipsarum V N, N S aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C, atque adeo poterit aptari ex vtraque parte minimæ M O, & ideo Problema duobus modis absolui, quod in præcepto secundo monuimus. lem. 12

Lemma XV.

Rursus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C. Sed data V Z sit maior minore rectarum K T, F C, & à puncto A ad circumferentiam K F ducatur A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam T C in O est* autem A I maior, quam A F, minor autem quam A K. Dico si K T maior sit, quam F C, compositam ex V N, N S minorem esse, quã A k, maiorem quam A M; sin minor, differentiam rectarum V N, N S maiorem esse, quam A F, minorem quam A M.

lem. 10

Sit enim V P æqualis compositæ ex V N, N S, V Q vero æqualis differentiæ earundem, & cõnectantur G K, k D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes A T, A C in punctis y x, & sit primum k T maior quàm F C, ergo ipsa K T* maxima est omnium interceptarum inter circumferentias K F, T C; quare recta ipsi V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias K M, T O, non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit V Z maior quam F C, expositione, ipsaq. F C* maxima omnium interceptarum inter circumferentias M F, O C.



lem. 12

Corol. lem. 12 lem. 3

Et quoniam est, vt A G ad A C,* ita K T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L ex constructione, erit vt V z ad z L, ita K T ad T y, & per conuersioné rationis vt z V ad V L, ita T K ad k y; sed z V minor est, quàm T K: ea enim ponitur minor maxima, ergo & V L minor erit, quam k y, & cum sit rectangulum y A K* æquale quadrato A I, & recta A I* minor, quàm A K, erit A y multo minor.

Lem. 1 lem. 10

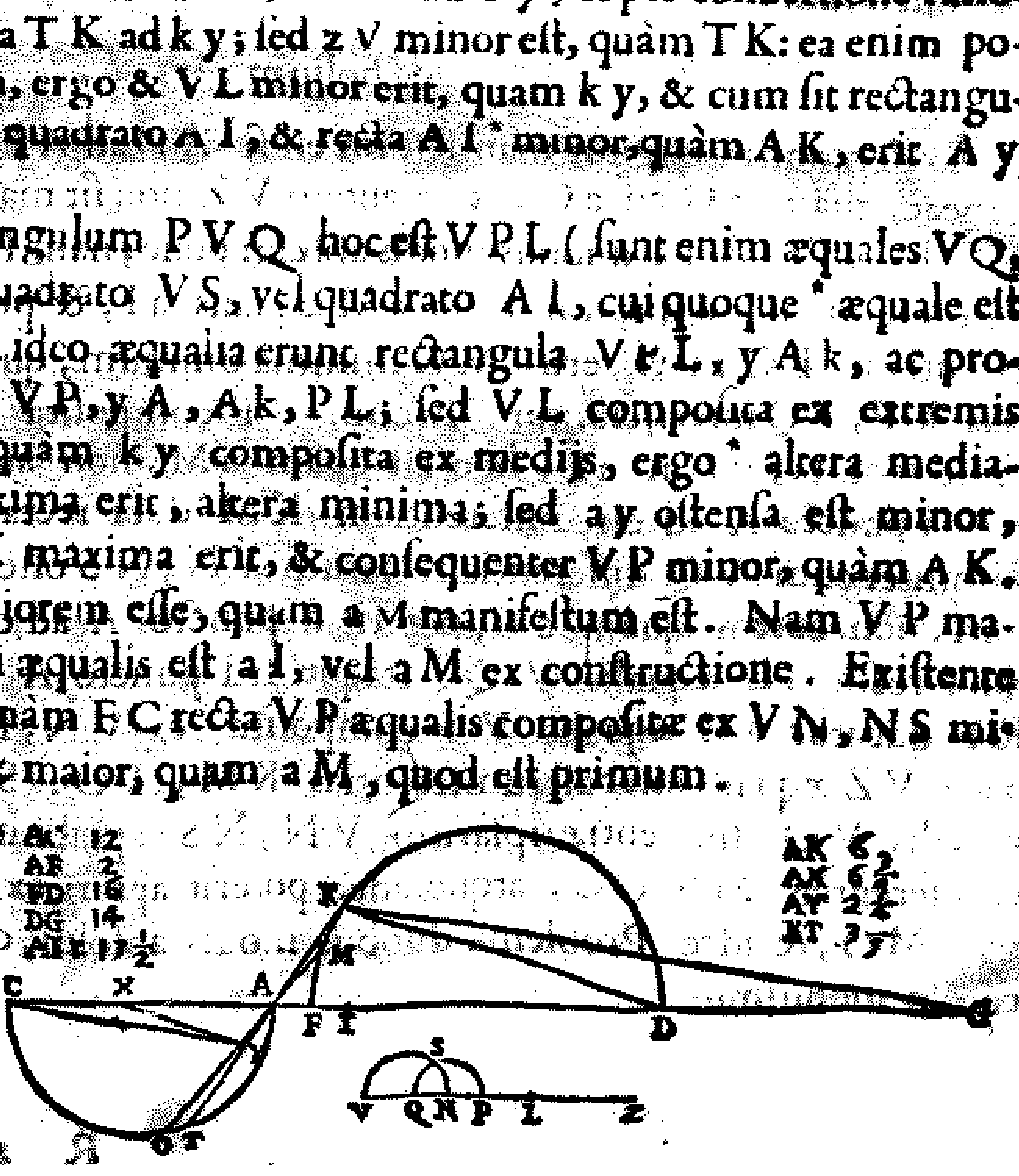
Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L (sunt enim æquales V Q, P L)* æquale est quadrato V S, vel quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum y A k, ideo æqualia erunt rectangula V P L, y A k, ac proinde* proportionales V P, y A, A k, P L; sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quàm k y composita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A K maxima erit, altera minima; sed a y ostensa est minor, quàm a K, ergo a K maxima erit, & consequenter V P minor, quàm A K. Ipsam autem V P maiorem esse, quam a M manifestum est. Nam V P maior est, quam V S, cui æqualis est a I, vel a M ex constructione. Existente igitur K T maiore, quàm F C recta V P æqualis compositæ ex V N, N S minor est, quàm a K, & maior, quam a M, quod est primum.

36 tertij lem. 3 16 sexti

Theor. 2 huius

Sed sit K T minor quam F C, ergo F C,* maxima est omniũ interceptarum inter circumferentias, k F, T C, quare recta datæ V Z

lem. 12



A V Z æqualis potest aptari inter circumferentias M F, O C; non etiam inter circumferentias K M, T O, cum sit V Z maior, quàm K T, ex positione; ipsa autem K T maxima omnium, quæ inter circumferentias K M T O interijciuntur.

Et quoniam est vt A G ad A C, ita * F c ad c x, & ita V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita F c ad c x: & per conuersionem rationis, vt z V ad V L, ita c F ad F x, sed z V minor est, quàm F c: ea enim ponitur minor maxima, ergo & V L minor erit, quam F x. Et cum sit rectangulum F A X * æquale quadrato A I, & recta A I * maior, quam A F, erit A X multo maior. Lem. 1 lem. 5 lem. 10

Denique quoniam rectangulum Q V L, vel V Q L * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum F A X, rectangula V Q L, F A X æqualia erunt, & ideo * proportionales V Q, F A, A x, Q L; sed V L composita ex extremis, ostensa est minor, quam F x composita ex medijs, ergo * altera mediarum F A, A x maxima erit, altera minima; sed A x ostensa est maior, quam A F, ergo ipsa F A minima erit: vnde V Q maior, quàm A F. Ipsam autem V Q minorem esse, quàm a M constat ex eo, quod ea minor est, quàm V S, cui æqualis est A I, vel a M, ex constructione. Existente igitur K T minore, quàm F C, recta V Q æqualis differentiæ rectarum V N, N S maior est, quàm A F, minor autem quam a M, quod secundo loco erat ostendendum. 36 tertij lem. 9 Theor. 2 huius

B

Resolutio huiusce quarti Casus, quemadmodum & tertij, incidit in æquationem de duobus terminis explicabilem, quorum maior est aggregatum rectarum V N, N S, minor differentia earundem. Et quoniam non semper vterque indicat A E quæsitam, ideo hic quoque ostendam quomodo terminus quæsitam a E indicans dignoscatur.

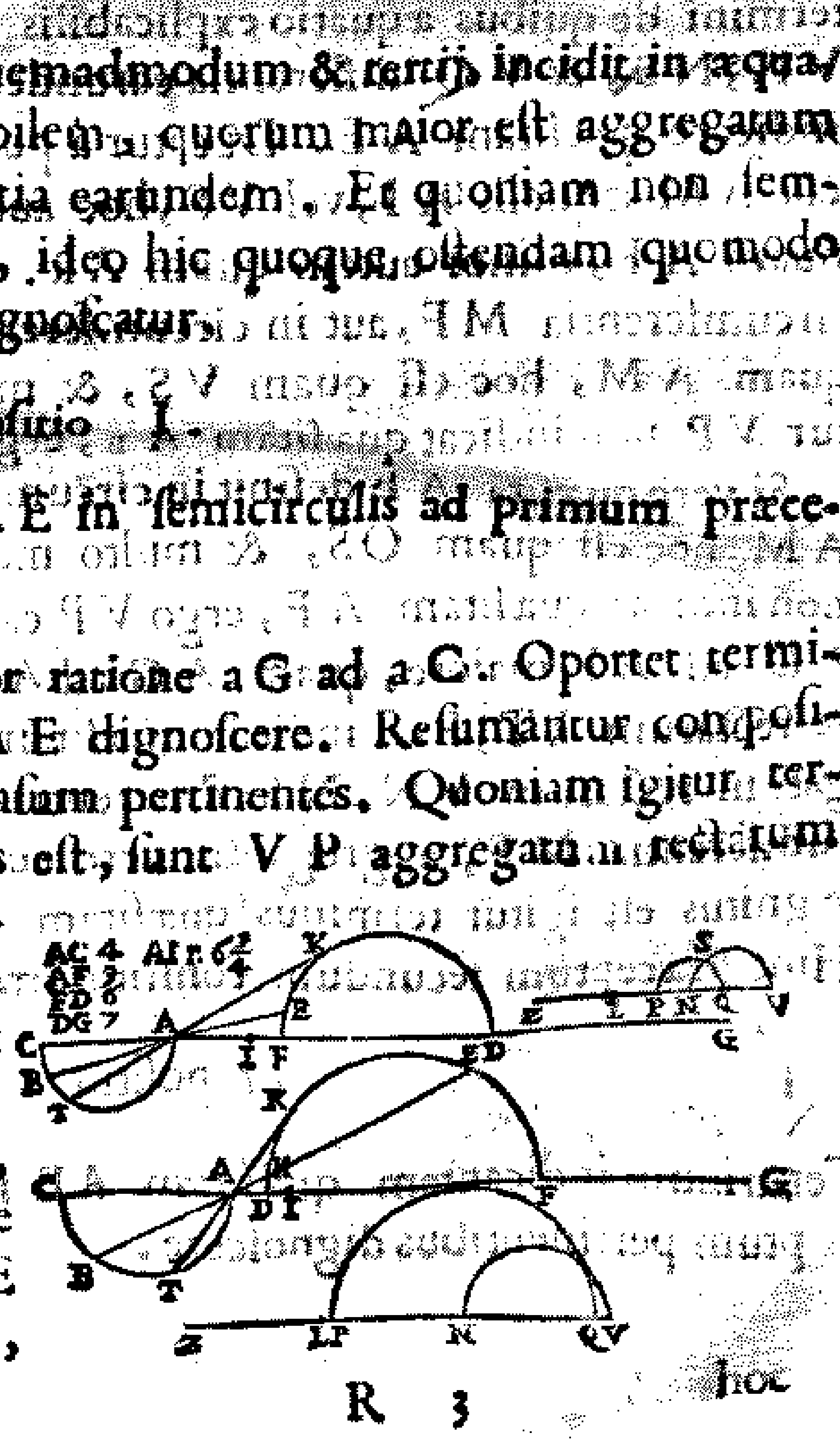
C

Propositio I.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoscere.

Sit ratio A D ad A F non maior ratione a G ad a C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Resumantur compositionis figuræ ad huiusmodi Casum pertinentes. Quoniam igitur termini de quibus æquatio explicabilis est, sunt V P aggregatum rectarum V N, N S, & V Q differentia earundem, ideo manifestum est alterum eorum quæsitam A E indicare; & quoniam ratio A D ad a F ponitur non maior ratione a G ad a C, recta A I non * erit maior minore rectarum A F, A k, vnde A E quæsita maior erit, quam A I, hoc lem. 6

D

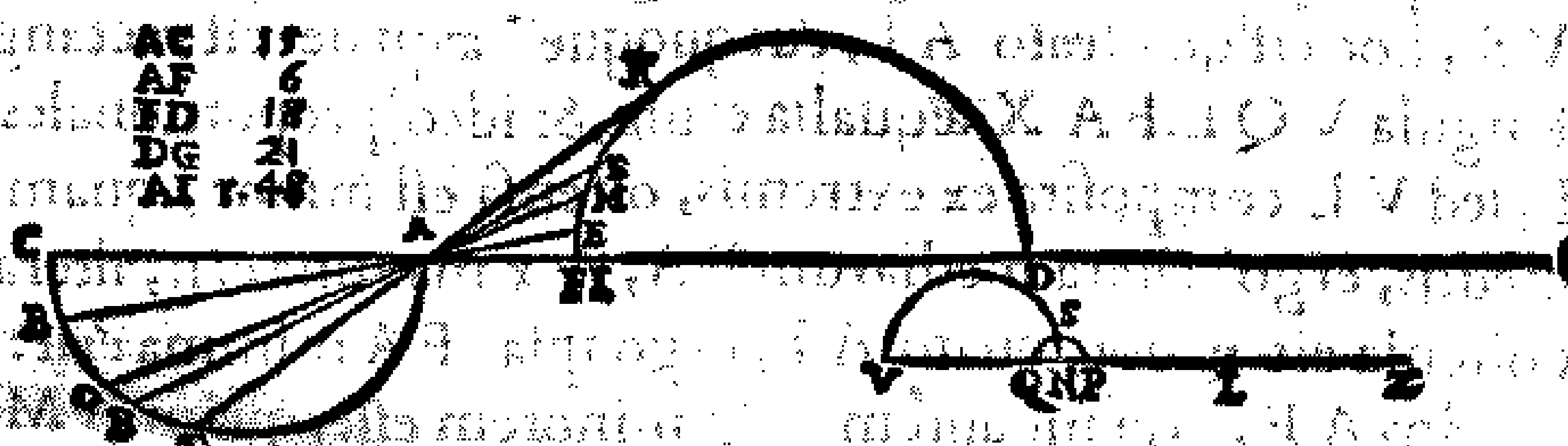


hoc est quam V S, & multo maior quam V Q, ipsa igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V P. Existente igitur ratione A D ad A F non maiore, ratione A G ad A C, aggregatum rectarum V N, N S indicat quæsitam A E. Itaque agnitus est terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum constitutum est. A

Propositio I I.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad secundum præceptum pertinentibus dignoscere.

SIt ratio AD ad AF maior ratione A G ad A C, & data VZ neutra rectarum KT, FC sit B



maior. Oportet terminum quæsitam A E indicantem dignoscere. Resumatur Compositionis figura ad huiusmodi Casum pertinens. Quoniam igitur termini de quibus æquatio explicabilis est sunt V P, aggregatum rectarum V N, N S, & V Q differentia earundem, manifestum est alterum eorum indicare quæsitam A E. Ducatur à puncto A ad circumferentiam k F recta A M æqualis A I, vel V S, hoc autem potest fieri, nam A I maior est, quam A F, minor autem quam A k. aut igitur quæsita A E desinit in circumferentia M F, aut in circumferentia M K. si in M F, ea erit maior quam A M, hoc est quam V S, & multo minor quam V P. Recta igitur V P non indicat quæsitam A E, ergo V Q eam indicat. C

Lem. 10

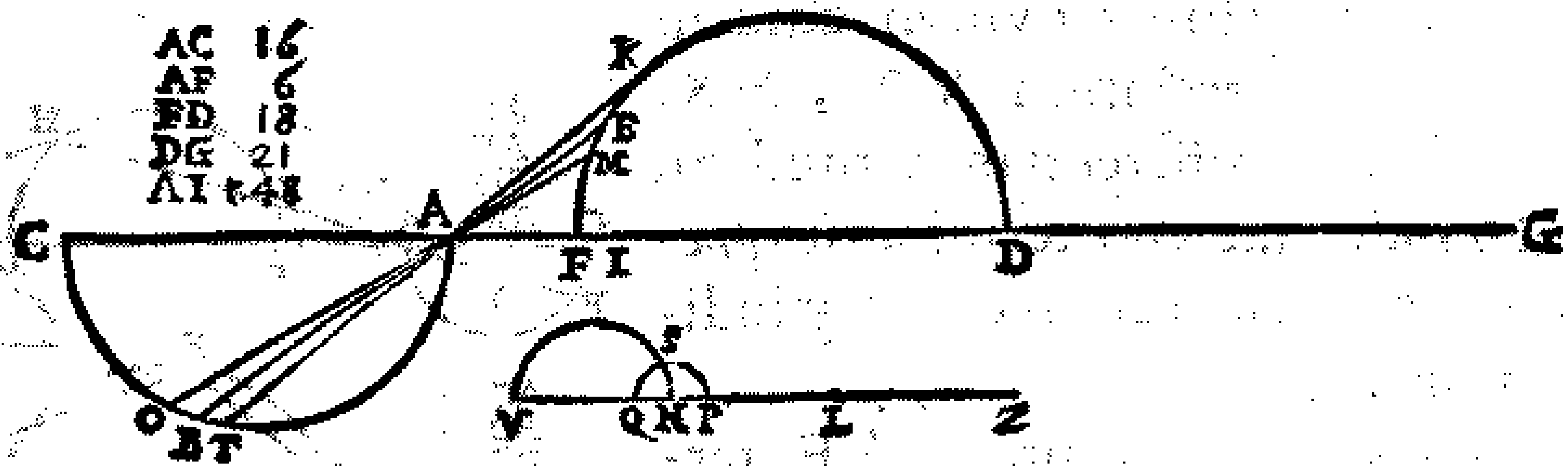
Si vero quæsita A E desinit in circumferentia M k, ea maior erit, quam A M, hoc est quam O S, & multo maior, quam V Q. ipsa igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo V P eam indicat. Itaque existente ratione A D ad A F maiore, quam A G ad A C, & data V Z non maiore minore rectarum k T, F C indicat quæsitam A E, tum differentia, tum aggregatum rectarum V N, N S; differentia quidem cum A E desinit in circumferentia M F, aggregatum vero cum desinit in circumferentia k M. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum secundum constitutum est. D

Propositio I I I.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoscere.

Rur-

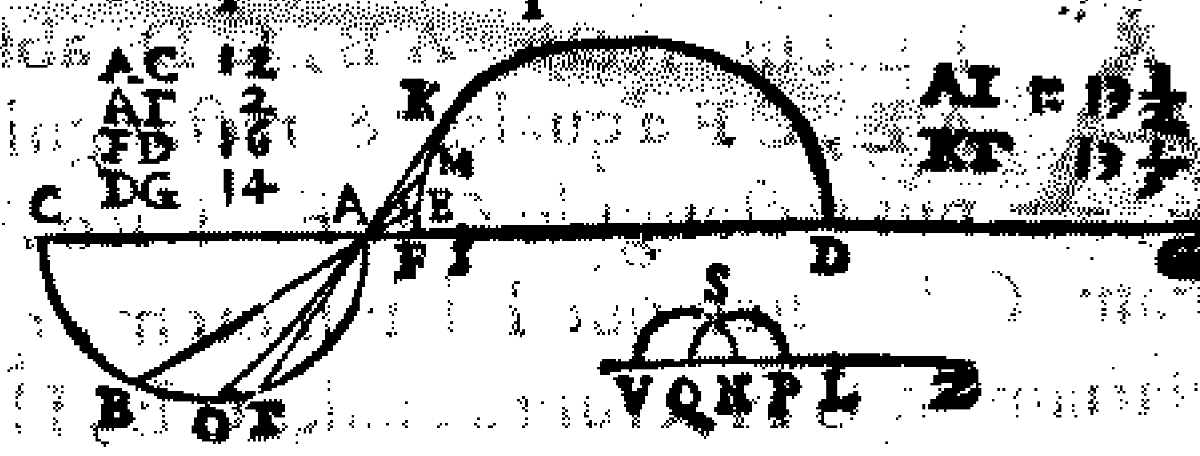
A RVrsus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, sed data V Z sit



maior minore rectarum K T, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Fiat constructio vt in antecedenti propositione & producatur M A, vsque ad circumferentiam T C in O, ergo M O* minima

B erit omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur. Manifestum est igitur rectam datæ V Z æqualem posse aptari inter circumferentias semicirculum ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum k T, F C. Itaque sit primum k T maior, quàm F C, ergo recta æqualis datæ V z poterit aptari inter circumferentias k M, T O; non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit V Z maior, quam F C ex positione, ipsaq. F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C intercipiuntur; itaque A E quæsita terminabitur in circumferentia K M, & ideo maior erit, quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S, & multo maior quam V Q, quæ æqualis est differentiæ rectarum V N, N S: Terminus igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V P æqualis aggregato ipsarum V N, N S. Corol. lem. 12

C Sed sit K T minor, quam F C, ergo recta æqualis datæ V Z poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias K M, T O, cum sit V Z maior, quàm K T, quæ est* maxima omnium inter circumferentias K M, T O interceptarum, atque A E quæsita terminabitur in circumferentia M F, vnde minor erit, quam A M, hoc est quàm A I, seu quam V S, & multo minor, quàm V P; terminus igitur V P non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V Q. Cum igitur ratio A D ad A F Corol. lem. 12



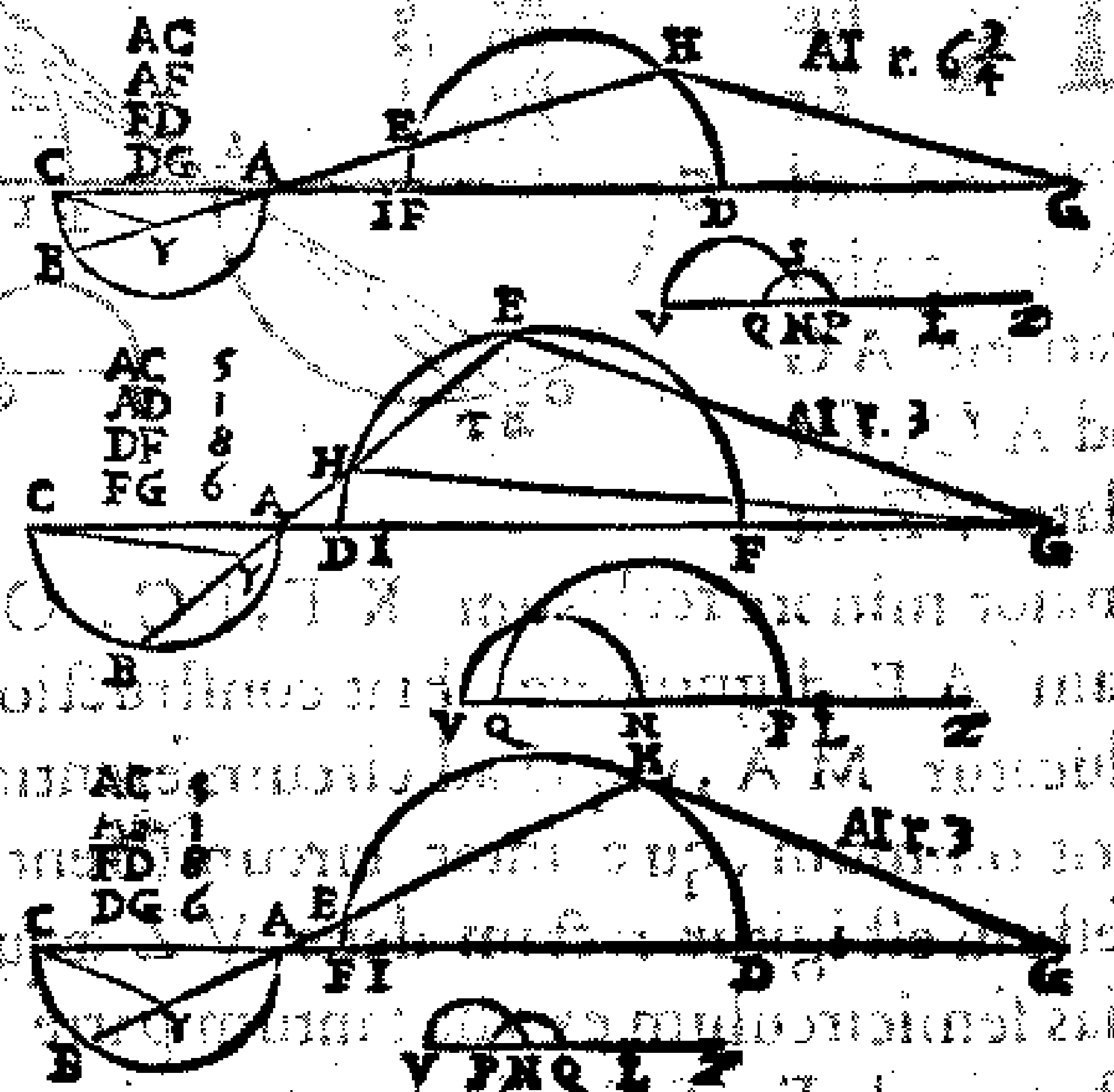
D maior sit, quam A G ad A C, & data V Z maior minore rectarum k T, F C existente K T maiore, quam F C, aggregatum rectarum V N, N S indicat A E quæsitam; existente vero minore differentia. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat.

Hinc præceptum tertium constitutum est.

Superest vt ostendamus quemadmodum factum est in præcedenti Casu, nempe indicante vno terminorum quæsitam A E, quid indicet terminus alter.

Resumantur Compositionis figuræ, & connectatur G H, eique parallela agatur c y secans A B in y. Duos terminos, Porisma constituit, de qui-

bus



bus A explicabilis est vnum quidem aggregatum rectarum V N , N S . alterum vero differentiam earundem, Dico indicante vno terminorũ quæsitam A E , alterum rectæ A y indicem esse . A

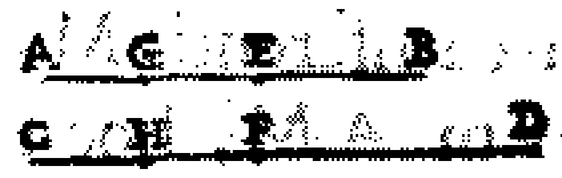
Indicet enim quæsitam A E terminus V P, siue sit æqualis aggregato rectarum V N , N S , siue differentiæ . Quoniam igitur rectangulum
Lem. 1 E A y * æquale est quadrato A I , &
36 tertij rectangulum P V Q * æquale quadrato V S , quæ quidem quadrata æqualia sunt , quod & rectæ A I , V S sunt B
æquales , ex constructione ; ideo rectangulum P V Q æquale erit rectangulo E A y ; sed V P indicans quæsitam A E æqualis est ipsi A E , ergo & V Q æqualis erit A y : itaque recta V Q , quæ est alter terminus indicat rectam A y .

Indicante igitur vno terminorum V P , V Q quæsitam A E , alter rectam A I indicat ; quod erat ostendendum .

Lemma X V I.

Si à duabus rectis lineis abscindantur duæ rectæ æquales , rectangulum autem contextum prima & reliqua parte eiusdem sit minus eo , quod secunda , & reliqua parte eiusdem continetur , prima minor erit , quam secunda , & reliqua pars primæ minor , quam reliqua pars secundæ . C

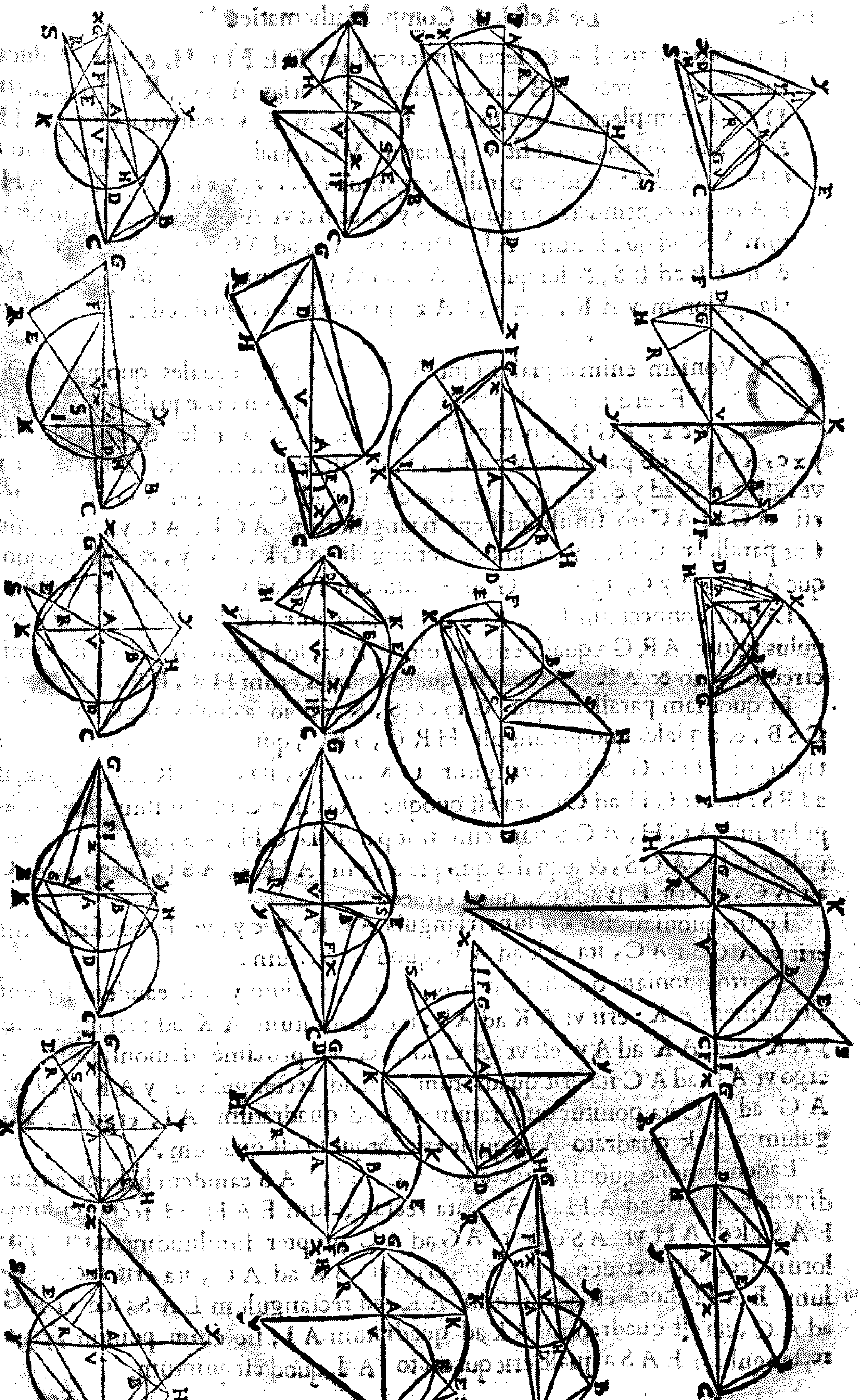
A Duabus rectis A B , C D abscindantur rectæ A E , C F æquales & rectangulum A B E sit minus rectangulo C D F . Dico A B minorem esse



quam C D , item que E B minorem , quam F D . Secentur enim A E , C F bifariam in G H , & sunt æquales G E , H E , vnde & earum quadrata æqualia erunt , sed cum rectangulum A B E minus sit rectangulo C D F , sic enim ponitur , erit ipsum rectangulum A B E , vna cum quadrato G E , minus rectangulo C D F vnà cum quadrato H F ; sed rectangulum A B E vna cum quadra- D
6 secundi to G E * æquale est quadrato G B ; similiter & rectangulum G D F , vnà cum quadrato H F * æquale quadrato H D ; ergo quadratum G B , minus erit quadrato H D : vnde & recta G B minor , quam recta H D , & additis æqualibus A G , C H , tota A B minor erit , quàm C D tota atque ablatis æqualibus G E , H F , reliqua E B minor erit , quam reliqua F D . quare constat propositum .

Lemma X V I I.

Sint duo semicirculi A B C , D E F in directum bases habentes , & recta A K per-



perpendicularis ad A C. secet semicirculum D E F in H, & per A ducatur vtcumque recta A B E secans circumferentias A B C, K F in punctis D E, & compleatur circulus D E, F H, quem E A continuata secet in H, & ex eius centro, quod sit V ponatur V G æqualis V C, & connectantur G H, G K, k D, quibus parallelæ agantur c S, c y, y x secantes E A, A H, F A etiam continuatas in punctis S y x. & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico sit A G ad A C, ita esse F C ad c x, & ita E B ad B S, & ita quoque A K ad A y, & insuper vnumquodque rectangulorum y A K, E A S, F A x quadrato A I æquale esse.

QVoniam enim æquales sunt V G, V C, & æquales quoque V D, V F, erunt æquales & D G, F C, & quoniam æquales sunt anguli y c x, k G D ob parallelas y c, k G, & æquales quoque anguli y x c, k D G ob parallelas y x ad K D, similia erunt triangula k D G, y c x vt igitur k G ad y c, ita erit G D, hoc est F C ad C x; sed vt k G ad y c, ita est A G ad A C ob similitudinem triangulorum A G k, A C y: nam cum sint parallelæ G H, c y, æquales sunt anguli A G k, A C y, & æquales quoque A k G, A y C, ergo vt A G ad A C, ita erit F C ad C x quod est primum.

Deinde connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans E H in R: angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C; sed rectus est A B C in semicirculo, ergo & A R G rectus erit, quare æquales erunt H R, E B.

Et quoniam parallelæ sunt G H, C S, & ob id æquales anguli G H R, C S B, & æquales quoque anguli H R G, S B C, quia recti ideo similia erunt triangula H R G, S B C, vt igitur G K ad C S, ita erit H R; hoc est E B ad B S: sed vt G H ad C S, ita est quoque A G ad A C ob similitudinem triangulorum A G H, A C S nam cum sint parallelæ G H, E S, æquales sunt anguli A G H, A C S, & æquales quoque anguli A H G, A S C, ergo vt A G ad A C, ita erit E B ad B S. quod est secundum.

Tertio quoniam similia sunt triangula A G k, A c y, vt demonstrauimus erit vt A G ad A C, ita A k ad A y, quod est tertium.

Quarto quoniam quadratum A K, & rectangulum y A K eandem habent altitudinem A K: erit vt A K ad A y, ita quadratum A K ad rectangulum y A K, sed A K ad A y est vt A G ad A C, vt proximè demonstrauimus, ergo vt A G ad A C ita erit quadratum A K ad rectangulum y A K, sed vt A G ad A C ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I, ergo rectangulum y A k quadrato A I æquale erit, atque id est quartum.

Eadem ratione quoniam rectangula E A H, E A S eamdem habent altitudinem E A. erit ad A H ad A S, ita rectangulum E A H ad rectangulum E A S; sed A H vt A S est vt A G ad A C propter similitudinem triangulorum secundo loco demonstratam, ergo vt A G ad A C, ita erit rectangulum E A H, hoc* est quadratum A K ad rectangulum E A S; sed vt A G ad A C, ita est quadratum A k ad quadratum A I, sic enim ponitur, ergo rectangulum E A S æquale erit quadrato A I, quod est quintum.

*35 tertij

Po-

A Postremo quoniam parallelæ sunt kD, yx, erit angulus ADK æqualis angulo Axy, & angulus AKD angulo Ayc, & ideo similia triangula ADk, Axy, vt igitur AD ad Ak, ita erit Ax ad Ay; sed vt AD ad AK, * ita est Ak ad AF, rectangulum enim DAF* æquale est quadrato Ak, ergo vt Ax ad Ay, ita erit AK ad AF vnde rectangulum FAx sub extremis,* æquale erit rectangulo yAK sub medijs, sed rectangulum yAK æquale est quadrato AI, vt quarto loco demonstrauimus, ergo & rectangulum FAx quadrato AI æquale erit, quod sexto, & vltimo loco erat ostēdendū. xvij sexti 35 tertij 16 sexti

Corollarium.

B EX demonstratis colligitur rectangula yAK, EAS, FAx æqualia esse etenim vnumquodque eorum ostensum est æquale quadrato AI.

Casus quintus

Denuo vergant ad eandem partem dati duo semicirculi maior minorem includens; sed recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi minoris, à quo quidem angulo semicirculus maior plus distet, quam à reliquo.

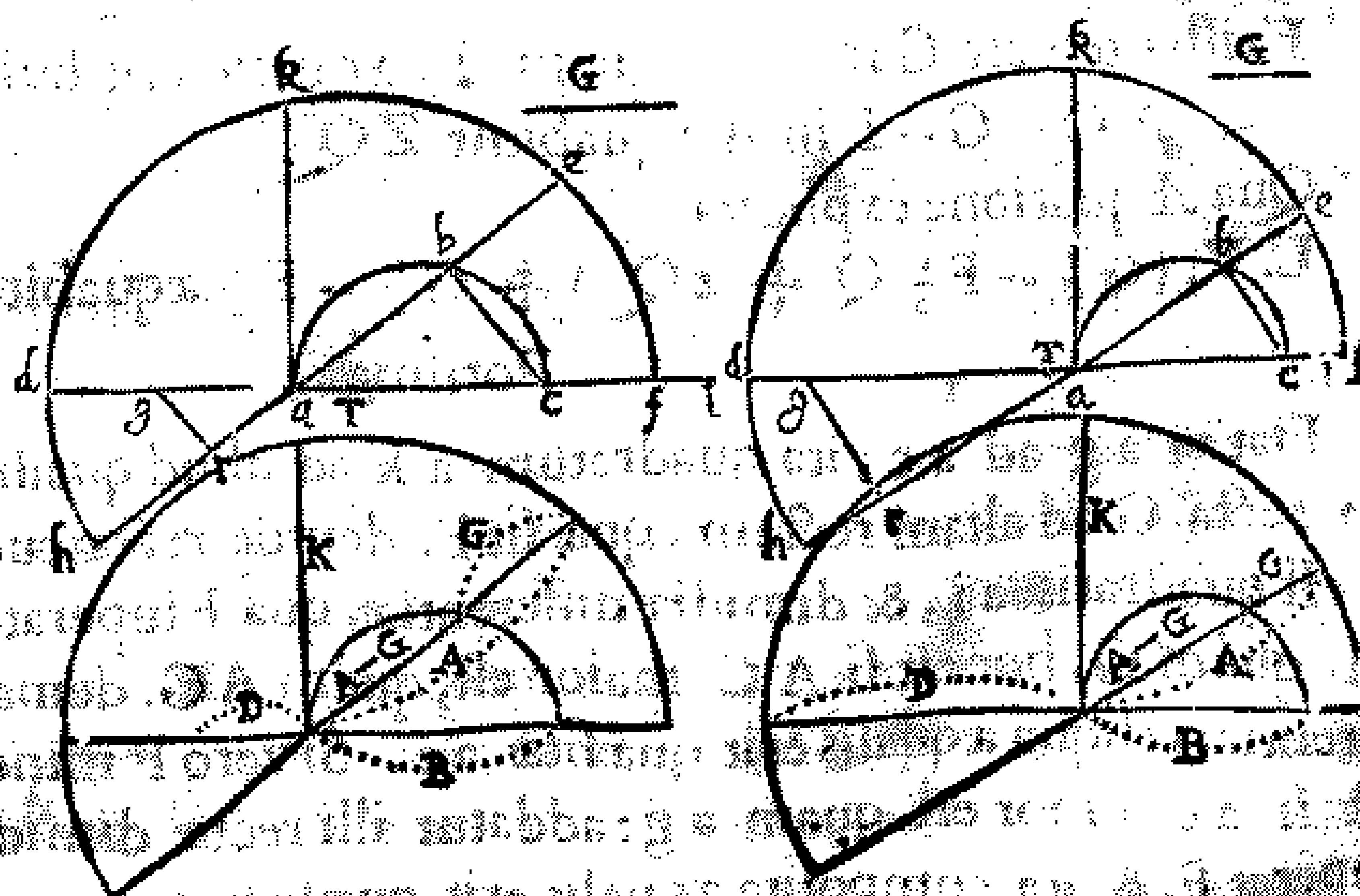
SInt itaque tales dati duo semicirculi abc, def, data autem recta linea G, & ducatur ak perpendicularis ipsi df secans circumferentiam def in k oportet inter circumferentias abc, kf ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertingat.

C

Resolutio.

POsita iam sit recta linea eb æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertingat, & ex centro circuli def, quod sit T ponatur TG æqualis TC, & compleatur circulus fe, dh, quem ea producta secet in h, & ipsi eh ducatur perpendicularis gr, & connectatur bc, ea quoque ipsi eh perpendicularis erit quia angulus abc in semicirculo rectus est. vnde* æquales erunt hr, eb. Lem. 8

Datarum ac, ag, be, ak; prima sit B, secunda D, tertia G, D quarta K. vt designatum est in figuris ad resolutionem pertinētibus, & quæratur ae. estò illa A, ergo ab erit A + G, & cum sint similia triangula abc, arg, anguli enim abc, arg sunt æquales, quia recti,



&

& æquales quoque anguli ad a, quia sunt ad verticem; erit vt a c ad a g, A
ita a b ad a r, hoc est in figuris Resolutionis vt B ad D, ita A − G ad $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$; atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$, cui addita r h, quæ æqualis est e b tota a h erit
33 tertij $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B} + G$; sed rectangulum e a h* æquale est quadrato AK, ergo

$$\frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B} + G \text{ in } A \text{ æquabitur } KQ$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

$$D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A + B \text{ in } G \text{ in } A \text{ æquabitur } KQ \text{ in } B.$$

Et applicentur omnia ad D, vt Potestas æquationis ex se subsistat, ergo

$$AQ - G \text{ in } A + \frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} \text{ æquabitur } \frac{KQ \text{ in } B}{D}$$

Sed vt Æquatio facilius explicetur. trãsmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est; hoc est fiat vt D ad B ita k Q ad aliud quadratum, quod sit Z Q, eritque Z Q idem B
quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit E, eritque F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur transmutatione.

$$AQ - G \text{ in } A + F \text{ in } A \text{ æquabitur } ZQ$$

In hac æquatione G interdum minor est, quam F, interdum maior; interdum æqualis, nam cum D minor est, quam B fiet & G minor, quam F; est enim vt D ad B, ita G ad F, D autem minor est, quàm B cum centrum circuli d e f includentis existit inter puncta a c; maior vero cum existit extra, æqualis autem cum existit in ipso a puncto. Itaque cum G minor est, quàm F quadratum in Æquatione afficitur affirmate; cum autem C
maior afficitur negate, at cum æqualis, nulla est affectio, sed quadratum purum manet, nam id quod est affirmatum æquale est ei quod est negatum, atque adeo affirmationem destruit negatio. Existente igitur G minore quam F, eiusmodi erit Æquatio.

$$AQ + F - G \text{ in } A \text{ æquabitur } ZQ$$

Qua Æquatione explicata

$$L.V. \left(F\tfrac{1}{2} - G\tfrac{1}{2}\, Q + ZQ\right) - \begin{matrix} F \\ G \end{matrix}\tfrac{1}{2} \text{ æquabitur } A$$

Existente vero G maiore, quam F. æquatio erit huiusmodi.

$$AQ - G - F \text{ in } A \text{ æquabitur } ZQ$$

Qua Æquatione explicata

$$L.V. \left(G\tfrac{1}{2} - F\tfrac{1}{2}\, Q + zQ\right) + G\tfrac{1}{2} - F\tfrac{1}{2} \text{ æquabitur } A$$ D

Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. deinde rectæ cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ differentiæ, qua F superat G siquidem F maior est, quàm G, hoc est si A C maior est, quàm A G. dematur ipsa dimidia differentia, reliqua æqualis erit quæsitæ a e. Si vero F minor est, quam G; hoc est si a c minor est, quam a g: addatur illi rectæ dimidia differentia, qua G superat F, & ita composita æqualis erit quæsitæ a e.

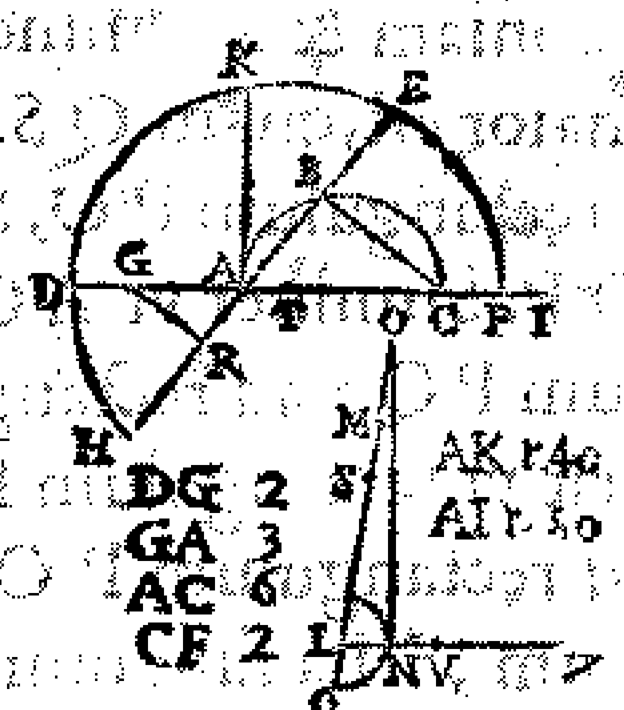
Com-

A

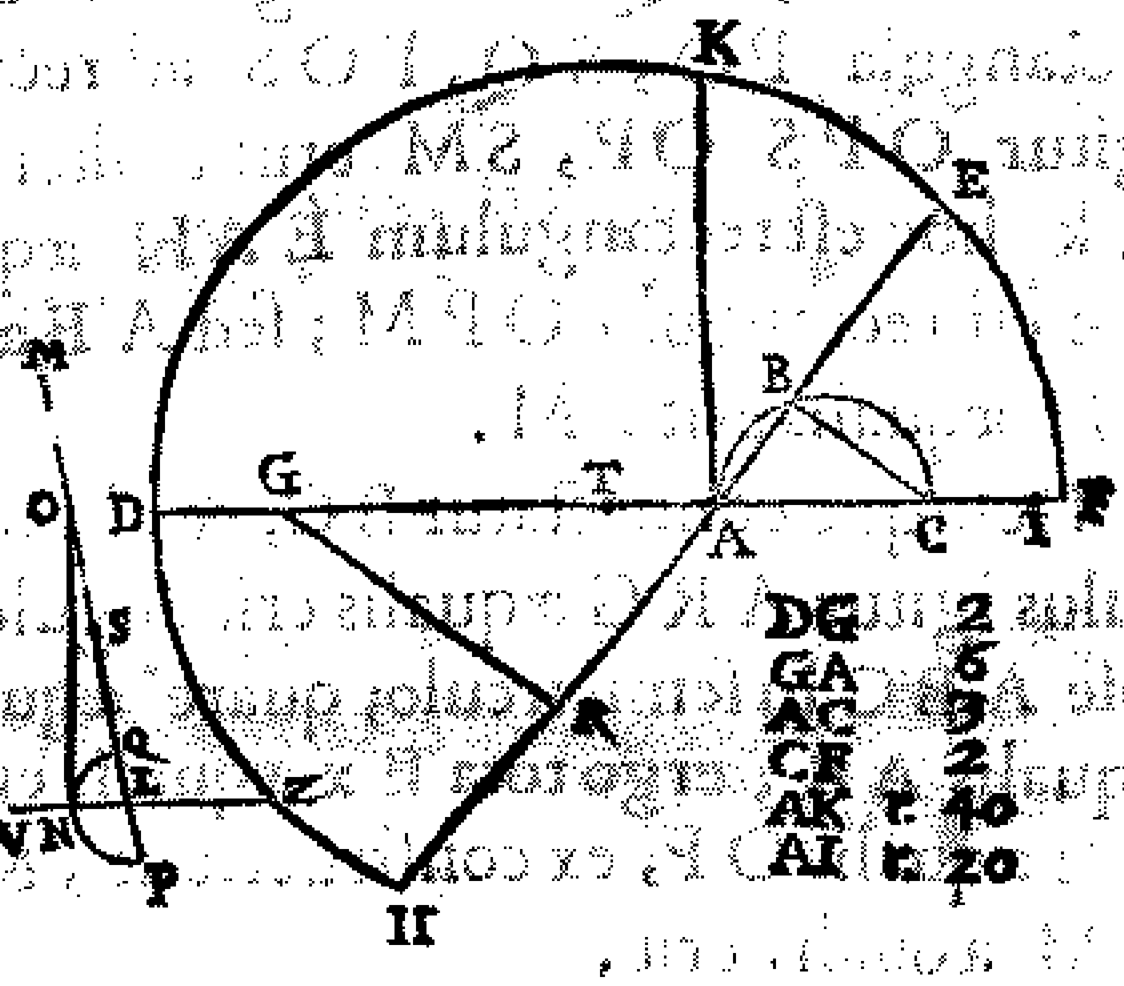
Compositio.

SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A K pertineat. Oportebit autem datam V z non esse minorem, quam F C, nec maiorem A k perpendiculari à puncto A ad circumferentiam D E F ducta. Siquidem V z æqualis sit alteri ipsarum A k, F C. factum iam erit quod proponitur, si vero maior sit quàm F C, minor autem quam A k. Ponatur ex centro circuli D E F, quod sit T recta T G, æqualis T C, & fiat* vt A G ad A C, ita quadratum A K ad aliud quadratum quod sit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita V z ad z L, & V L differentia rectarum V z, z L secetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O æqualis A I, & connectatur O L. quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L. itaque si A G minor sit, quàm A C, rectæ O L, detrahenda est recta æqualis L N, si vero maior, addenda. Sic Porisma fieri iubet. primo igitur ab ipsa V L abscindatur recta L P æqualis L N, secundo vero addatur L P æqualis L N infra demóstrabimus, rectam O P in primo quidē Casu minorem esse, quàm A F, maiorē quam A k: in secundo vero maiorem, quàm A E, minorem quam A k. Itaque poterit à puncto A in circumferentiam K F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, quam semicirculus A B C secet in B, & facta erit constructio, vt Porisma fieri iubet. Nunc ostendenda est E B æqualis datæ V z.

B



Probl. 1 huius



C

Cōpleatur igitur circulus F E D, quem E A producta secet in H, & sumatur P S æqualis V z. ea minor est, quàm P O, cum sit & ipsa V z minor, vt infra demonstrabimus; sed & P Q æqualis est V L, ergo & S Q æqualis erit z L.

D Deinde centro L interuallo L N, vel L P describatur circulus secans rectam O L, etiam continuatam in Q. is circulus tanget rectam O N in N, cum rectus angulus O N L, ex constructione: quare quadratum O N æquale erit rectangulo P O Q, hoc est rectangulis* P O, S Q, P O S. si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas: in Resolutione conuerso modo factum est, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana. At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione, hoc est ad quadratum O N erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K: quadratum igitur A k erit vna pars 1 secundi æqualitatis. alteram vero sic inueniemus. A

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad Z O, seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ sit S M, ea in primo quidem casu minor erit, quàm S O, quoniam & S P minor est, quàm Q S. in secundo verò maior: quoniam & S P maior est, quàm Q S. Et quoniam est vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita
sexti * rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S; sunt enim eiusdem altitudinis
sexti O P. Similiter vt A C ad A G, hoc est vt O S ad S M, * ita est quoq; rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M, cum sint eiusdem altitudinis P O: ideo erit vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, ita rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; sed vt vna antecedentium ad vnam consequen-
quinti tium, * ita sunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. ergo vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, hoc est vt A C ad A G, ita erunt B rectangula P O, S Q, P O S ad rectangula O P S, P O, S M, rectangula igitur O P S O P, S M erunt altera pars æqualitatis. itaque quadratum A k hoc est rectangulum E A H æquale erit rectangulis O P S, O P, S M, hoc est rectangulo O P M; sed A E æqualis est O P ex constructione, ergo & A H æqualis erit P M.

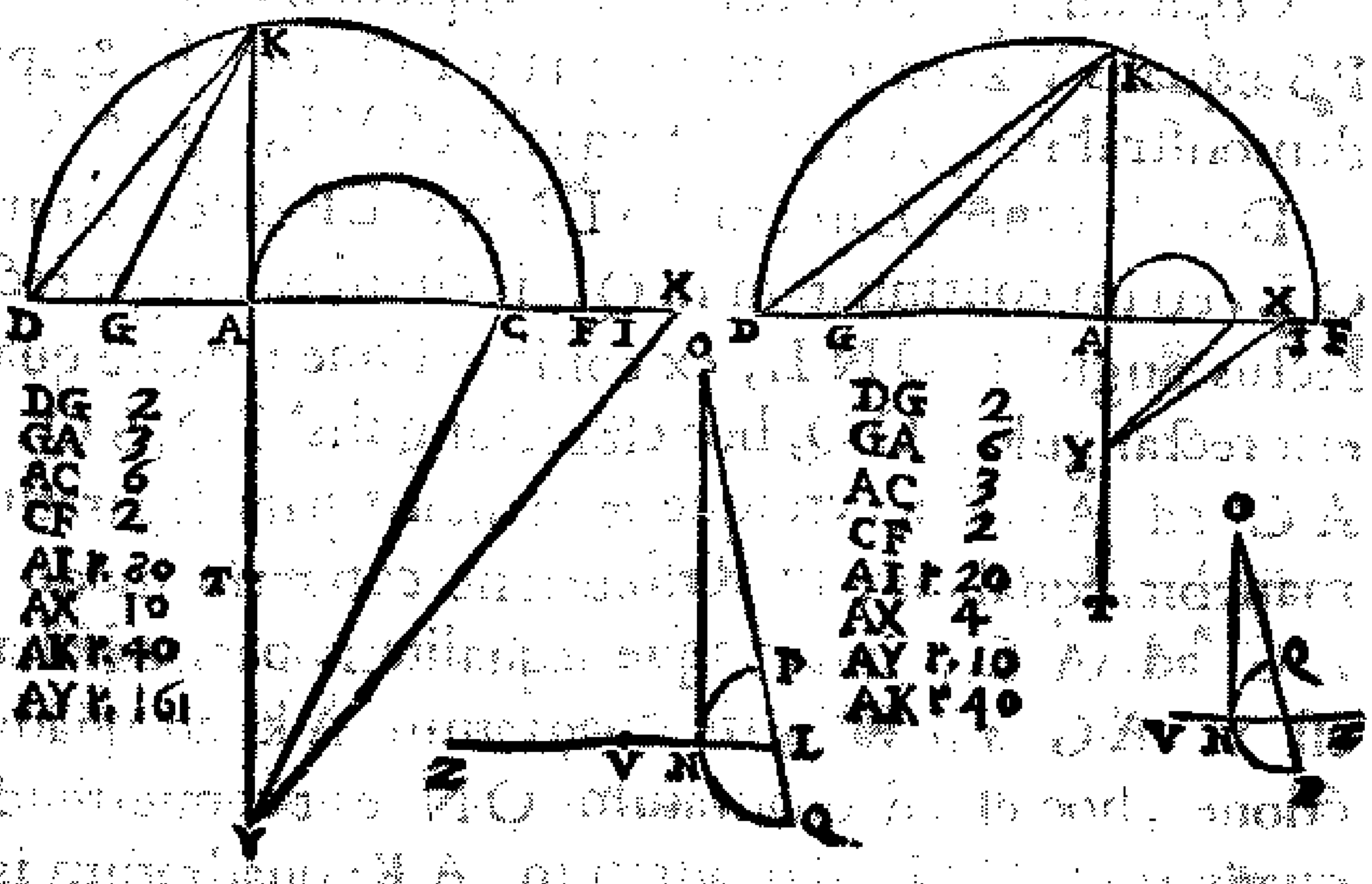
Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A H in R: angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus; cum sit rectus &
Lem. ipse A B C in semicirculo; quare* æquales erunt E B, H R. sumatur autem B X æqualis A R, ergo tota E x æqualis erit toti A H, hoc est ipsi P M: & cum sit A E æqualis O P, ex constructione, & E X æqualis P M, reliqua A x reliquæ O M æqualis erit. C

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B ad A R ob similitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M ex constructione, erit vt A B ad A R, hoc est ad B x, ita O S ad S M: & diuidendo vt A x ad x B, ita O M ad M S: sed prima A X ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo & secunda X B æqualis erit M S quartæ, sed X E ostensa est æqualis P M, ergo & reliqua B E reliquæ P S, hoc est V z datæ, æqualis erit, quod erat ostendendum.

Posita est igitur inter circũferẽtias A B C, D E F recta B E æqualis datæ V Z, eaq. pertinet ad punctũ A, quod faciendũ erat.

At verò rectam O P in primo quidem Casu minorem esse, quam A F, maiorem quam A K. in secundo verò maiorem, quam A F, minorem quam A K; ita ostendemus. D

Connectantur G k, k D quibus parallelæ agantur C Y, Y X



se-

A secantes K A, A C productas in punctis y x: erit igitur vt A G ad A C* ita F C ad C x; sed vt A G ad A C, ita est quoque V Z ad Z L, ex constructione, ergo vt V Z ad Z L ita erit F C ad C X, & in primo Casu erit diuidendo, in secundo vero per conuersionem rationis, vt V Z ad V L, hoc est ad P Q, ita F C ad F X: sed V Z ponitur maior quam FC, ergo & P Q maior erit, quàm F X. Lem. 17

Et quoniam rectangulum F A X æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N, seu * rectangulo P O Q, proportionales * erunt P O, F A, A X, O Q. sed P Q differentia extremarum ostensa est maior, quàm F X, differentia mediarum, ergo * altera extremarum P O, O Q maxima erit, altera minima. In primo quidem Casu sic argumentor. sed P O non est maxima, quia minor est, quam O Q: ergo minima erit, & consequenter minor quàm A F. In B secundo verò casu argumentor hoc modo. Sed P O non est minima, quia maior est, quam O Q, ergo maxima erit, & per consequens maior quam A F. Lem. 17 36 tertii 16 sexti Theor. 2 huius

Deinde sumatur A T æqualis A K. quoniam igitur est, vt A G ad A C* ita K A ad A Y, & ita V Z ad Z L ex constructione; erit vt V z ad z L, ita K A hoc est A T ad A Y, in primo quidem Casu erit diuidendo; in secundo vero per conuersionem rationis. vt V z ad V L, hoc est ad P Q, ita A T ad T y: sed V Z ponitur minor, quàm A T, hoc est, quàm A K. ergo & P Q minor erit quam T y. Lem. 17

Et quoniam rectangulum * y A K, hoc est y A T æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N, vel * rectangulo Q O P: * proportionales erunt y A, Q O, O P, A T, sed y T differentia extremarum ostensa est maior, C quam P Q differentia mediarum, ergo * altera extremarum y A, a T maxima erit, altera minima; sed in primo quidem Casu a T non est maxima, quia minor est quam a y, ergo ipsa a T, hoc est a k, minima erit, & per consequens O P maior, quàm a k. In secundo vero Casu a T non est minima, ea enim maior est, quàm a y: ergo ipsa a T, hoc est a K maxima erit, & per consequens O P minor quam a k. quare constat propositum. Lem. 17 36 tertij 16 sexti Theo. 2 huius

Similiter rectam V z minorem esse, quàm P O ita fit manifestum.

Quoniam enim est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum a I, & ita V z ad z L: vtrumque ex constructione erit, vt V z ad z L, ita quadratum a k ad quadratum a I, hoc est ad quadratum O N, vel ad D rectangulum P O Q: sed vt V Q ad z L, ita est quadratum V z ad rectangulum V z L, eamdem enim habent altitudinem V z, ergo & quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum a k ad rectangulum P O Q: sed quadratum V z minus est quadrato a k, ponitur enim recta V z minor, quam recta a k. ergo & rectangulum V z L minus erit rectangulo P O Q, sunt autem æquales V L, P Q, ergo V z minor erit quam P O, quod erat ostendendum. 36 tertii lem. 16

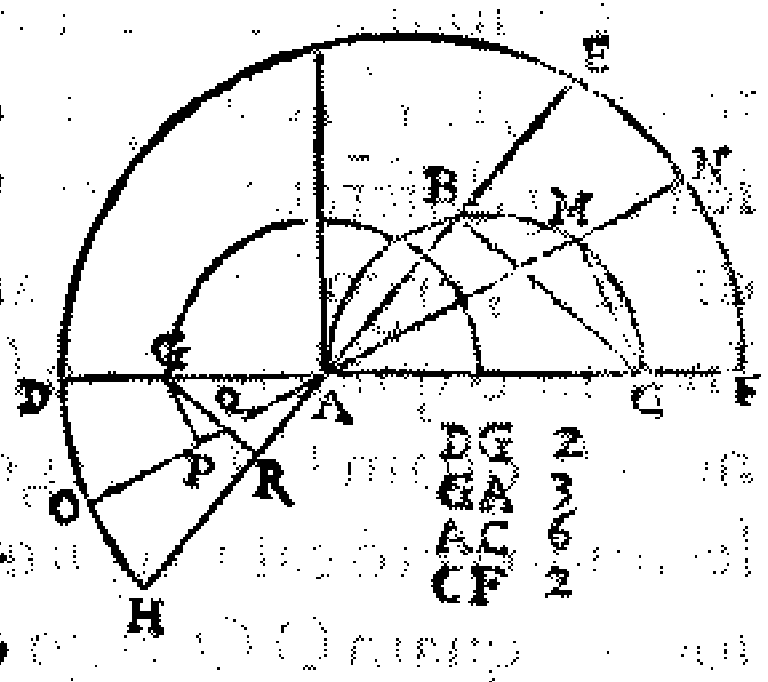
Diximus oportere datam V z non esse maiorem, quàm a k, nec minorem quam F C: quoniam a k maxima est omnium, quæ ad punctum a pertinentes inter circumferentias a B C, K B interijciuntur, F C minima:

Aliarum autem propinquior minima remotiore minor est, quod quidem sic demonstrabitur. A

7 tertij Quoniam enim in primo Casu A k* maior est, quàm A H. ea multo
lem. 2 maior erit, quàm H R, hoc* est quam E B, & sic demonstrabitur omnibus alijs maior.

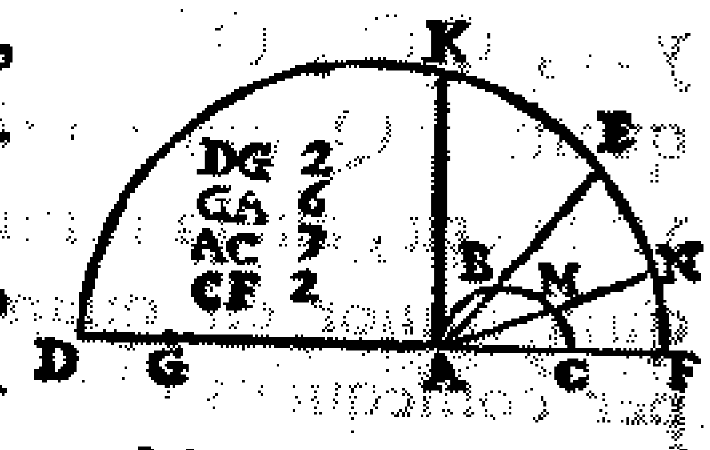
Maxima est igitur omnium A k.

Similiter quoniam A D* minor est, quàm A H, A G autem maior, quam A R reliqua D G minor erit, quàm reliqua H R, hoc est F C minor quam E B, & sic ipsa F C demonstrabitur minor omnibus alijs. Minima est igitur omnium F C.



Rursus ducatur alia recta A M N secans circumferentias A B C, K F in punctis M N, & sit recta M N ipsi C F propinquior, quàm B E, & producta N A secet circulum F E D completum in O, & connectatur M C; cui parallela agatur G P secans rectam A O in P, quam etiam secet G R in Q. erit angulus A P G æqualis angulo A M C; sed rectus est A M C in semicirculo, ergo & A P G rectus erit
lem. 2 quare* æquales erunt M N, P O. Et quoniam A O minor est, quam A H, A Q autem maior, quàm A R; reliqua Q O minor erit, quam reliqua R H. vnde recta P O multo minor, quam ipsa R H, hoc est M N minor quam B E, propinquior videlicet minimæ minor remotiore.

7 tertij In secundo autem Casu A K* maior est, quàm A E, ergo multò maior quam E B. Maxima est igitur omnium A K. C



Et quoniam A F minor est, quam A E, A C vero maior quam A B, reliqua C F minor erit, quam reliqua B E, & sic F C demonstrabitur omnibus alijs minor. Minima est igitur omnium F C.

Denique ducatur alia recta A M N secans circumferentias A B C, k F in punctis M N, ità vt M N ipsi C F sit propinquior, quam B E. Quoniam igitur A N minor est quam A E, A M autem maior quam A B, reliqua M N minor erit, quam reliqua B E. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. quare manifesta est determinatio.

Casus sextus. D

SEd vergant ad diuersas partes dati duo semicirculi, & maior si compleatur includat minorem, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculis minoris, à quo quidem angulo semicirculus maior plus distet, quàm à reliquo.

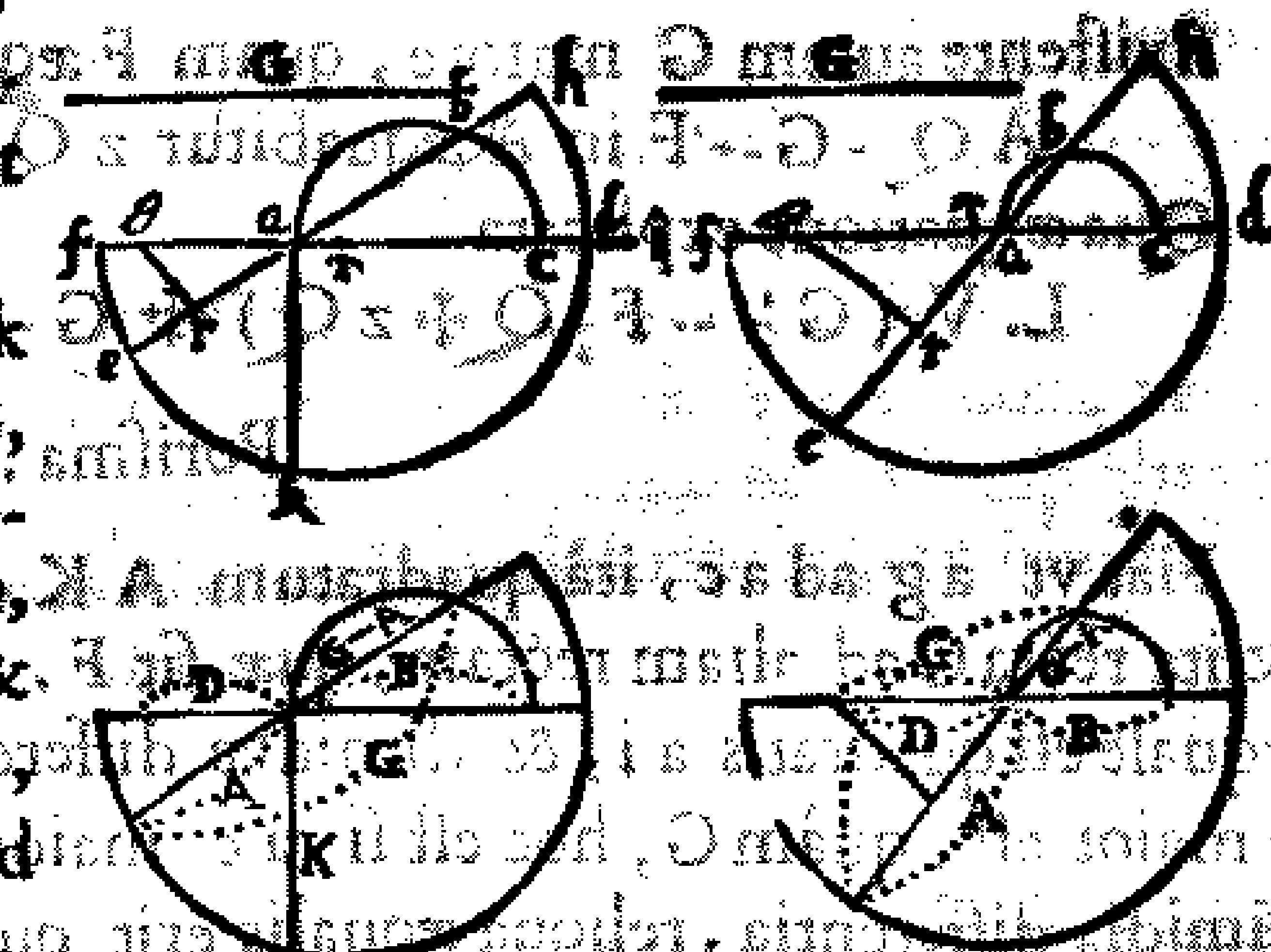
Sint itaque tales dati duo semicirculi a b c, d e f: data autem recta linea G, à puncto autem a demittatur a k ad rectos angulos ipsi a c, vsque ad circumferentiam d e f in k. Oportet inter circumferentias a b c, K f ponere rectam lineam æqualem ipsi G; ita vt ad punctum pertineat.

Re-

A

Resolutio.

Posita iam sit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertineat, & ponatur ex centro circuli d e f, quod sit t. recta t g æqualis t c, & compleatur circulus f e, d h secans e b productam in h, ipsique e h ducatur perpendicularis g r, & connectatur b c; ea quoque ipsi e h perpendicularis erit, cum sit rectus angulus a b c in semicirculo: quare *æquales erunt h r, e b. lem.



B Datarum autem a c, a g, b e, a k prima sit B, secunda D, tertia G, quarta k, vt in figuris ad resolutionem pertinentibus. & quæratur a e, esto illa A, ergo a b erit G -- A, & cum sint similia triangula a b c, a r g, erit vt a c ad a g, ita a b ad a r. hoc est in figuris Resolutionis, vt B ad D, ita G -- A ad $\frac{\text{D in G -- D in A}}{\text{B}}$. atque adeo a r erit $\frac{\text{B in G -- D in A}}{\text{B}}$. si auferatur a b, r h æquali ipsi e b, reliqua a h erit G -- $\frac{\text{D in G -- D in A}}{\text{B}}$. Et quoniam rectangulum e a h

C æquale est quadrato a k, ideo

G in A -- $\frac{\text{D in G in A -- D in A Q}}{\text{B}}$ æquabitur K Q

Ducantur omnia in B vt fractio euanescat ergo

B in G in A -- D in G in A + D in A Q æquabitur k Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt potestas æquationis ex se subsistat, ergo

A Q -- G in A -- $\frac{\text{B in G in A}}{\text{D}}$ æquabitur $\frac{\text{K Q in B}}{\text{D}}$

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus precedentium casuum factum, hoc est, fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum, quod sit z Q, eritque z Q idem quod $\frac{\text{K Q in B}}{\text{D}}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, eritque F

D eadem quæ $\frac{\text{B in G}}{\text{D}}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{\text{B in G in A}}{\text{D}}$. facta igitur transmutatione

A Q -- G in A + F in A æquabitur z Q.

In hac quoque æquatione quemadmodum in æquatione præcedentis Casus G interdum minor est, quam F, interdum maior, interdum æqualis, prout D minor est quam B, vel maior, vel æqualis, est enim vt D ad B, ita G ad F. D autem minor est, quam B, cum centrum circuli d e f includentis existit inter puncta a c, maior vero cum existit extra, æqualis autem, cum existit in ipso à puncto. Itaque cum G minor est, quam F; quadratum in æquatione afficitur affirmate cum

 maior

maior afficitur negate, cum æqualis, nulla est affectio, sed quadratum purum manet, nam cum id quod est affirmatum æquale sit ei quod est negatum, quod affirmatio addit, idem negatio minuit. Existente igitur G minore, quam F, æquatio erit huiusmodi, A

$$A\,Q + F - G \text{ in } A \text{ æquabitur } z\,Q$$

Qua æquatione explicata,

$$L.\,V.\,(F\tfrac{1}{2} - G\tfrac{1}{2}\,Q + z\,Q) - (F\tfrac{1}{2} - G\tfrac{1}{2}) \text{ æquabitur } A$$

Existente autem G maiore, quam F æquatio erit huiusmodi

$$A\,Q - G - F \text{ in } A \text{ æquabitur } z\,Q$$

Qua æquatione explicata

$$L.\,V.\,(G\tfrac{1}{2} - F\tfrac{1}{2}\,Q + z\,Q) + G - F \text{ æquabitur } A.$$ B

Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum A K ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. Deinde rectæ cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ differentiæ, qua F superat G si quidem F maior est, quàm G, hoc est si a c maior est, quàm a g: demater ipsa dimidia differentia, reliqua æqualis erit quæsitæ a e. Si vero F minor est quam G, hoc est si a c minor est quàm a g; addatur dimidia differentia, qua G superat F, & ita composita æqualis erit a e quæsitæ.

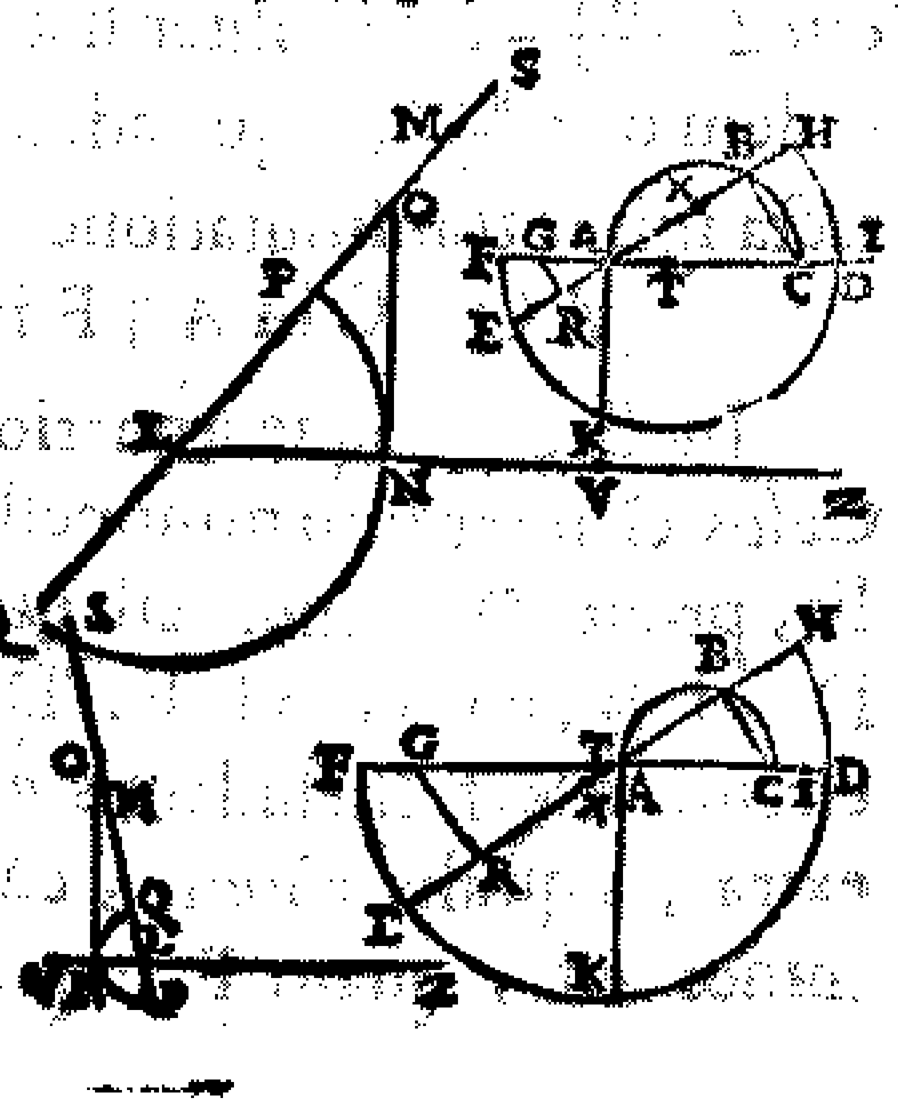
Porisma hoc idem est, quod Porisma Resolutionis antecedentis Casus, sed tamen non sunt eadem vtriusque Resolutionis vestigia, idcirco constructio, quæ sequitur, eadem prorsus erit, quæ in antecedenti Casu, demonstratio autem paulum diuersa. C

Compositio.

Sint dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertineat. Oportebit autem datam V Z non esse maiorem, quam F C, nec minorem A k perpendiculari ducta à puncto A ad circumferentiam D E F.

Si quidem V Z æqualia sit alteri ipsarum A K F C factum iam erit, quod proponitur: si verò minor sit, quàm F C, maior autem, quàm A k, ponatur ex centro circuli D E F quod sit T, recta T G, æqualis T C, & *fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum quod sit A I. D

*Probl. 1. huius



Similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L differentia rectarum V Z, z L secetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O æqualis A I, & connecta-

tur

A tur O L. quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L; itaque si A G minor est, quam A C rectæ O L detrahenda est recta æqualis L N, si vero maior addenda. sic Porisma fieri iubet. ab ipsa igitur O L in primo casu abscindatur recta L P æqualis L N, in secundo vero producatur O L in P, vt sit L P æqualis L N. infra autem ostendemus rectam O P in primo quidem casu maiorem esse, quam A F, minorem quam A K. in secundo vero minorem, quam A F, maiorem quam A k. itaque poterit à puncto in circumferentiam k F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, quam producta secet semicirculus A B C in B. facta est igitur constructio quemadmodum Porisma fieri iubet. Nunc ostendendum est E B æqualem esse datæ V z.

B Complectatur circulus E F D secans A B productam in H, & sumatur P S æqualis V z. ea maior erit quam P O, cum sit & ipsa V z maior, vt infra demonstrabimus, sed & P Q æqualis est V L, ergo & S Q æqualis erit z L. deinde centro L, internallo L N, vel L P describatur circulus secans rectam O L etiam continuatam in Q: is circulus tanget rectam O N in N, cum sit rectus angulus O N L, ex constructione. itaque quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, hoc est rectangulo P O, S Q, minus rectangulo P O S. Si igitur fiat, vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alia plana; itidem manebit æqualitas. in resolutione conuerso modo factum est, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana. At quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione, hoc est ad quadratum O N: erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K. quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, nunc verò inueniemus alteram.

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L z ad z V, seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ sit S M. ea in primo quidem Casu minor erit quam S O, quoniam & S P minor est, quam Q S. in secundo vero maior quoniam & S P maior est, quam Q S. Et quoniam est vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, sunt enim eiusdem altitudinis O P. Similiter vt A C ad A G, hoc est vt O S ad S M, ita est quoque rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M cum sint eiusdem altitudinis P O, ideo erit vt rectangulum P O, S Q ad rectan-

D gulum O P S, ita rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; nempe vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, ergo * vt totum ad totum, ita erit & reliquum ad reliquum, id est vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, hoc est vt A C ad A G, ita rectangulum P O, S Q, minus rectangulo P O S ad rectangulum O P S, minus rectangulo P O, S M. rectangulum igitur O P S, minus rectangulo O P, S M erit altera pars æqualitatis, itaque quadratum A k, hoc est rectangulum E A H, æquale erit rectangulo O P S, minus rectangulo O P S M, hoc est æquale erit rectangulo O P M. sed A E æqualis est O P, ex constructione, ergo & A H æqualis erit P M.

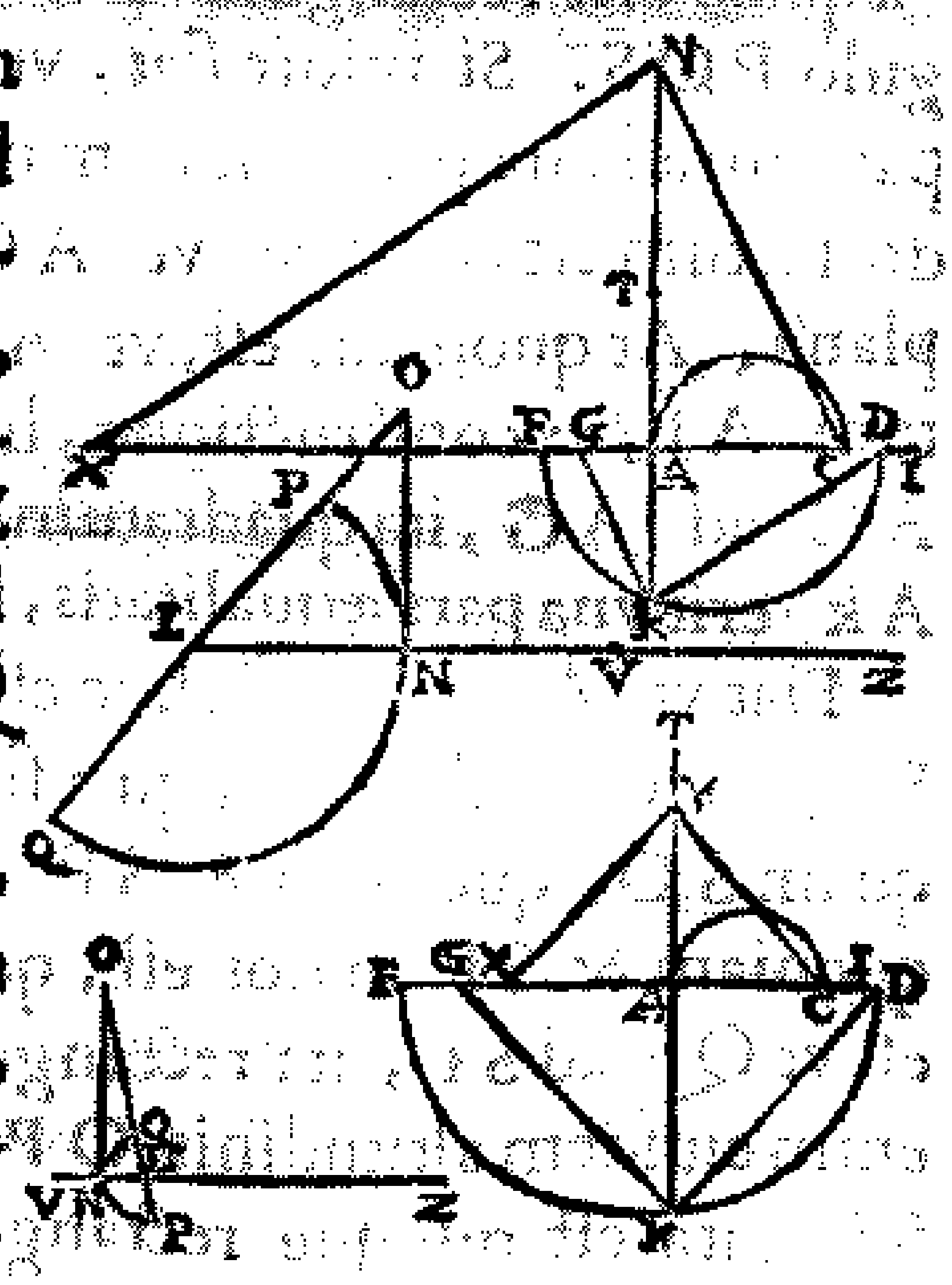
De-

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A in E R A
angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus cum sit re-
Lem. 2 ctus, & ipse A B C in semicirculo quare * æquales erunt E B, H R, abscinda-
tur autem B x æqualis A R, reliqua X E æqualis erit reliquæ A H, hoc est
ipsi P M; sed & A E æqualis est V P ex constructione, ergo & reliqua A x
reliquæ O M æqualis erit.

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B, ad A R ob similitudinem trian-
gulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex constructione, erit vt A B
ad A R, hoc est ad B X, ita O S ad S M. & diuidendo vt A X ad X B, ita
O M ad M S; sed prima A X ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo, & se-
cundæ X B æqualis erit M S quartæ, sed & X E ostensa est æqualis P M,
ergo tota B E toti P S, hoc est V Z datæ æqualis erit, quod erat ostenden-
dum. Posita est igitur inter circumferentias A B C, D E F recta B E æqua- B
lis datæ V Z eaque pertinet ad punctum A quod erat faciendum.

At vero O P in primo quidem Casu maiorem esse, quam A F minorem
quam A K; in secundo vero minorem, quàm A F, maiorem quam A K;
ita fit manifestum.

Connectatur Gk, k D quibus parallelæ agan-
tur c y, y x secantes K A, C A productas in
punctis y x. Quoniam igitur est, vt A G ad
Lem. 17 A C, * ita F C ad c x, & ita V Z ad Z L, ex con-
structione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x,
& in primo quidem Casu erit diuidendo, in se- C
cundo vero per conuersionem rationis, vt V Z
ad V L, hoc est ad P Q, ita F c ad F X; sed
V Z ponitur minor, quàm F c. ergo & P Q
minor erit, quàm F x.



Lem. 17 Et quoniam rectangulum F A x * æquale
est quadrato A I hoc est quadrato O N, seu
Theor. ii huius rectangulo P O Q * proportionales erunt P O,
F A, A X, O Q: sed P Q differentia extrema-
rum ostensa est minor, quam F X, differen-
Lem. 17. tia mediarum, ergo * altera mediarum F A, A x maxima erit altera mini-
ma. in primo quidem Casu sic argumentor, sed F A non est maxima; mi- D
nor enim est, quàm A x, ergo minima erit, & per consequens O P maior
quam A F. In secundo vero Casu argumentor in hunc modum sed F A
non est minima, maior enim est quam A X, ergo maxima erit, & per con-
sequens O P minor quàm A F.

Deinde sumatur A T æqualis A k. Quoniam igitur est vt A G ad A C *
ita K A ad A y, & ita V Z ad Z L ex constructione, erit vt V z ad z L; ita
K A hoc est A T ad A y, in primo quidem Casu erit diuidendo, in secundo
vero per conuersionem rationis, vt V z ad V L, hoc est ad P Q, ita A T ad
T y, sed V z ponitur maior, quàm A T, hoc est quam A K, ergo & P Q
maior

A maior erit quam T y.

Et quoniam rectangulum y A K, hoc est y A T * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N vel * rectangulo Q O P; * proportionales erunt Q O, y A, A T, O P; sed Q P differentia extremarum ostensa est maior quàm y T differentia mediarum, ergo * altera extremarum maxima erit, altera minima. in primo quidem Casu sic argumentor, sed O P non est maxima, quia minor est quam O Q, ergo minima erit, & per consequens minor quam A T, hoc est, quam A Q. in secundo vero Casu hoc modo, sed O P non est minima, quia maior est quam O Q, ergo maxima erit, & per consequens maior quam A T, hoc est quam A k. quare constat propositum. Lem. 17 / 36 tertii / 16 sexti

Similiter rectam V Z maiorem esse, quam P O, sic demonstrabimus.

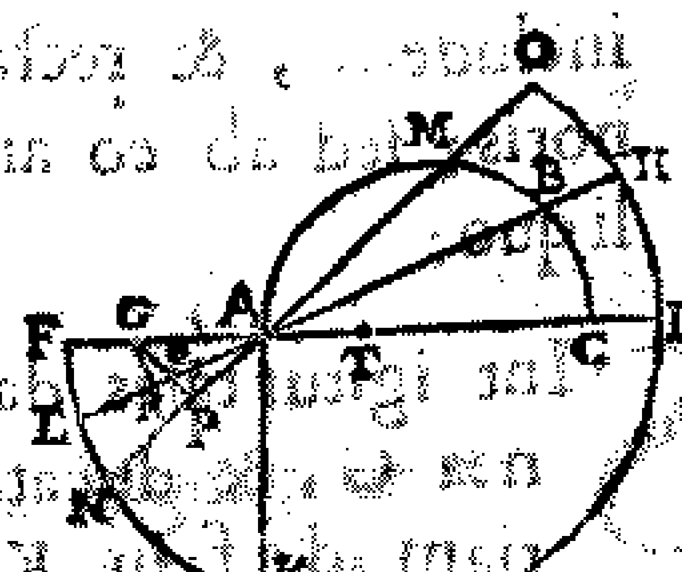
B Quoniam enim est, vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, & ita V Z ad Z L, vtrumque ex constructione erit, vt V Z ad z L, ita quadratum A K ad quadratum A I, hoc est ad quadratum * O N, seu ad * rectangulum P O Q; sed vt V z ad z L, * ita est quadratum V z ad rectangulum V z L, eamdem enim habent altitudinem V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum A k, ad rectangulum P O Q, sed quadratum V z maius est quadrato A k, ponitur enim recta V z maior, quàm A k; ergo & rectangulum V z L maius erit rectangulo P O Q; sed sunt æquales V L, P Q, ergo V z * maior erit, quàm P O. quod erat ostendendum. 36 tertij / 1 sexti / Lem. 16.

Diximus oportere datam V Z non esse minorem, quàm A k, nec maiorem quam F C. ipsa enim A K minima est omnium quæ ad punctum

C A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur idque ita fit manifestum.

Quoniam enim in primo Casu A K * minor, est quam A H, ea multo minor erit, quam H R, hoc est quam E B, & sic demonstrabitur omnibus alijs minor. Minima est igitur A K.

Similiter quoniam A D maior est quam A H, & A G maior quam A R, erit tota D G maior quam tota H R, hoc est F C maior, quam E B, & sic ipsa F C demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur F C.



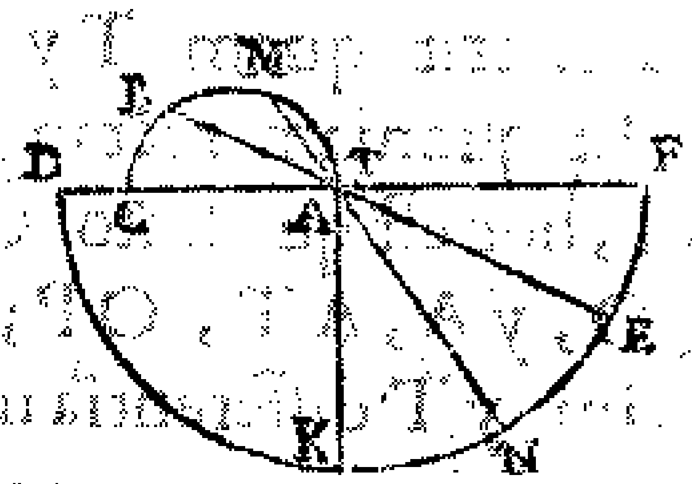
Ducatur autem alia recta N A M ipsi A k propinquior, quam E B, & producatur donec secet circulum F E D completum in O, & connectatur M C,

D cui parallela agatur G P secans A N in P, rectam vero A E in Q: erit angulus A P G æqualis angulo A M C, & ideo rectus, cum sit rectus & A M C in semicirculo, quare * æquales erunt N M O P. Et quoniam A Q * minor est, quàm A H, & A P minor quam A Q, & multo minor, quàm A R; tota O P minor erit, quam tota H R hoc est N M minor, quam E B; propinquior igitur minimæ minor est remotiore. Lem. 1.

In secundo autem Casu A K minor est, quàm A E; ergo multo minor

quam

quam E B, atque ratione ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur A k. A



Æquè quoniam A F maior est quam A E, & A C maior quam A B, tota F C maior erit quam tota E B, & sic demonstrabitur ipsa F C maior omnibus alijs. Maxima est igitur F C.

Sed ducatur per A alia recta N A M ipsi A K propinquior, quàm E B; erit A N minor, quàm A E; sed & A M minor est quam A B, ergo tota N M minor erit, quàm tota E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore, quare manifesta est Determinatio.

Lemma XVIII. B

Si recta linea bifariam secetur, & in ea sumantur duo puncta vtcumque. Punctum quod efficit rectangulum maius propinquius est sectioni eo puncto, quod minus rectangulum efficit.

SEcetur recta A B bifariam in C, & in ea sumantur vtcumque duo puncta D E, sitque rectangulum A D B maius rectangulo A E B. Dico punctum D sectioni C propinquius esse, quàm punctum E. Quoniam enim rectangulum A D B vna cum quadrato D C * æquale est quadrato A C. Similiter &

5 secundi rectangulum A E B vna cum quadrato E C * æquale eidem quadrato A C, ideo rectangulum A D B

C vna cum quadrato D C, æquale erit rectangulo A E B vna cum quadrato E C; sed rectangulum A D B ponitur maius rectangulo A E B, ergo reliquum quadratum D C minus erit reliquo quadrato E C. vnde & recta D C minor, quàm recta E C. Itaque punctum D sectioni C propinquius erit, quam punctum E, quod erat ostendendum.

Casus VII.

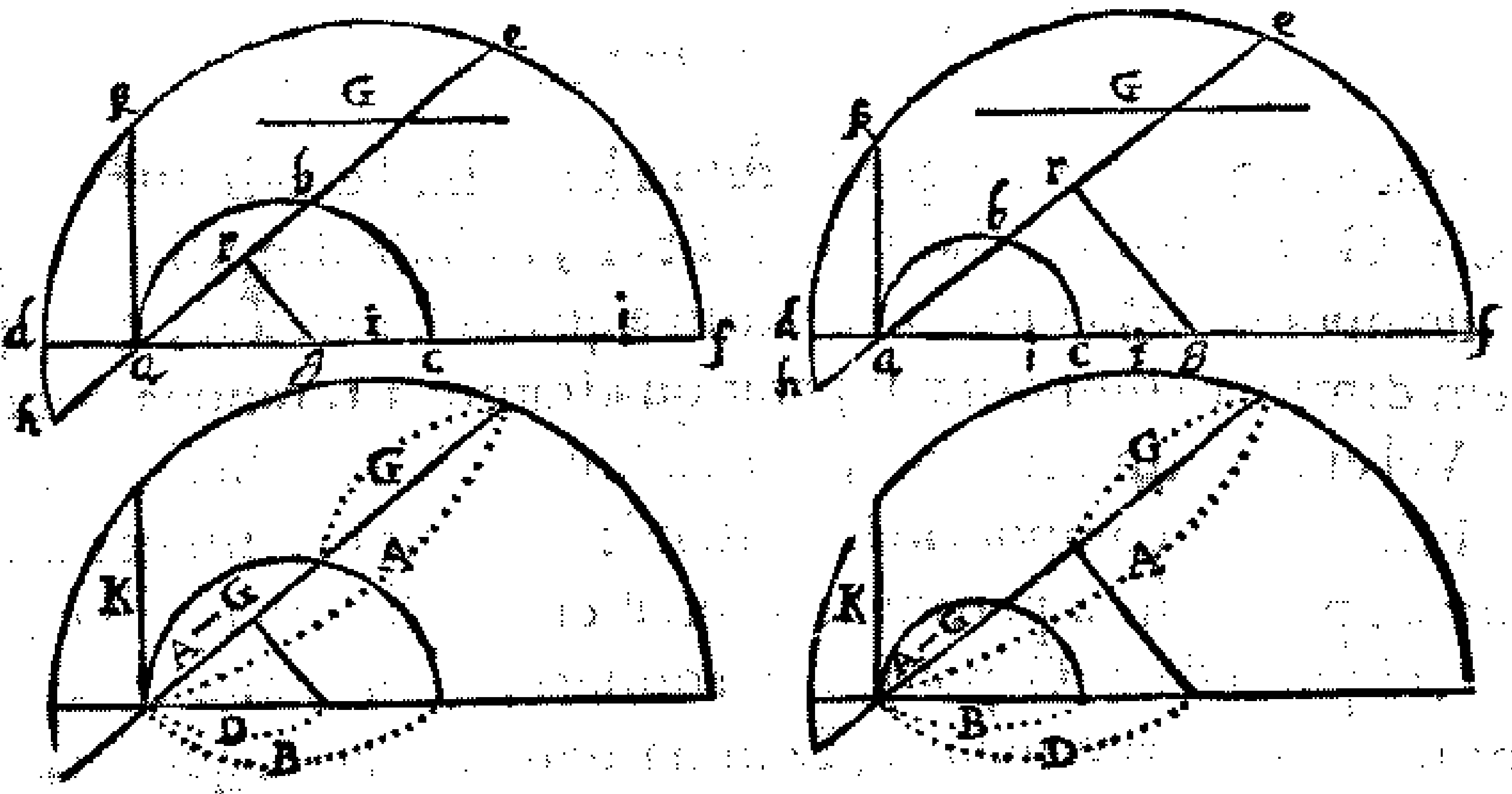
Denuo vergant ad eandem partem dati duo semicirculi maior minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi minoris; sed ab eo angulo semicirculus maior minus distet, quàm à reliquo. D

SInt igitur tales dati duo semicirculi a b c d e f, data autem recta linea G, & ducatur a k perpendicularis ad d f secans circumferentiam d e f in K. Oportet inter circumferentias a b c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertingat.

Resolutio.

SIt iam posita recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertingat, & ex centro circuli d e f, quod sit t ponatur t g æqualis t c,

& com-



A & cópleatur circulus fe, dh, quem ea producta secet in h, & ipsi eh ducatur perpendicularis gr, & connectatur bc. ea quoque ipsi eh perpédicularis, erit cum sit rectus

B angulus abc in semicirculo; vnde* æquales erunt hr, eb. Lem. 2

Datarum autem ac, ag, be, ak. prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus, & quæratur ae. esto illa A, ergo ab erit A -- G, & cum sint similia triangula abc, arg, anguli enim abc, arg sunt æquales, quia recti, & angulus à communis vtrique erit vt ac ad ag, ità ab ad ar; quod in figuris ad Resolutionem pertinentibus respondet vt B ad D, ita A -- G ad $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$, itaque ar erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$. sed hæc detrahatur ipsi rh, cui æqualis est eb reliqua ah erit G -- $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$; sed rectangulum eah* æquale est quadrato ak, ergo 35 tertii

$$G \text{ in } A - \frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B} \text{ æquabitur } KQ$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

C $$B \text{ in } G \text{ in } A + D \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } AQ \text{ æquabitur } kQ \text{ in } B.$$

Deinde applicentur omnia ad D, vt potestas æquationis ex se subsistat, ergo

$$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} + G \text{ in } A - AQ \text{ æquabitur } \frac{kQ \text{ in } B}{D}$$

Sed vt æquatio facilius explicetur. transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est, hoc est fiat vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum, quod sit ZQ. erit ZQ idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam rectam, quæ sit F, eritque F eadem, quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, & planum F in A idem quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur transmutatione.

$$F \text{ in } A + G \text{ in } A - AQ \text{ æquabitur } ZQ$$

D vel $F + G \text{ in } A - AQ$ æquabitur ZQ

Et explicata Æquatione $F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2} - L.V.(F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2}Q - ZQ)$ æquabitur A

Vel $F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2} + L.V.(F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2}Q - ZQ)$ æquabitur A.

In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum non semper vterque indicat ae quæsitam, sed alter tantum, interdum maior, interdum minor: quo autem Casu terminis maior indicet ipsam quæsitam, quare terminus minor, quoque etiam vterque, suo loco dicetur.

Po.

Porisma. A

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F, deinde dimidiæ compositæ ex G, & F dempta recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ compositæ superat quadratum a i, reliqua erit terminus minor.

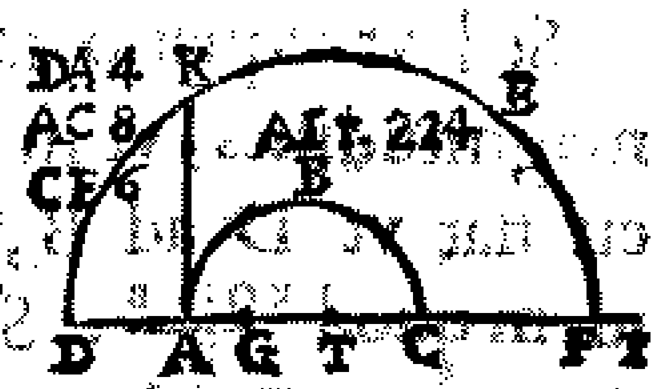
Vel eidem dimidiæ compositæ addita eadem recta fiet terminus maior.

Prius quam compositio fiat ostendendę sunt maxima, & minima rectarum, quæ ad punctum a pertinentes inter circumferentias a b c, K f intercipiuntur, idque vt data G possit determinari, ne sit maior maximà, neve minor minimà; sed prius sequens Lemma demonstrabo, quo facilius, ac clarius ea, quæ sequentur demonstrentur. B

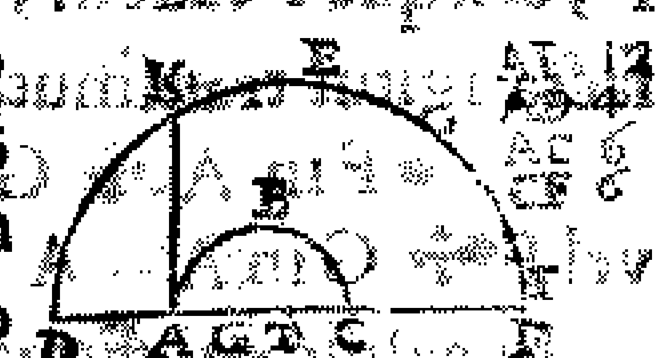
Lemma XIX.

Sint duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur, & recta A K perpendicularis ad A F secet semicirculum D E F in K, & ex centro circuli D E F, quod sit T sumatur T G æqualis T C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I. Dico si ratio A D ad A F maior sit ratione A G ad A C, & rectam A I maiorem esse, quam A F, & si æqualis, æqualem, & si minor, minorem.

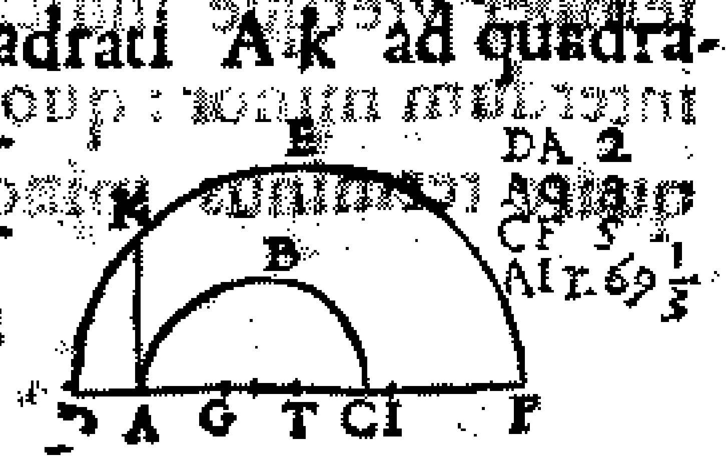
Sit primum ratio A D ad A F maior, quam A G ad A C, ergo ea ratio erit quoque maior ratione quadrati A k ad quadratum A I. est enim vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I, sed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A K, A F ad tertiam, ità est quadratum secundæ A K ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A F maior erit, ratione quadrati A k ad quadratum A I; quare quadratum A I maius erit quadrato A k; itaque & recta A I maior quam recta A F quod est primum. C



Deinde sit ratio A D ad A F eadem quæ A G ad A C, ergo eadem erit quæ quadrati A K ad quadratum A I; sed vt A D ad A F, ità est quadratum A k ad quadratum A F, vt demonstrauimus, ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, vnde & recta A I æqualis rectæ A F. quod est secundum. D



Denique sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, ergo minor erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I, sed vt A D ad A F ita est quadratum A K ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A k ad quadratum A F minor erit ratione quadrati A K ad quadratum A I, quare quadratum A I minus erit quadrato A F. vnde & recta A I minor, quàm recta AF. quod vltimo loco erat ostendendum.

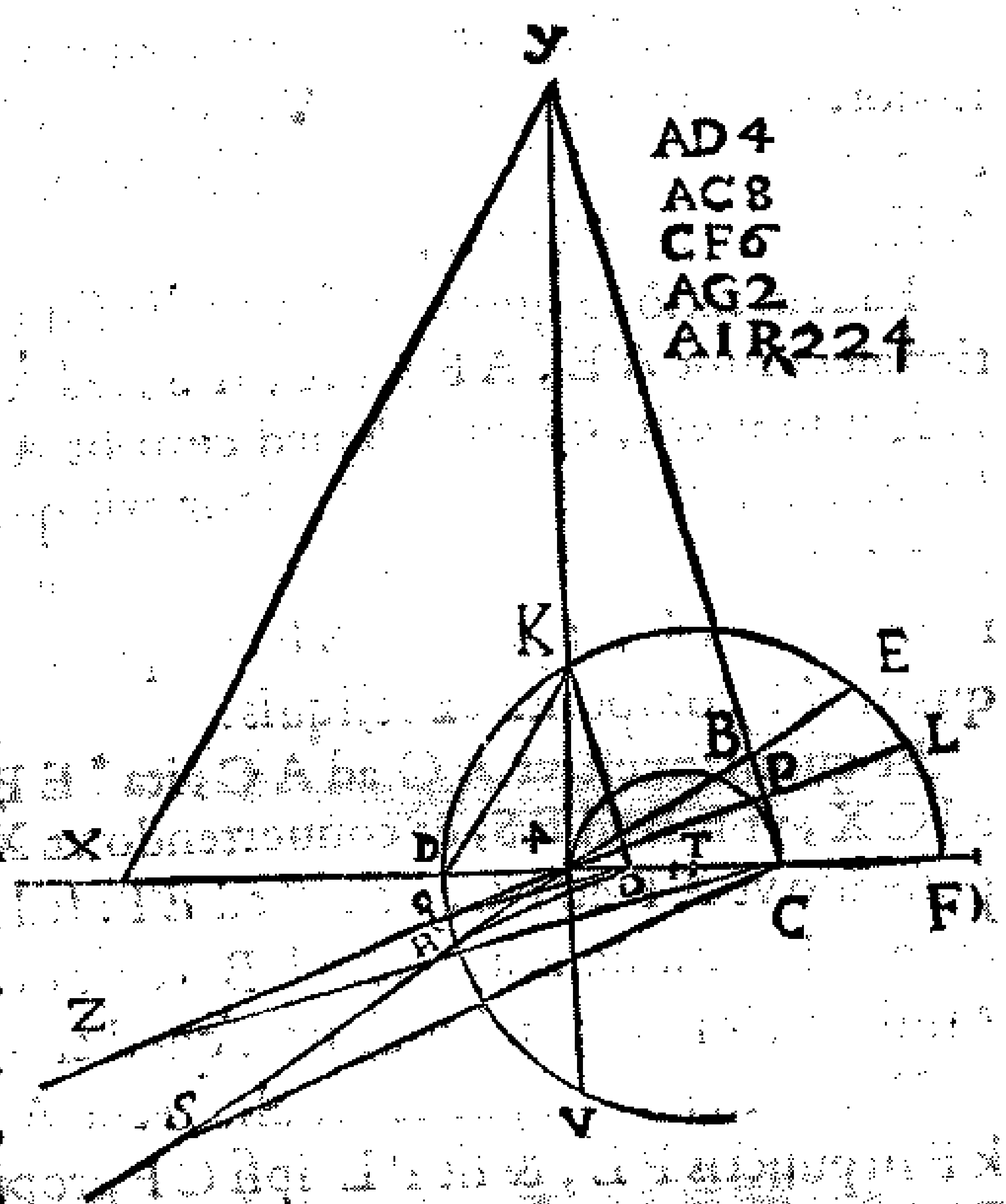


Lem-

A

Lemma XX.

Iisdem positis. sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico a k maximam esse omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, k F interijciuntur: minimam vero F C; aliarum autẽ propinquiorem minimæ minorem esse remotiore.



DVcatur enim à puncto A vtcumq; recta linea a B E secans circumferentias a B C, K F in punctis B E, & compleatur

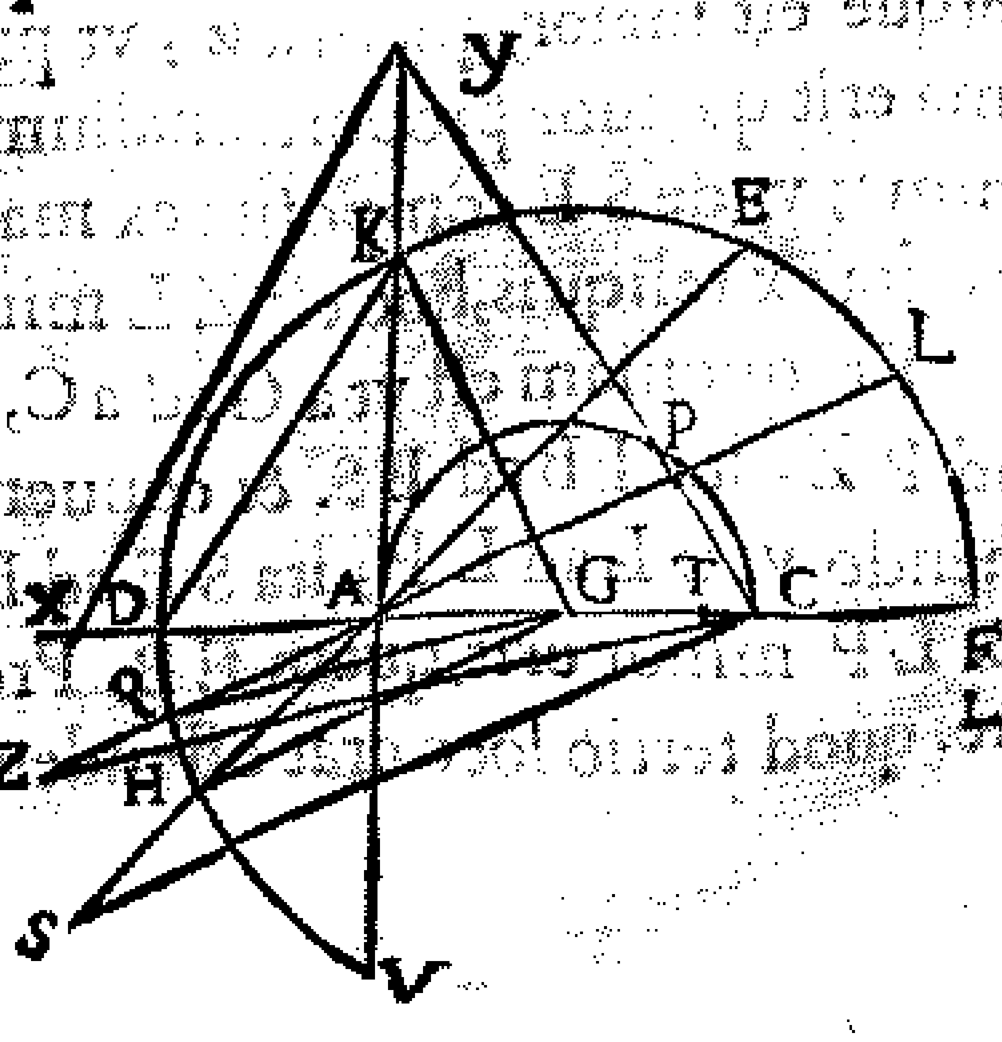
B circulus F E D H, quem E a, K a continuatæ secent in punctis H V, & connectantur G k, k D, G H, eisque parallelæ agantur c y, y x, c s secantes a k, a D, a H continuatas in punctis y x s.

Quoniam igitur rectangulum F a x * æquale est quadrato a I, proportionales erunt a F, a I, a x: sed a I ex antecedente Lemmate non est minor, quàm a F, Lem. 17 17 sexti

C eo quod ratio a D ad a F ponitur non minor ratione a G ad A C, ergo neque a x minor erit, quam a I, nec ideo minor quam a F.

Et quoniam rectangulum F a x* æquale est rectangulo y a k, erit * vt a k, coroll. lem. 17 16 sexti hoc est a V ad a F, ita a x ad a y: sed a V minor est, quàm a F, ergo & a x minor erit, quàm a y: sed ipsa a x ostensa est non minor, quàm a F. ergo & a F, minor erit, quam a y. itaque quatuor proportionalium a V, a F, a x, a y maxima erit a y. minima vero a V. vnde y V composita ex maxima, & minima maior, quàm F x, composita ex reliquis.

D Et quoniam est vt a G ad a C, ita a k ad a y, & ita* F C ad C x, erit vt a K ad a y, ita F C ad C x, & conuertendo, vt y a ad a K, hoc est ad a V, ita x C ad c F, & componendo, vt y V ad V a, ita x F ad F C, sed y V prima ostensa est maior, quàm x F tertia, ergo & secunda a V, hoc est a k, maior erit quam F C quarta, lem. 19



corol. lem. 17. 16 sexti Similiter quoniam * æqualia sunt rectangula y A K, E A S. erit vt * A K, hoc est A V ad A E, ita A S ad A y: sed A V minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit, quàm A y. est autem & A E minor, quàm A y, cum sit & A F minor, vt demonstrauimus: ergo quatuor proportionalium A V, A E, 25 quinti A S, A Y maxima erit A y. minima vero A V; vnde y V * composita ex ma- lem. 17 xima, & minima maior erit, quam S E composita ex reliquis. A

Et quoniam est, vt A G ad A C, ita * E B ad B S, & * ita A K ad A y erit vt A K ad A y, ita E B ad B S, & conuertendo vt y A ad A k, hoc est ad A V, ita S B ad B E. & componendo y V ad A V, ita S E ad E B; sed y V ostensa est maior, quàm S E, ergo & A V, hoc est A K, maior erit quam E B, eadem ratione ostendetur ipsa A k omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium A K. quod est primum. B

corol. Lem. 17 Eadem ratione quoniam * æqualia sunt rectangula F A X, E A S, proportionales erunt A E, A F, A X, A S; sed A E minor est, quàm A F, ergo & A X minor erit, quam A S: sed cum sit A X non minor, quàm A F, vt demõstrauimus. ergo & ipsa A F minor erit, quàm A S, & A E multo minor. Sic igitur A S maxima erit quatuor proportionalium A E, A F, A X, A S: minima vero A E, atque adeo S E composita ex maxima, & minima maior erit, quam X F composita ex reliquis.

lem. 17 Et quoniam est vt A G ad A C, ita * E B ad B S, & ita F C ad C X. erit F C ad C X, vt E B ad B S, & conuertendo vt X C ad C F, ita S B ad B E. & componendo vt X F ad F C, ita S E ad E B: sed X F ostensa est minor, quam S E, ergo & F C minor erit, quàm E B. & sic demõstrabitur omnibus alijs minor. C Minima est igitur omnium F C. quod est secundum.

Ducatur autem à puncto A alia recta A P L secans circumferentias A B C, k F in punctis P L, & sit P L ipsi C F propinquior quam B E, & producatur L A secans circulum F E D completum in Q, & connectatur G Q, & ei parallela ducatur C Z occurrens L Q continuatæ in Z; rectangula igitur L A z corol. lem. 17. E A S * æqualia erunt. idcirco * proportionales A L, a E, a S, a z: sed a L ma- 16 sexti ior est, quàm a E, ergo & a S maior erit quam a z. Et quoniam rectangulum lem. 17 E A S * æquale est quadrato a I, proportionales erunt a E, a I, a s, sed a E minor est, quàm a I, cum ipsa a I non sit minor quam a F, ergo & a I minor erit quam a S. atque adeò ipsa a S maior erit, quàm a L, & multo maior quam a E. atque est maior, quam a z, vt proximè demonstrauimus, ergo ipsa a S maxi- Theor. 1 huius ma erit quatuor proportionalium a L, a E, a S, a Z, & * consequenter a E mi- D nima; vnde S E composita ex maxima, & minima maior erit, quam Z L composita ex reliquis, hoc est Z L minor quam S E.

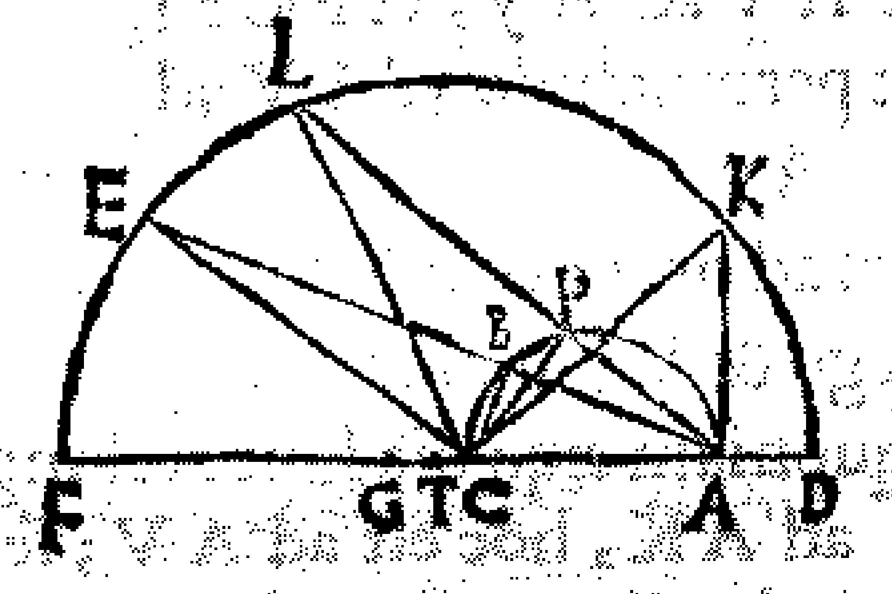
lem. 17 Et quoniam est vt a G ad a C, * ita E B ad B S. & ita L P ad P Z, erit vt L P ad P Z, ita E B ad B S. & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad B E. & componendo vt z L ad L P, ita S E ad E B; sed z L ostensa est minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quam E B. Propinquior igitur minime minor est remotiore. quod tertio loco erat ostendendum.

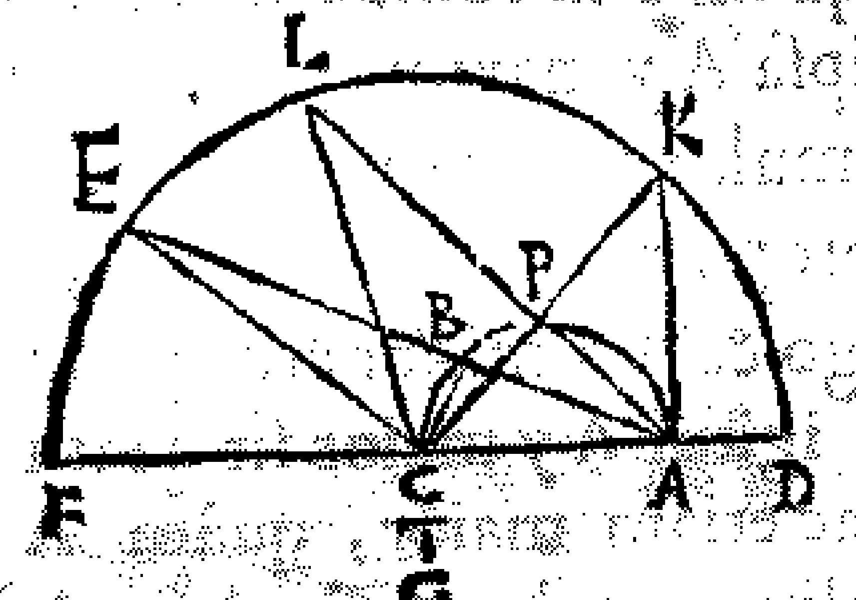
Lem-

A Lemma XXI.

Rursus ijsdem positis. ratio autem A D ad A F sit minor ratione A G ad A C. Dico si semicirculus A B C non extenditur vltra centrum circuli D E F, rectam F C maximam esse omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur, minimam A K; si verò extenditur, ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I secans semicirculum A B C in O. est autem a i minor * quam a f, maior autem quam a K, cum sit vt a g ad a c, minor nempe ad maiorem, ita quadratam a K ad quadratum a i ex positione. Dico maiorem rectarum a K, c f maximam esse, M O minimam, aliarum autem pro- lem. 19

B pinquiorem minimę remotiore ex eadem parte minorem esse.





DVcatur enim vtcumq; recta linea a B F secans circumferentias a B C, k F in pũctis B E; & primum semicirculus a B C non extendatur vltra cẽtrum circuli D E F, quod sit T, & connectantur C k, C E, C B; erit angulus a B C in semicirculo rectus. vnde & an

C gulus E B C rectus erit, quare C E maior erit quam B E; sed C F non est minor quam C E, ergo & C F maior erit quam B E. & sic demõstrabitur maior omnibus alijs. Maxima est igitur C F.

Rursus quoniam C k non est maior; quàm C E, ideo nec quadratum C k maius erit quadrato C E; sed quadratum C k * æquale est quadratis C a, a k, & quadratum C E * æquale quadratis C B, B E; ergo nec quadrata C a, a k maiora erunt quadratis C B, B E. sed quadratum C a maius est quadrato C B, er- 47 Primi.

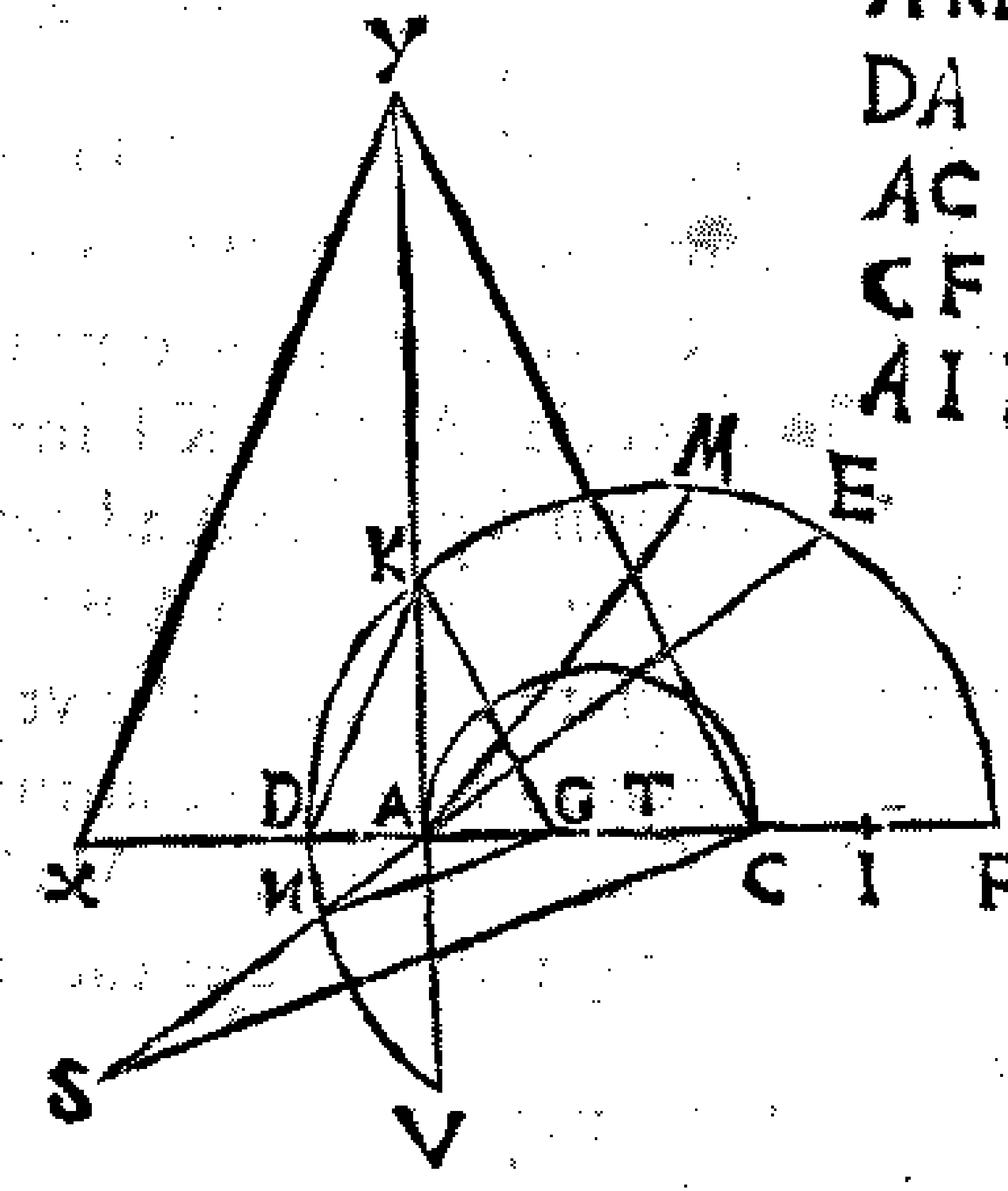
D go reliquum quadratum a k reliquo quadrato B E minus erit. vnde & recta a k minor quam recta E B, & sic demonstrabitur minor omnibus alijs. Minima est igitur a F. Sed ducatur alia recta a P L secans circumferentias a B C K F in punctis P L, & sit P L ipsi a k propinquior, quam B E. & connectantur C P, C L erit angulus a P C in semicirculus rectus, quare & angulus C P L rectus erit, & quoniam C L non est maior quàm C E, ideo nec quadratũ C L maius erit quadrato C E, hoc est nec quadrata C P, P L maiora erunt quadratis C B, B E, sed quadratum C P maius est quadrato C B, ergo reliquum quadratum P L reliquo quadrato B E minus erit, quare & recta P L maior quam recta B E. Propinquior scilicet minime minor remotiore.

Sed extendatur semicirculus A B C vltra punctum T. & compleatur circulus F E D quem E A, K A productæ secent in punctis H V, & connectantur G H, G K, K D, quibus parallelæ agantur C S, c y, y x secantes E A, A K, F A, in punctis S Y X, & sit primum A k maior, quam C F. Quoniam igitur est, vt A G ad A C, *ita F C ad C X, & ita A k ad A Y: erit A K, hoc est A V ad A y, vt F C ad C X. & permutando vt A V ad F C, ita A y ad c x, & consequenter* ita V y ad F x, hoc est ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, sed A V, hoc est A K, ponitur maior quam F C, ergo & V y maior erit quam F x:

Lem. 17 · 12 quinti

AKR 20	R 5
DA	2	1
AC	6	3
CF	4	2
AI	R 60	R 15

A



B

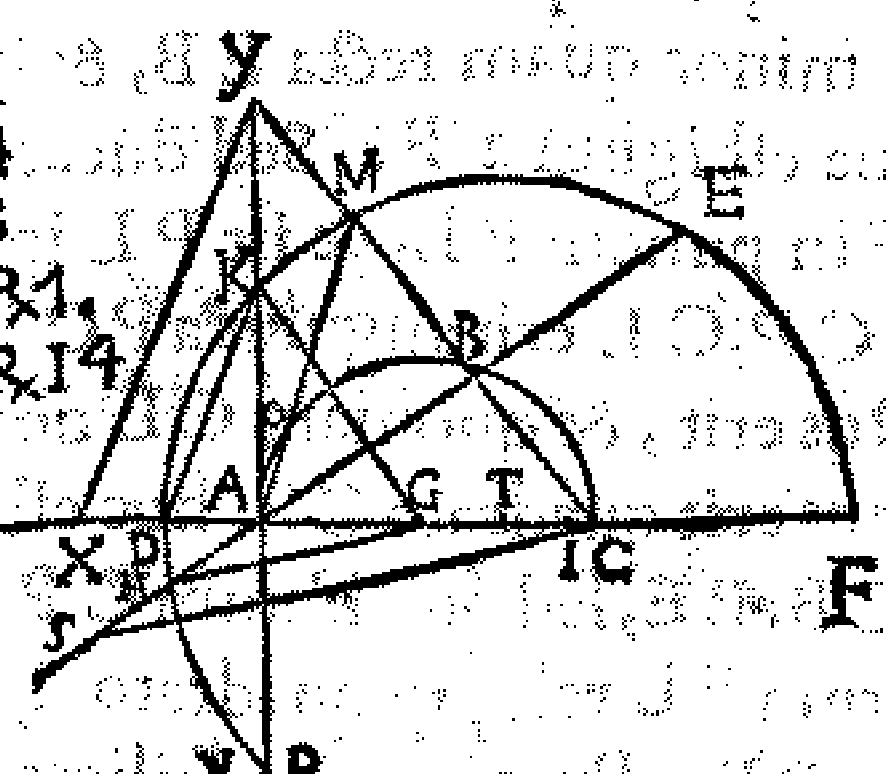
corol. lem 17. Et quoniam æqualia sunt rectangula y A k, F A X erit,* vt A y ad A F, 16 sexti ita A x ad A K, hoc est ad A V; sed y v composita ex extremis ostensa est Theor. 2 huius maior, quàm F x. composita ex medijs. ergo altera* extremarum A y, A V, nempe ipsa A y maxima erit; minima vero A k, vnde A y maior erit quam corol. Lem. 17 A F, & multo maior quam A E. Et quoniam æqualia sunt rectangula y A k C 16 sexti E A S. proportionales erunt A K, A E, A S, A y, sed A K minor est quam A E, ergo & A S minor erit quam A y.

Cum igitur A y maior sit quam A S, & maior quam A E, vt demonstrauimus, ac etiam maior, quàm A K; erit ipsa A y maxima quatuor pro- Theor. 1 huius portionalium A k, A E, A S, A Y; minima vero A k, vnde composita ex y a, a K, maxima videlicet, & minima, idest recta y v, maior erit, quam E S composita ex reliquis.

lem. 17 Et quoniam est vt a g ad a c, * ita E B ad B S, & * ita a K ad a y erit a k, hoc est a v ad a y, vt E B ad B S, & conuertendo, & componendo vt y v ad v A, ita S E ad E B; sed y V ostensa est maior, quam S E, ergo & v a, hoc est a K, maior erit quam E B, & sic demonstrabitur maior omnibus alijs. Maxima est igitur omnium a k. D

Lem. 17 Sed sit F C maior quam A k: eadem ratione, quoniam est vt a g ad a c, ita F C ad C X, & * ita a k ad a y, erit F C ad C X, vt a k, hoc est a v ad a y, & permutando vt F C ad a v, ita C X ad a y, & consequenter,* ita 12 quinti F X ad V Y omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed

DAI
AC4
Ct3
AKR1
AIR14



FC

A FC ponitur maior, quàm AK, hoc est quam AV, ergo & Fx maior erit, quàm Vy. sed Fx composita est ex extremis quatuor proportionalium af, ay, av, ax, ipsa vero vy ex medijs; constat autem eas proportionales esse, ex eo quod rectangulum FAX æquale est rectangulo yak, hoc est yav; ergo* altera extremarum af, ax maxima erit, altera minima, sed af non est minima, cum sit maior quam av, ergo maxima erit, &* consequenter ax minima, itaque ax minor erit quam av, & multo minor quam ae. corol. lem. 17 Theor. 2. huius Theor. 1 huius

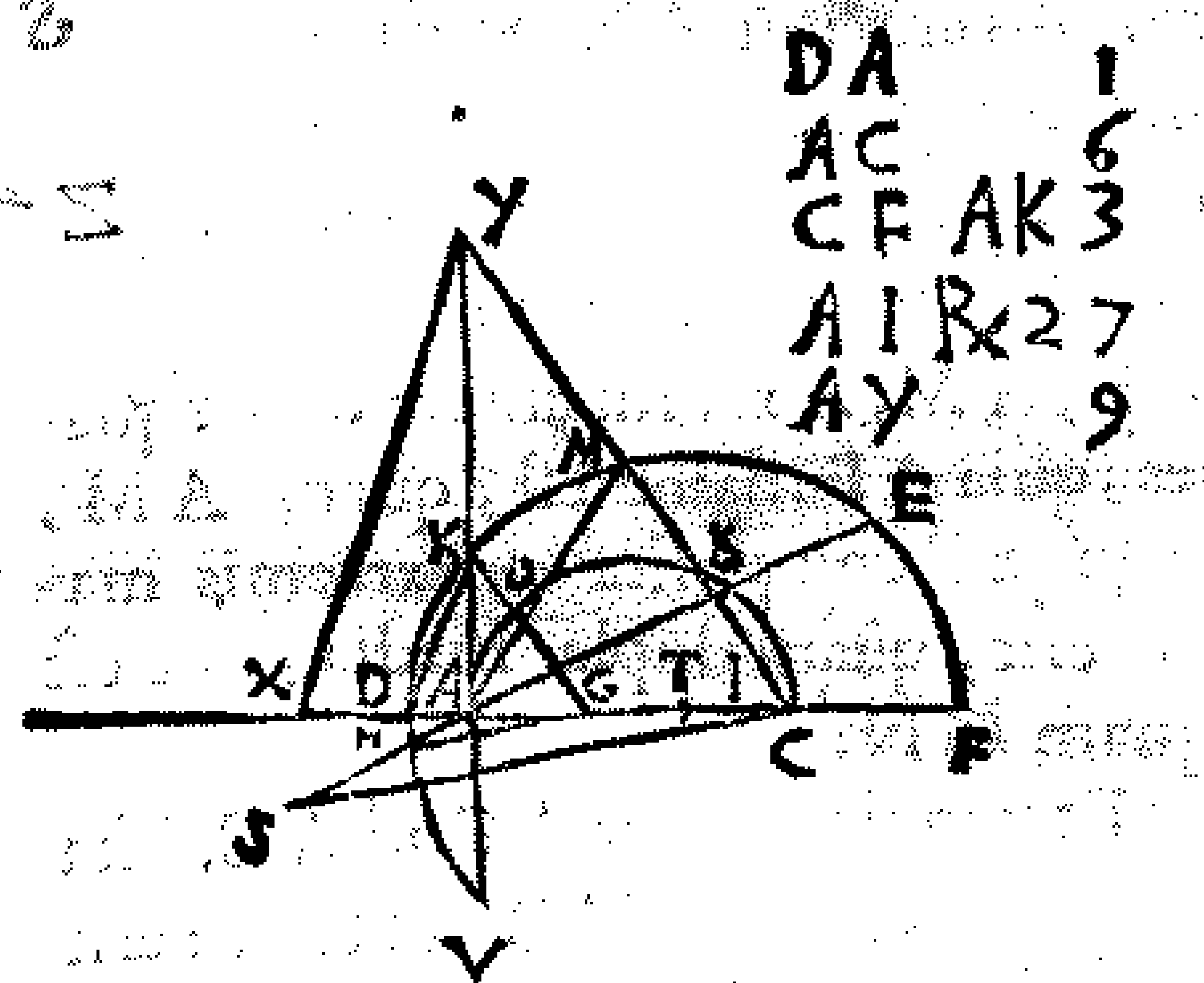
Et quoniam æqualia sunt rectangula FAX, EAS proportionales erunt af, ae, as, ax: sed af maior est quam ae, ergo & as maior erit quam ax, est autem & ae maior, quam ipsa ax, vt demonstrauimus, & consequenter af multo maior: itaque ax minima erit quatuor proportionalium af, ae, as, ax. quare af* maxima, vnde yf composita ex maxima, & minima maior erit, quam se composita ex reliquis. corol. lem. 17 Theor. 1 huius 25 quinti

B

Et quoniam est vt AG ad AC, ita FC ad CX, & ita EB ad BS; erit fc ad cx, vt eb ad bs, & conuertendo vt xc ad cf, ita sb ad be, & componendo vt xf ad fc, ita se ad eb; sed xf ostensa est maior, quam se, ergo & fc maior erit, quam eb; eademque ratione ostendetur maior omnibus alijs. Quare maxima est fc.

Sed sint æquales Ak, FC. Quoniam igitur est, vt AG ad ac, ita fc ad cx, &* ita ak ad ay, erit fc ad cx, vt ak ad ay, sed fc ponitur æqualis ak, ergo & cx æqualis erit ay, quibus additis æqualibus cf, av, tota xf æqualis erit toti yv. sed xf composita est ex extremis quatuor proportionalium fa, ay, av, ax: ipsa vero yv ex medijs: eæ autem sunt proportionales, quia rectangulum fax* æquale est rectangulo yak, hoc est yav, ergo maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit, itaque af altera extremarum æqualis erit alteri mediarum ya, av; sed non est æqualis ipsi av, quia* maior est, ergo æqualis erit ipsi ay. lem. 17 corol. lem. 11 Theor. 3 huius 7 tertii

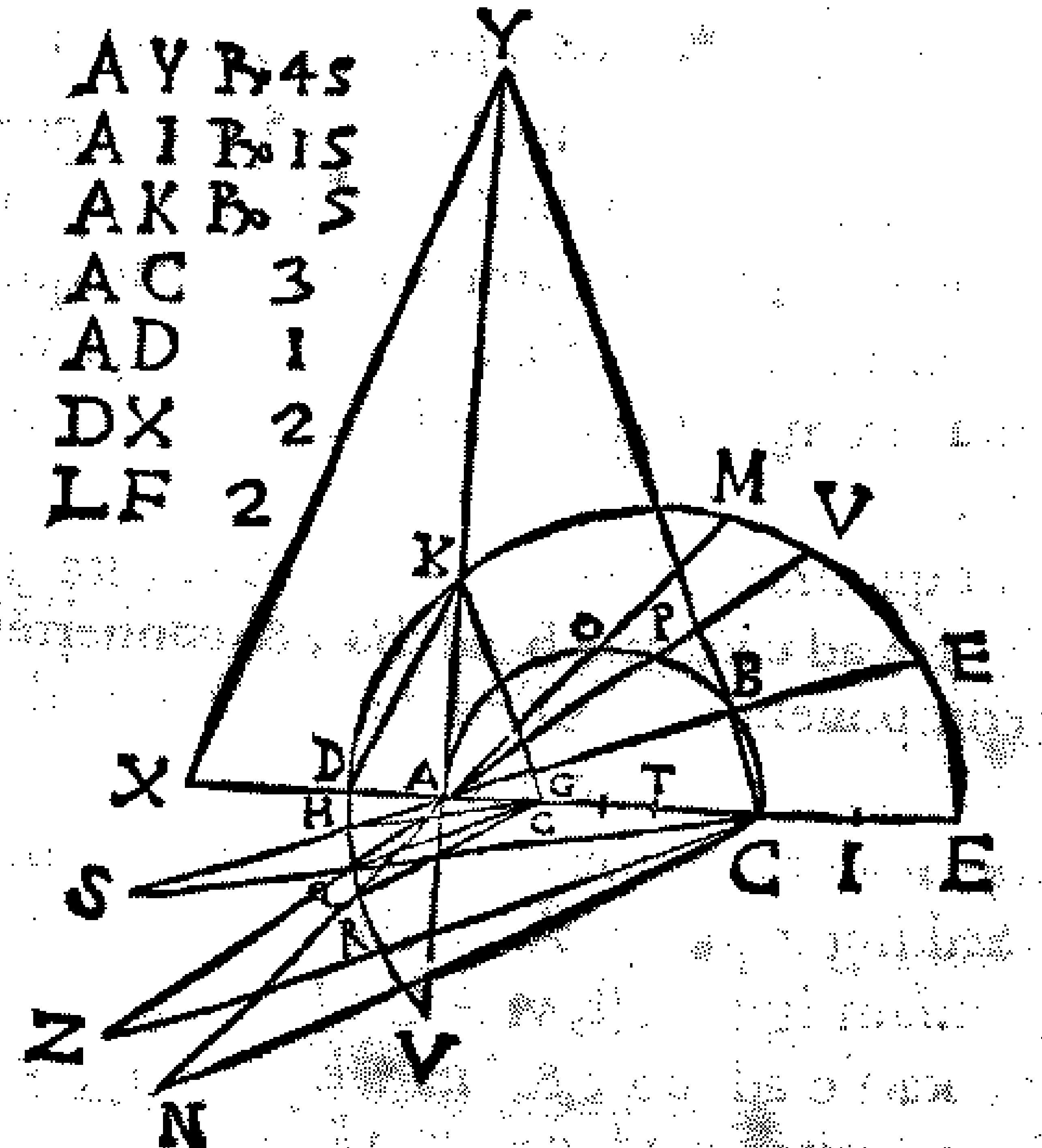
C



D

Et quoniam rectangulum yak, hoc est yav æquale est rectangulo eas, erit ay ad ae, vt as ad av; sed ay cum sit æqualis af, maior est quam ae, ergo & as maior erit quam av, itaque quatuor proportionalium ay, ae, as, av minima erit av, &* consequenter maxima ay. vnde xv composita ex maxima, & minima* maior erit, quàm se composita ex reliquis. lem. 17 Theor. 1 huius 25 quinti lem. 17

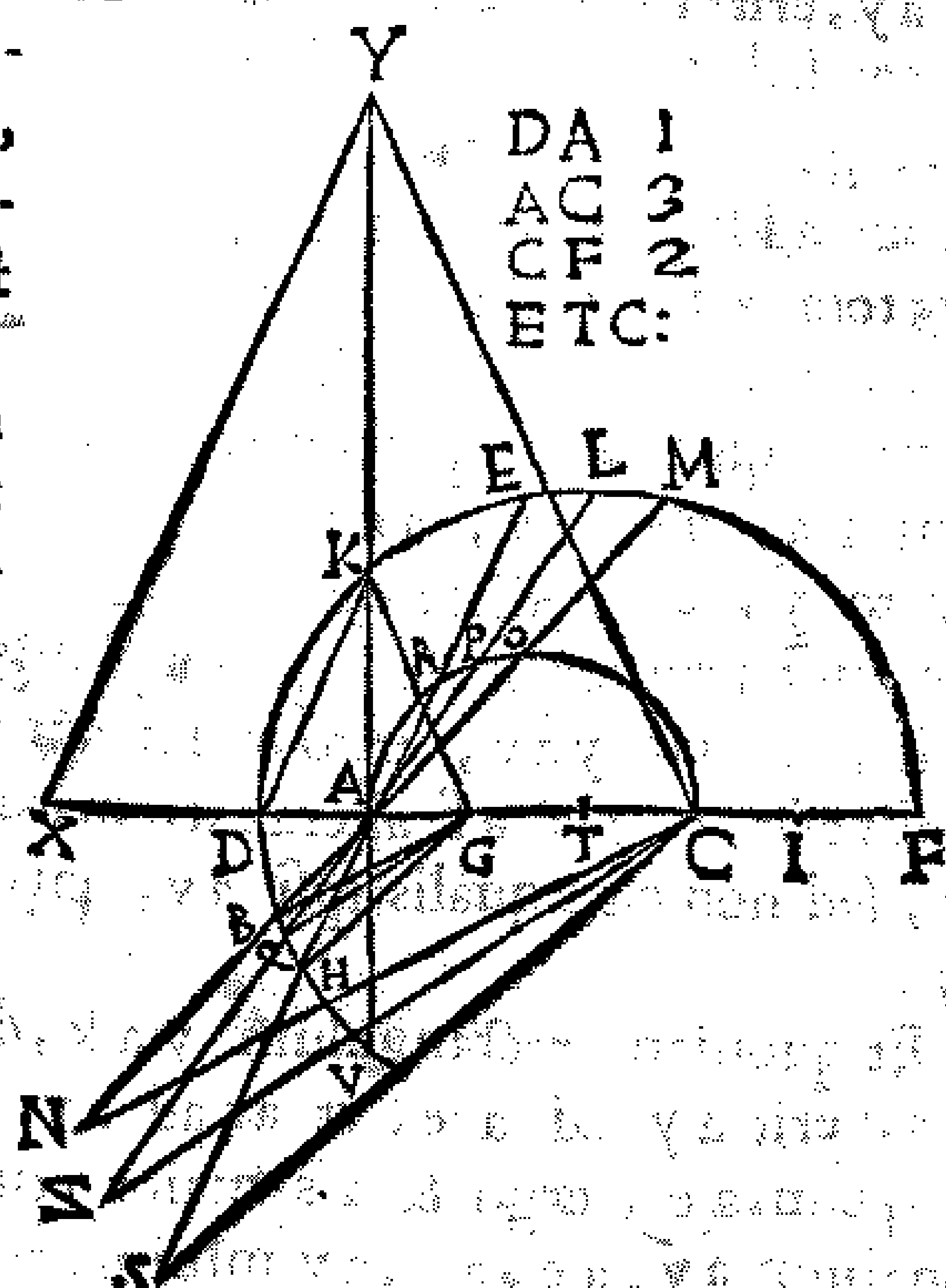
Lem. 17. Et quoniam est vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita * A K hoc est A V ad A y, erit A V ad A y, vt E B ad B S. & conuertendo vt y A ad A V, ita S B ad B E, & componendo vt y V ad V A, ita erit S E ad E B: sed y V ostensa est maior quam S E, ergo & V A hoc est A k maior erit quàm E B. atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare & F G cum sit æqualis A k, erit quoque omnibus maior. itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum A k, F C maxima est omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur. quod est primum.



Deinde producatur M A donec secet circulum completum F E D in R, & connectatur G R, eique parallela agatur C N secans M R productam in N. Rectangulum igitur

Lem. 17. M A N * æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M: sunt enim æquales A I, A M, ex constructione. quare A M æqualis erit ipsi A N. & cum

Lem. 17. sit rectangulũ F A X * æquale quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt A F, A M, A x: sunt autem & inæquales, quia A F maior est, quam A M, ergo x F composita ex extremis maior erit, quam dupla media, hoc est quam M N.



Lem. 17. Et quoniam est vt A G ad A C, * ita F C ad c x, & * ita M O ad O N: erit F C ad c x, vt M O ad O N. & conuertendo vt x c ad C F, ita N O ad O M. & componendo vt X F ad F C, ita erit N M ad M O. sed X F ostensa est maior quam N M, ergo & F C maior erit quam M O.

Eadem ratione quoniam rectangu-

Lem. 17. lum y A k * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt y A, A M, & A K, hoc est & A V: sunt autem & inæquales; ergo y V composita ex extremis maior erit, quam M N, media videlicet dupla.

Et

A Et quoniam est vt AG ad AC,* ita AK ad Ay, &* ita MO ad ON: erit vt Ak, vel AV ad Ay, ita MO ad ON; & conuertendo vt yA ad AV, ita NO ad OM. & componendo vt yV ad VA, ita erit NM ad MO: sed yV ostensa est maior, quam NM; ergo & VA hoc est AK maior erit quam MO. lem. 17.

Similiter quoniam rectangulum EAS æquale est quadrato AI, hoc est quadrato AM, proportionales erunt AE, AM, AS, sunt autem, & inæquales, ergo SE composita ex extremis maior erit, quam dupla media hoc est quam NM. Et quoniam est vt AG ad AC,* ita EB ad BS, &* ita MO ad ON: erit EB ad BS, vt MO ad ON. & conuertendo vt SB ad BE ita NO ad OM. & componendo vt SE ad EB, ita erit NM ad MO, sed B SE maior est, quam NM, vt demonstrauimus. ergo & EB maior erit, quàm MO. atque eadem ratione ostendemus omnes alias maiores esse ipsa MO. Minima est igitur MO omnium quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias ABC, KF interijciuntur. quod est secundum. lem. 17.

Postremo ducatur à puncto A alia recta APL secans circumferentias ABC, kF in punctis PL, sintque PL, BE ex eadem parte minime OM, atque sit PL ipsi OM propinquior, quam BE. deinde producatur LA donec secet circulum FED completum in Q, & connectatur GQ, eique parallela ducatur cz occurrens LQ continuatæ in z: erunt igitur* æqualia rectangulo LAZ, FAS, ac proinde proportionales AL, AE, AS, AZ. in prima quidem figura vbi AL, AE existunt inter rectas AM, AK. sic argumentor, sed AL maior est quam AE, ergo & AS maior erit quam AZ. Et quoniam rectangulum EAS* æquale est quadrato AI, hoc est quadrato AM, proportionales erunt AE, AM, AS; sed AE minor est quam AM, ergo & AM minor erit quam AS; atque adeò AS maior erit quam AL, & multò maior quam AE; atque est maior quam AZ, vt demonstrauimus, itaque AS maxima erit quatuor proportionalium al, ae, as, az, & per* consequens. AE minima vnde SE composita ex maxima, & minima* maior erit quam ZL composita ex reliquis, hoc est ZL minor quam SE. corol. lem. 17.

C Len. 17.

Theor. 1. huius 25 quinti

In secunda verò figura vbi AL, AE existunt inter rectas am, af, argumentor in hunc modum. sed al minor est quam ae, ergo & as mi-D nor erit quam az, & quoniam rectangulum eas* æquale est quadrato ai, vel am, proportionales erunt ae, am, as; sed ae maior est quam am, ergo & am maior erit quam as, itaque as minor erit quam al, & multo minor quam ae, atque est minor quam az, vt demonstrauimus, itaque as minima erit quatuor proportionalium al, ae, as, az, & consequenter* ae maxima. quare se composita ex maxima, & minima maior erit quam ZL composita ex reliquis, hoc est zl minor quam se. quod quidem demonstrauimus & supra. lem. 17.

Theor. 1. huius 25 quinti

At quoniam in vtroque casu est, vt ag ad ae,* ita eb ad bs, & ita LP ad PZ, ita EB ad BS, & conuertendo vt ZP ad PL, ita SB ad lem. 17.

ad B E. & componendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B; sed z L ostensa est minor quam S E, ergo & L P minor erit quam E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore ex eadem parte, quod tertio loco erat ostendendum. A

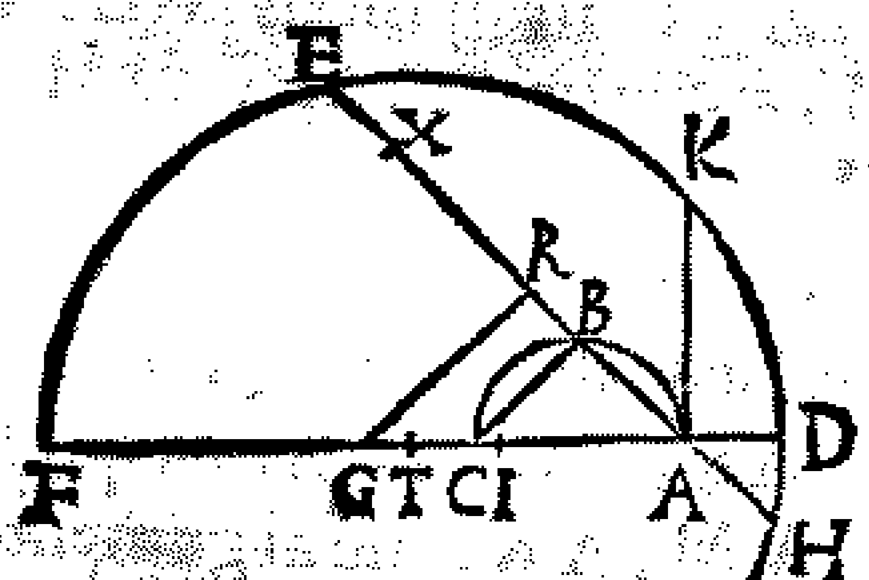
Corollarium.

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores sint, manifestum est A K maximam esse omnium, quæ inter circumferentias a O, K M interijciuntur. Earum autem, quæ interijciuntur inter circumferentias O C, M F, maximam esse C F.

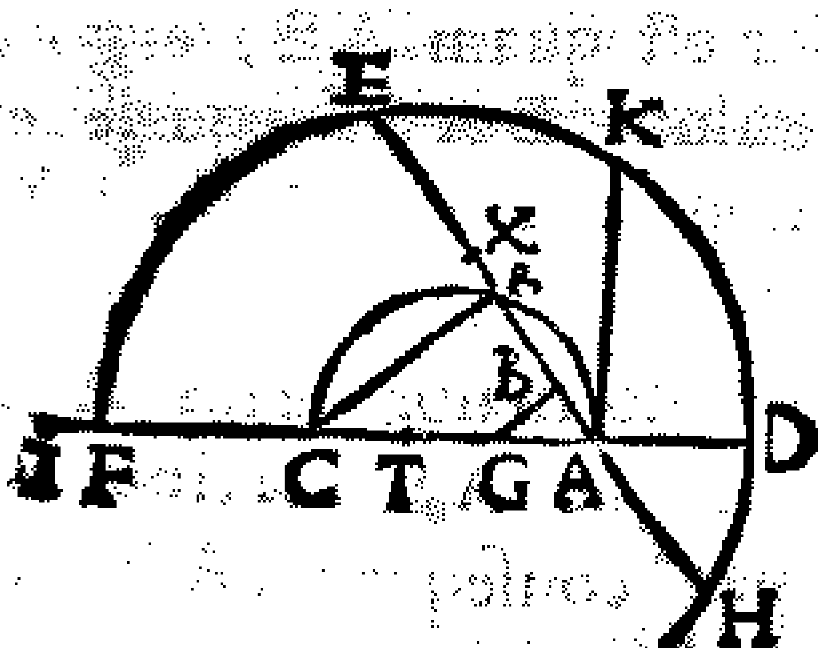
Compositio septimi Casus.

SInt dati duo semicirculi a B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur. data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias a B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum a pertineat. Oportebit autem ipsam V z non esse maiorem, maxima rectarum, quæ B

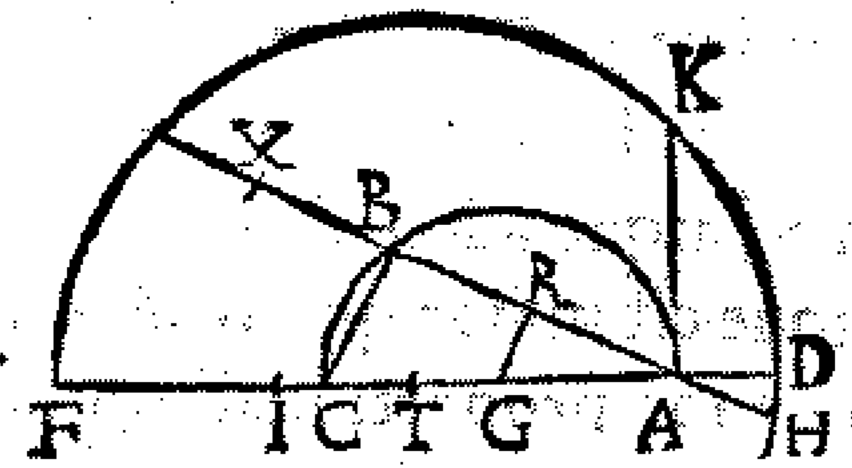
2 AD 4
4 AC 8
3 CF 6
B 5 6 A I B 224
1 AG 2

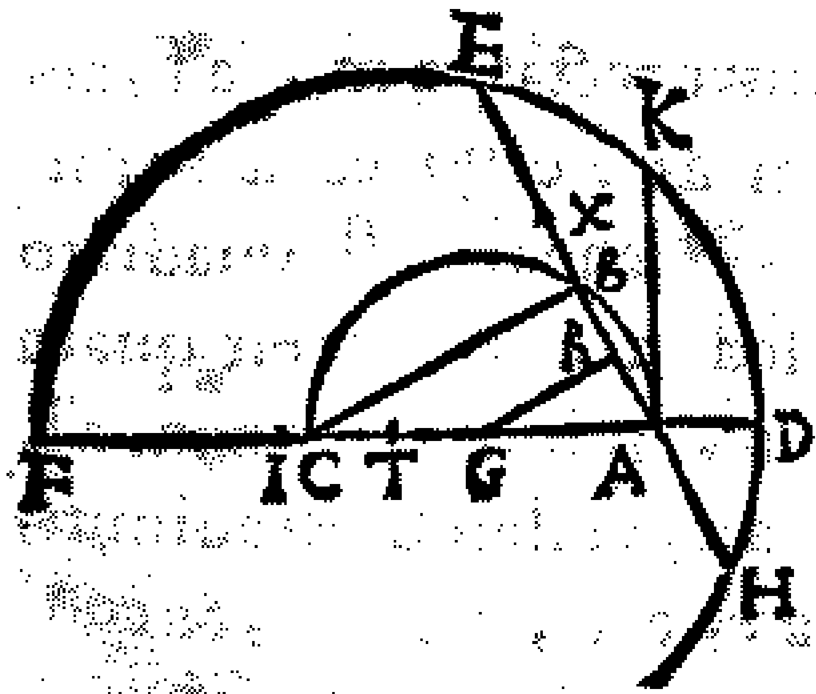


C

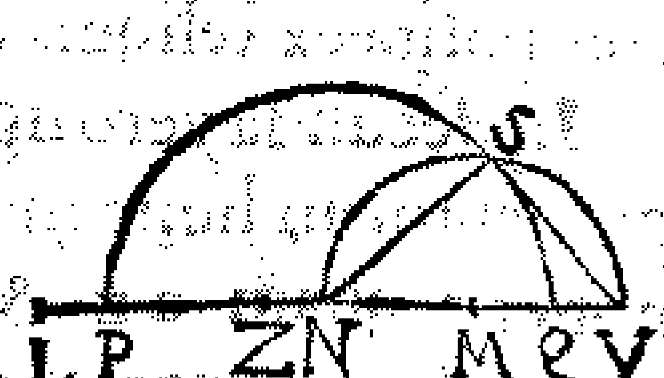


AD 1
AC 3
CF 2
A I B 15

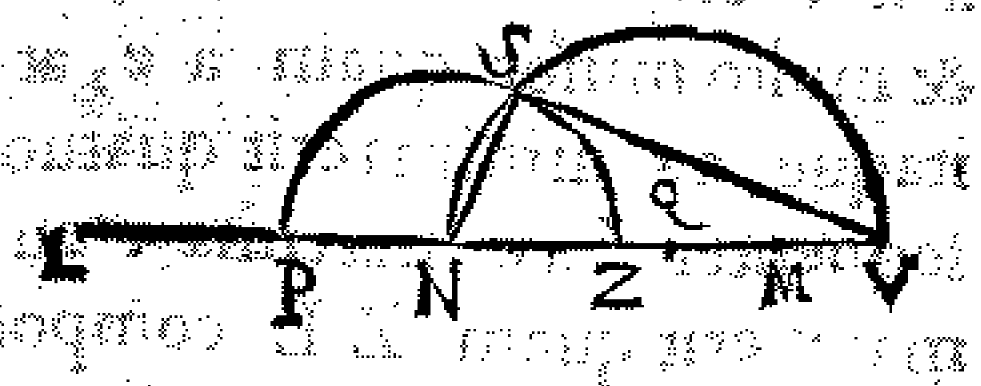


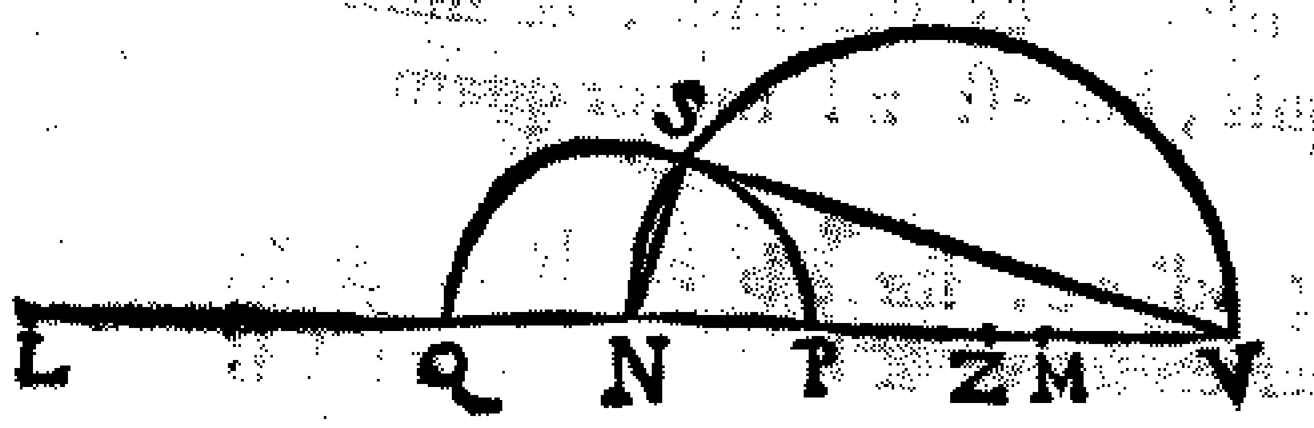


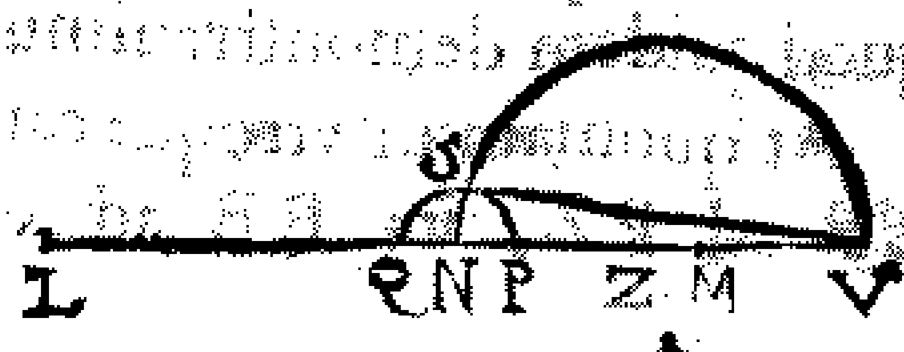
DA 1
AC 3
CF 2
AG 1
A I B 15



D







ad pun-

A ad punctum a pertinentes inter circumferentias a B C, D E F interijciuntur, neque minorem minima; quæ autem sit maxima, quoque minima, iam est demonstratum. Ducatur ad A F perpendicularis A K secans circumferentiam D E F in k, & si quidem data V Z sit æqualis maximæ, factum iam erit quod proponebatur. etenim maxima est ea, quæ maior est rectarum A K, F C; si vero sit æqualis minimæ, minima autẽ sit ea, quæ minor est ipsarũ A k, F C, itidem factum erit, quod proponebatur, sed si neutra dictarum A K, F C sit minima, inuenta minima Problemati satisfiet. inuentio autem minimæ constat ex Lemmate 24. Si autem V Z minor sit maxima, maior minima sumatur ex centro circuli D E F, quod sit T recta T G æqualis T C, &* fiat probl. 8 huius
vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum quod sit A I.

B Similiter fiat vt A G ad A C, ita V z ad aliam, quæ sit z L. & V L composita ex V Z, Z L secetur bifariam in N. cum igitur à quadrato V N auferendum sit quadratum A I, vt Porisma iubet, describatur in V N semicirculus, in quo accommodetur V S æqualis A I infra ostendetur minor quam V N, deinde connectatur S N. quadratum igitur V N superat quadratum V S quadrato S N, angulus enim V S N in semicirculo rectus est itaque rectæ V N auferenda est, vel addenda recta æqualis N S, sic Porisma fieri iubet, auferatur ergo, vel addatur prout sequentia præcepta docebant. eaque diminuta, vel aucta sit V P; cui æqualis à puncto A ad circumferentiam k F ducatur recta A E secans semicirculum A B C in B, ipsam autem V P non esse maiorem quam A F, nec minorem quam A K, quatuor sequen-
C tia Lemmata ostendent. iam facta est constructio quemadmodum Porisma docet. Nunc ostendemus E B æqualem esse V z datæ.

Producatur E A donec secet circulum F E D completum in H. & centro N interuallo N S, vel N P circulus describatur secans rectam V L in Q. is circulus tangit rectam V S in S. vnde quadratum V S * æquale erit rectangulo 36 tertii
P V Q, vel V P L, seu quod idem est rectangulo V P, L z, minus rectangulo V P z: punctum enim z existit in recta V P, vt quatuor sequentia Lemmata ostendent. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes, itidem manebit inter eas partes æqualitas. igitur quoniam est vt A G ad A C ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione, erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum A I, hoc est quadratum V S ad qua-
D dratum A k, quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, altera vero pars sic inuenietur.

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad z V, ita P z ad aliam, quæ sit z M; erit Z M minor, quam z V, quoniam & P z minor est, quam L z, sed vt P z ad z M, ita est rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M: sunt enim eiusdem altitudinis V P: ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M.

Et quoniam est vt A G ad A C, ita V z ad z L ex constructione, erit conuertendo vt A C ad A G, ita L z ad z V: sed vt L z ad z V, ita est rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z eamdem enim habent altitudinem V P ergo go vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P L z ad rectangulum P V z: sed vt A C ad A G; ita ostensum est rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M. ergo vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, ita rectangulum V P z ad rectangulum, V P, z M. nempe vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; quare vt * totum ad totum, ita erit & reliquum ad reliquum, hoc est vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, id est vt A C ad A G, ita rectangulum V P, L z minus rectangulo V P z ad rectangulum P V z minus rectangulo V P, z M. itaque rectangulum P V z minus rectangulo V P, z M erit altera pars æqualitatis. Quadratum igitur A K, hoc est rectangulum E a H, æquale erit rectangulo P V z minus rectangulo V P, z M. hoc est æquale erit rectangulo P V M, sed P V æqualis est A E ex constructione; ergo & V M æqualis erit A H. A B

19 quinti

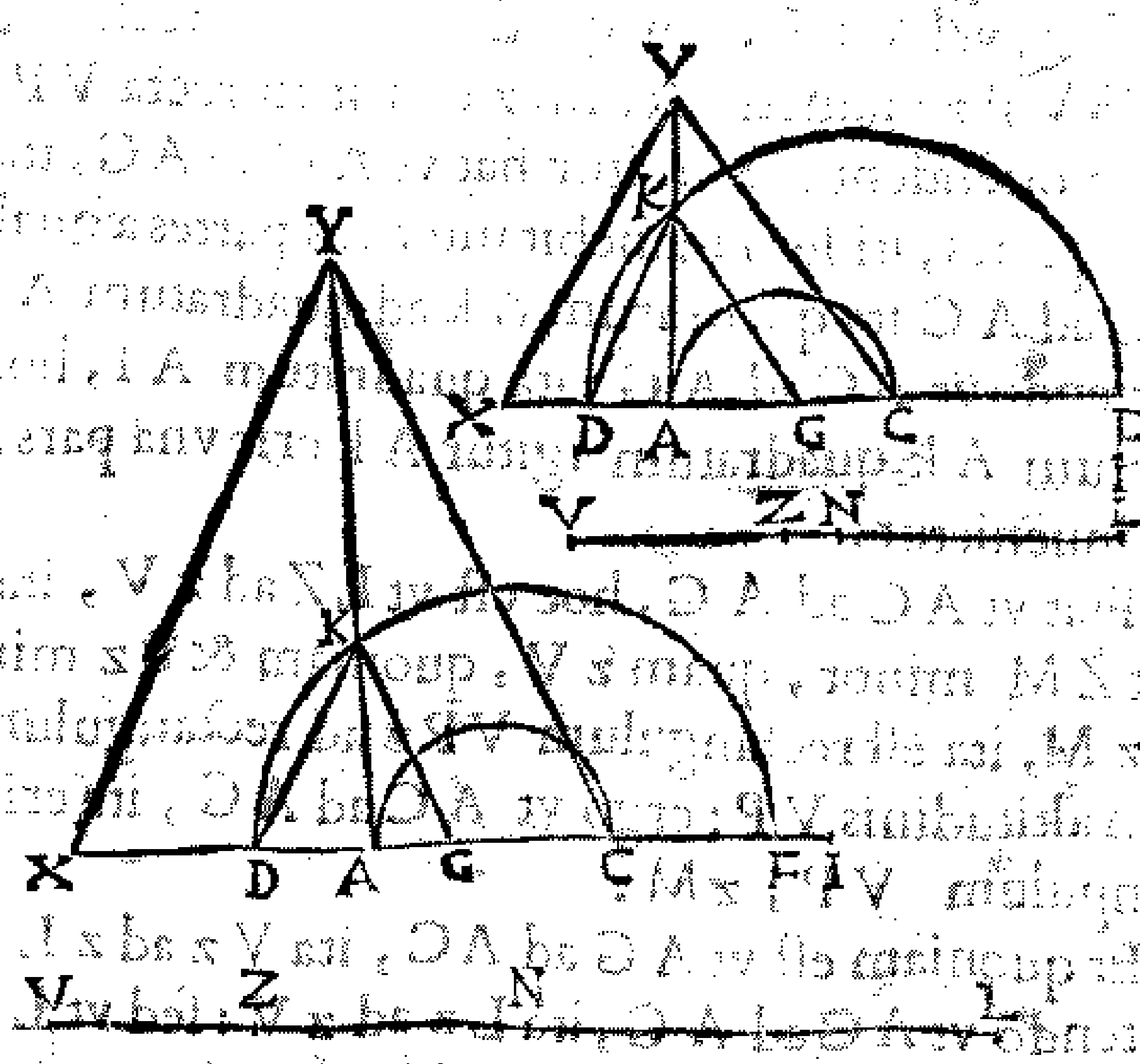
Denique connectatur B C, cui parallela agatur G R secans A E in R: angulus igitur a R G, æqualis est angulo a B C, & ideo rectus, quia & ipse a B C in semicirculo rectus est. vnde * æquales sunt E B, H R: sumatur autem B x æqualis a R; reliqua x E æqualis erit reliquæ a H, hoc est ipsi V M; sed a E æqualis est V P, ex constructione; ergo & reliqua x a reliquæ M P æqualis erit.

Lem. 2

Et quoniam similia sunt triangula a B C, a R G, anguli enim a B C, a R G sunt æquales, quia recti & angulus a communis est vtrique: erit vt a C ad a G, ita a B ad a R; sed vt a C ad a G, ita est quoque P z ad z M, ex constructione: ergo vt a B ad a R, hoc est ad B x, ita erit P z ad z M. & componendo vt a x ad x B, ita P M ad M z; sed x a prima ostensa est æqualis tertiæ P M, ergo & secunda x B æqualis erit M z quartæ, sed E x ostensa est æqualis M V, ergo tota E B toti V z æqualis erit. Posita est igitur inter circumferentias k F, a B C recta E B æqualis datæ V z, eaque ad punctum a pertinet. quod erat faciendum. C

At vero rectam a I minorem esse, quam V N sic demonstrabimus: Primũ habeat a D ad a F non minorem rationem, quam a G ad a C ergo a I non * erit minor, quàm a F; atque F C * minima erit omnium interceptarum inter circumferentias a B C, k F. Connectatur autem G k, k D, quibus parallelæ agantur c y, y x secãtes a K, a D continuatas in punctis y x. rectangulum igitur F a x * æquale erit D

Lem. 19.
Lem. 20
Lem. 17

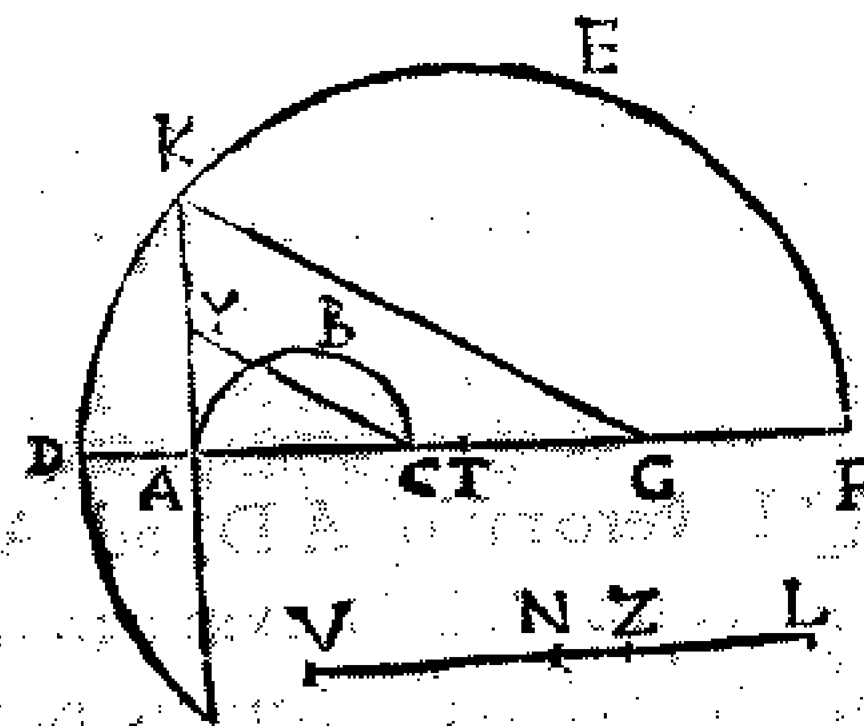


A erit quadrato A I: & ideo proportionales erunt F a, a I, a x: quare F x composita ex extremis non erit minor quam a I dupla.

Et quoniam est vt a G ad a C, * ita F C ad c x, & ita V z ad z L, ex constructione, erit vt F C ad C x, ita V Z ad Z L, & permutando vt F C ad V z, ita erit C x ad z L. & consequenter * ita F x ad V L, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes: sed F C cum sit omnium interceptarum minima, minor est, quam V z; ponitur enim V z maior minima, ergo & F x minor erit, quam V L; sed F x ostensa est non minor, quam dupla A I, ergo & A I dupla minor erit, quam ipsa V L, & consequenter A I simpla minor quàm V N, dimidia videlicet ipsius V L. lem 19

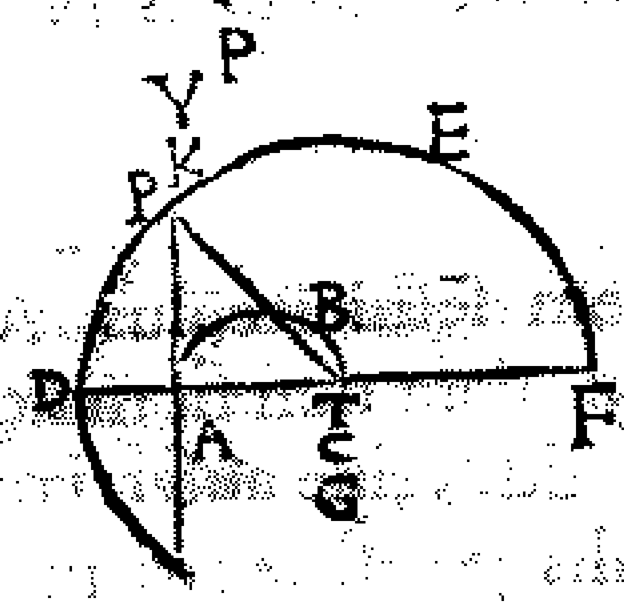
Sed habeat A D ad A F minorem rationem, quàm A G ad A C. Vel

B igitur semicirculus A B C extenditur vltra centrum circuli D E F, quod est T, vel non extenditur. Primum non extendatur, & connectatur G K, eique parallela agatur C y secans A K in y, & producatur k A donec secet circulum F E D completum in P. Quoniam igitur rectangulum y A K * æquale est quadrato A I, proportionales erunt y A, A I, A K. quare composita ex extremis y A, A K, hoc est recta y P, non erit minor quam A I dupla. lem. 19.



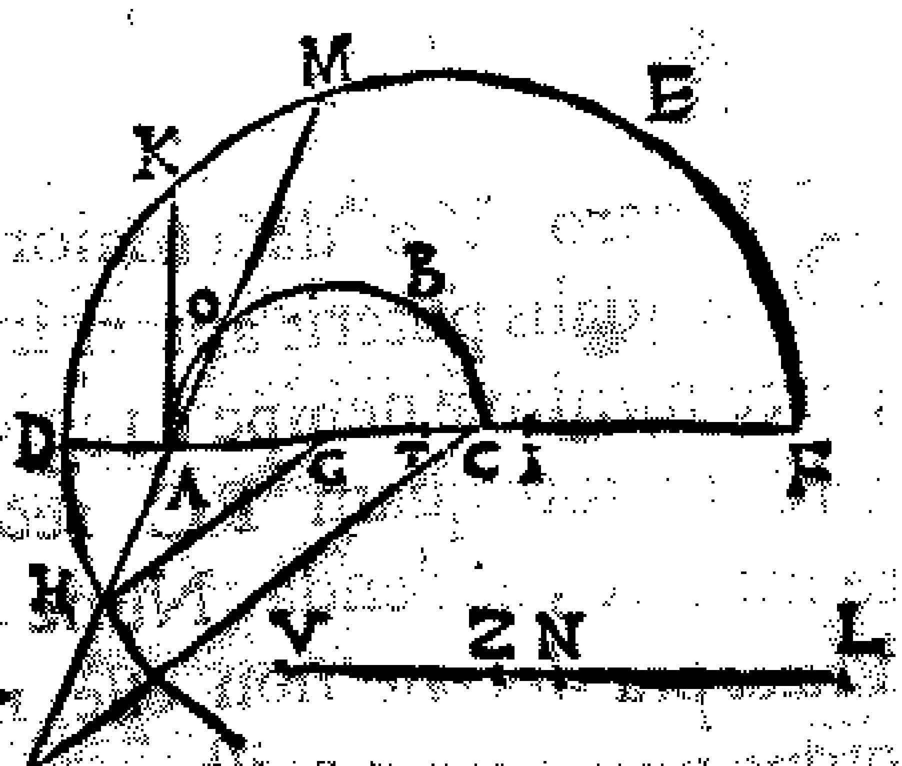
Et quoniam est vt A G ad A C * ita A k ad A y, & ita V z ad z L ex constructione, erit vt a k hoc est, A P ad A y, ita V z ad z L, & lem. 17

C permutando vt A P ad V z, ita A y ad z L, & consequenter * ita P y ad V L, hoc est ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; sed a P cui æqualis est a k, quæ est * minima interceptarum, minor est quam V z, ponitur enim V z maior minima: ergo & P y minor erit quã V L, sed P y ostensa est non minor, quam dupla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam V L, & consequenter a I simpla minor, quam V N. dimidia videlicet ipsius V L. 12 quinti. lem. 22.



Sed extendatur semicirculus a B C vltra centrum T. ergo a G minor erit, quam a C, &

D per consequens a k minor quam a I. est enim vt a G ad a C, ita quadratum a k ad quadratum a I ex constructione. Cum itaque a I sit maior, quam a k, minor autem quam a F, poterit à puncto a ad circumferentiam k F duci recta a M æqualis a I. Ducatur igitur a M secans semicirculum a B C in O. ergo * M O. erit minima omnium, quæ ad punctum a pertinent, & inter circumferentias a B C, K F interijciuntur. Producatur autem M a donec lem. 24.



Lem.

donec secet circulum F E D completum in H, & iungatur G H, cui parallela agatur C R secans M H continuatam in R. Rectangulum igitur M a R * æquale erit quadrato a I, hoc est quadrato a M, quare æquales erunt a R, A M. A

lem. 17 Et quoniam est vt a G ad a C, * ita M O ad O R, & ita V z ad z L ex constructione, erit vt M O ad O R, ita V z ad z L, & permutando vt M O
12 quinti ad V z, ita O R ad z L, & consequenter ita * M R ad V L, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes: sed M O, cum sit omnium interceptarum minima, minor est quam V z; ponitur enim V z maior minima, ergo & M R minor erit, quam V L, & per consequens A M, vel A I minor, quam V N dimidia, videlicet minor quam dimidia. quod erat ostendendum.

Quo autem Casu rectæ V N auferenda sit recta æqualis N S, quoue addenda, ratio his constat præceptis. B

Præceptum I.

SI ratio A D ad A F non sit minor ratione A G ad A C, rectæ V N auferenda est recta æqualis N S.

Præceptum II.

SI vero ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, & semicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, rectæ V N addenda est recta æqualis N S. C

Præceptum III.

SI autem semicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F, & V z data non sit maior minore rectarum a K, F C, rectæ V N poterit siue addi, siue auferri recta æqualis N S. in hoc enim Casu recta datæ V z æqualis potest aptari inter circumferentias a B C, k F ex vtraque parte minimæ, & ideo duobus modis Problema absolui. Nam si auferatur aptabitur ea recta è regione a K; si vero addatur, aptabitur è regione F C.

Præceptum IV.

SI vero V z data maior sit minore rectarum a k, F C, recta ipsi V z æqualis poterit aptari inter circumferentias a B C, k F ex vna tantum parte minimæ nempe è regione maioris rectarum a k, F C. Itaque existente a K maiore quam F C rectæ V N auferenda est recta æqualis N S, existente minore, addenda. Nunc ostendam rectam V P sumptam quemadmodum Præcepta docent non esse maiorem, quam a F, nec minorem quam a k, atque punctum z existere in recta V P. quo circa quatuor Lemmata proponuntur, quorum primum pertinebit ad primum præceptum, secundum vero ad secundum, & sic deinceps. D

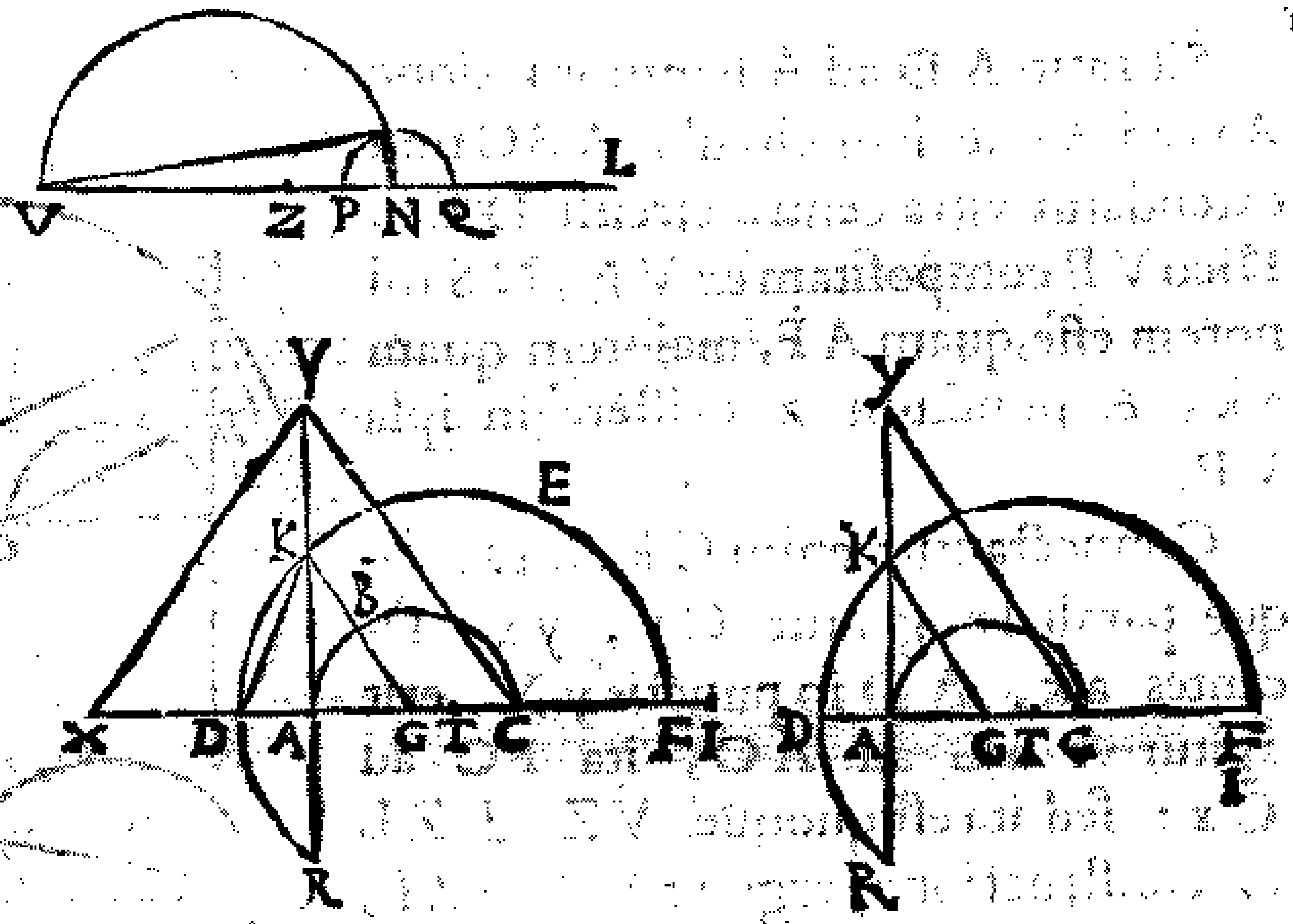
Lem-

A Lemma XXII.

Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico V P differentiam rectarum V N, N S minorem esse, quam A F, maiorem quam A k, & punctum z existere in ipsa V P.

Connectantur enim G k, k D, quibus parallelæ agantur c y, y x secantes A k a D continuatas in punctis y x.

Quoniam igitur est vt a G ad a C,* ita F C ad C X, & ita V z ad z L ex constructione, erit y z ad z L, vt F C ad C x. & permutando vt V z ad F C, ita z L ad C x, & ita* quoque V L ad F x: est enim vt vna antecedentium ad vnā consequentium, ita oēs antecedentes ad oēs cōsequentes; sed V z ponitur maior, quā FC; est enim FC minima oīum quæ inter circūferentias a B C, K F intercipiuntur. ergo & v L maior erit quam F x. lem.19 xii quinti



B

Et quoniam æquales sunt V N, N L ex constructione, & æquales quoque N Q, N P, vt semidiametri, ergo fiunt quoq; æquales V Q, L P, quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L, sed rectangulum P V Q * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato a I, cui quoque æquale est rectangulum F a x; ergo rectangulum V P L æquale erit rectangulo F a x: quare proportionales erunt V P, F a, a x P L. sed V L composita ex extremis ostensa est maior quam F x composita ex medijs, ergo altera * extremarum v P, P L, maxima erit, altera minima; sed V P minor est quam P L, ergo ipsa V Q minima erit, atque adeo minor quam A F. quod est primum. C 36 tertij the. 2 huius

Deinde compleatur circulus F E, B R, quem K A producta secet in R. Quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita A K ad A y, & ita quoque Vz ad z L ex constructione: erit vt V z ad z L, ita A K hoc est A R ad A y. & permutando vt v z ad A R, ita z L ad A y. & consequenter * ita V L ad R y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed V z minor est quam A R; ponitur enim z v minor, quam A k, quæ est * maxima omnium interceptarū inter circumferentias A B C, K F: ergo & V L minor erit, quàm R y. lem. 17 D 12 quinti lem. 20

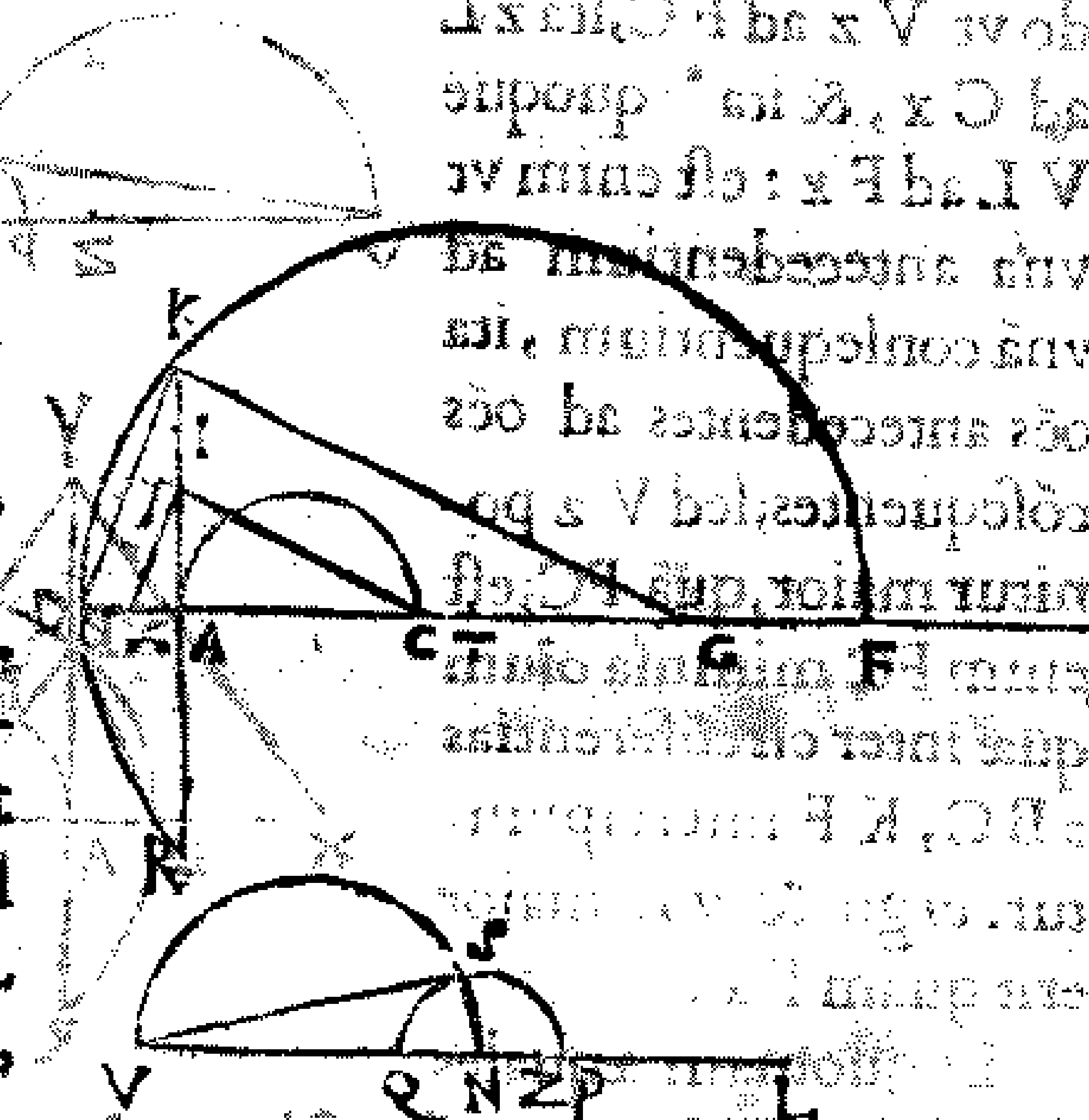
Et quoniam rectangulum P V Q, seu V P L * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum y a K, hoc est y a R; æqualia erunt rectangula V P L, y A R, & ideo proportionales V P, Y A, a R, P L: sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quam lem.18

V R y

the. 2. huius R y composita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A R maxima erit, altera minima; sed A y maior est quam A R, ergo ipsa A R minima erit, & per consequens V P maior quam A R, hoc est quam A k, quod est secundum.

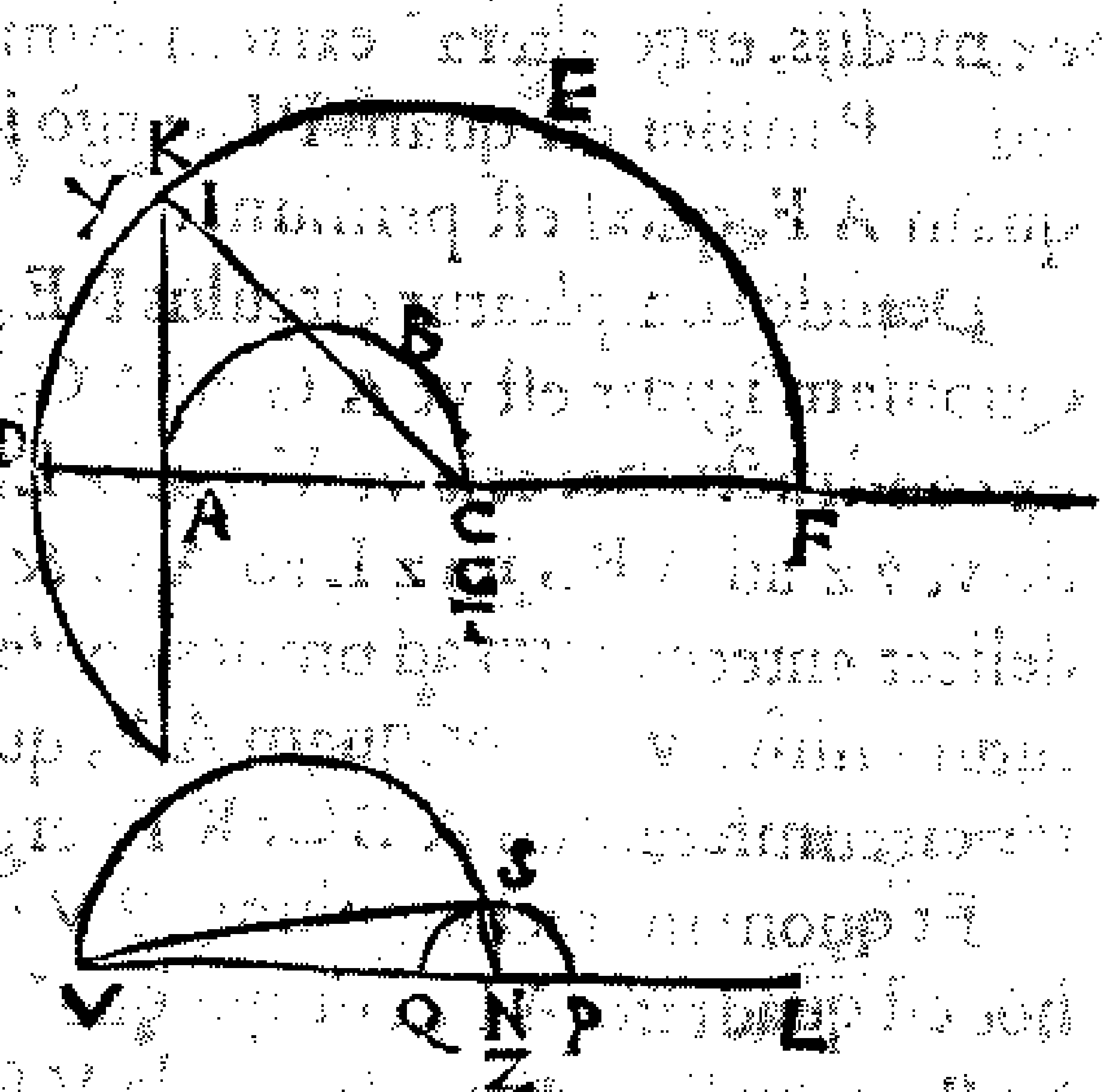
Denique cum vt V P minor quam A F, ipsaque A K maior quam V Z, erit V P multo maior, quam V Z, atque adeo punctum Z erit in recta V P, quod vltimo loco erat ostendendum.

Lemma XXIII.



Sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & semicirculus A B C non extendatur vltra centrũ circuli D E F. Dico V P compositam ex V N, N S minorem esse, quam A F, maiorem quam a k, & punctum z existere in ipsa V P.

Connectantur enim G k, k D, eisque parallelæ agantur C y, y x, secantes a k, A D in punctis y X. erit lem. 17. igitur vt a G ad A C,* ita F C ad C x: sed ita est quoque V Z ad Z L ex constructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C ad C X, & permutando vt V Z ad F C, ita Z L ad C x, 12 quinti & ita * quoque V L ad F X, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, sed V z ponitur lem. 21. minor quam F C; est enim F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias A B C, X F interijciuntur; ergo & V L minor erit, quam F X.



Et quoniam æquales sunt V N, N L, & æquales quoque N P, N Q, vt semidiametri; ergo fiunt quoque æquales V P, L Q. Quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L; sed rectangulum P V Q 36 tertii * æquale est quadrato V S, hoc est lem. 17 quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum F A X, ergo rectangulũ V P L æquale erit rectangulo F A X;

quare

A quare proportionales erunt V P, F A, A X, P L; sed v L composita ex extremis ostensa est minor, quam F X composita ex medijs, ergo* altera mediarum FA, a X maxima erit, altera minima. itaque A F maxima erit quippe quæ maior est, quam A X, & per consequens V P minor erit quam a F. quod est primum. The. 2.huius

Deinde compleatur circulus F E D, quem K a producta secet in R. Quoniam igitur est vt A G ad A C, ita* a k ad a y. & ita quoque V Z ad z L ex constructione; erit vt V z ad z L, ita A K, hoc est A R ad a y. & permutando vt V z ad A R, ita z L ad a y, &* ita quoque V L ad R Y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed V z maior est quam A R, ponitur enim V z maior quam A K, quæ est minima interceptarum inter circumferentias A B C, K F. ergo & V L maior erit quam R y. lem. 17 12 quinti lem. 21

B

Et quoniam rectangulum P V Q, vel v P L æquale est quadrato V S, seu quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum y a k, hoc est y a R, erunt æqualia rectangula V P L, y A R, & ideo proportionales v P, y A, a R, P L. sed v L composita ex extremis ostensa est maior, quam y R composita ex medijs, ergo altera* extremarum v P, P L maxima erit, altera minima; sed v P maior est, quàm P L, ergo ipsa v P maxima erit, & per consequens maior quã A R, hoc est quam A K. quod est secundum. 36 tertij lem. 17 The. 2 huius

Rursus quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum a I, & ita v Z ad Z L, vtrumque ex constructione, erit vt v Z ad z L, ita quadratum A K ad quadratum A I, hoc est ad quadratum v S, vel ad* rectangulum P v Q, seu ad rectangulum v P L: sed vt v z ad z L, ita est quoque quadratum v z ad rectangulum v z L, eandem enim habent altitudinem v z. ergo vt quadratum v z ad rectangulum v z L, ita erit quadratum A k ad rectangulum v P L. sed quadratum v z maius est quadrato A k, ponitur enim recta V z maior, quam A K, quæ est minima interceptarum, ergo & rectangulum v z L maius erit rectangulo v P L. quare punctum z propinquius erit ipsi N, quam punctum P, atque vtrumque existit in medietate N L. ergo punctum z erit in recta v P. quod vltimo loco erat ostendendum. 36 tertij lem. 21

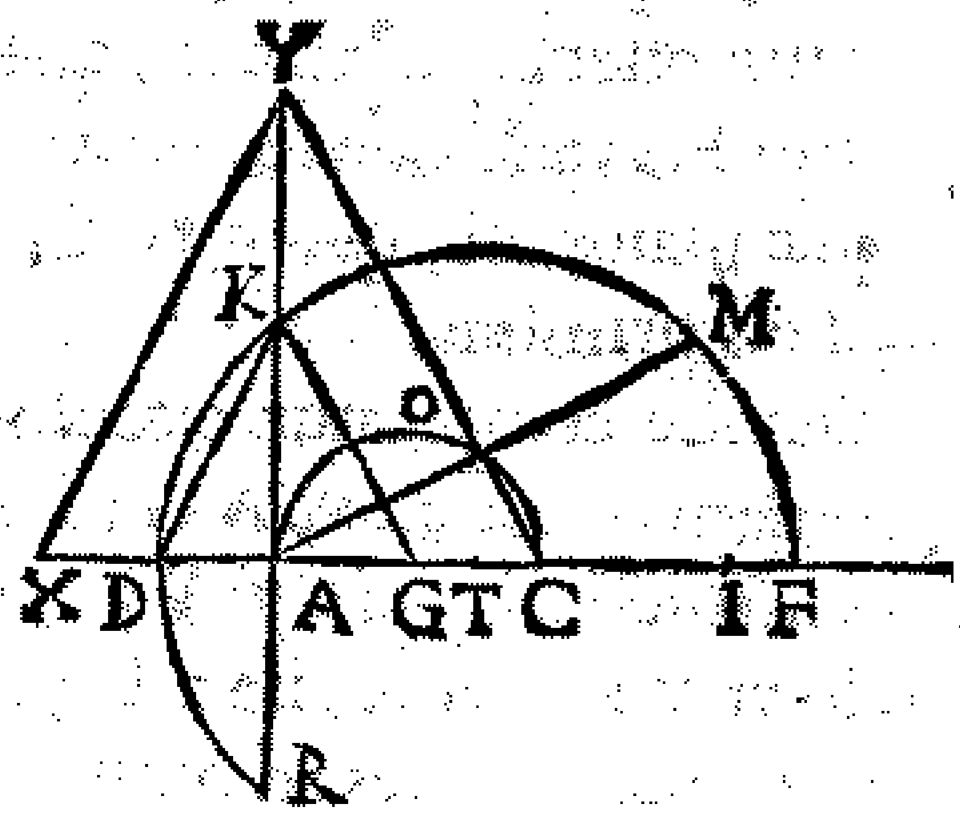
C

Lemma XXIV.

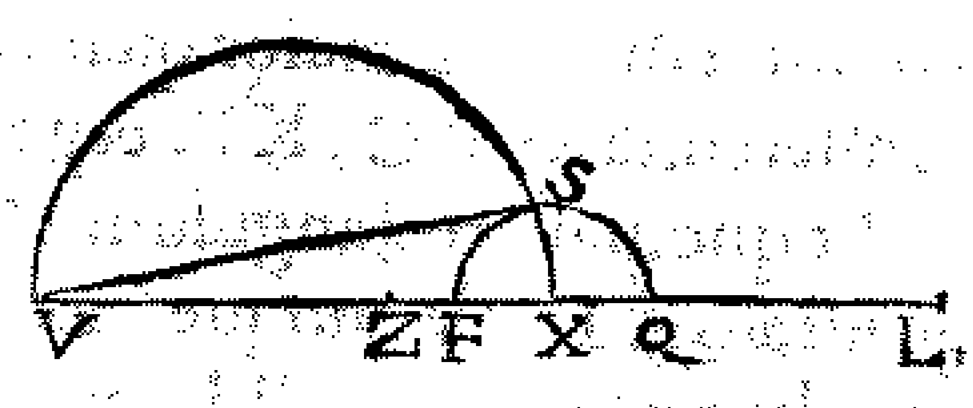
D Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. sed semicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F, & data v Z non sit maior minore rectarum A K, F C. Dico neque differentiam rectarum v N, N S, neque compositam ex ipsis minorem esse quam A K, aut maiorem quam A F: & punctum z existere in ipsa differentia.

Sit V P differentia rectarum V N, N S, V Q vero aggregatum earundem, & compleatur circulus F E, D R, quem k a producta secet in R, & iungantur G k, K D, eisque parallelæ agantur C Y, Y X, secantes A K, A B productas in punctis Y X. erit igitur vt A G ad A C,

lem. 17. * ita A K ad A y: sed ita est quoque V Z ad Z L ex constructione. ergo vt V Z ad Z L, ita erit A K, hoc est A R ad A y. & permutando vt V Z ad A R, ita Z L ad
12. quinti A y. & consequenter * ita V L ad R y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed V Z non est maior quam A R, ponitur enim V Z non maior minore rectarum a k, F C. ergo neque V L maior erit quam R y. A



Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L (sunt enim æquales V Q, P L) æ-
36 terti quale * est quadrato V S, hoc est quadrato
lem. 17 A I, cui quoque * æquale est rectangulum y A K, rectangulum V P L æquale erit rectangulo y a k, vel y a R, & ideo proportionales erunt V P, y a, a R, P L. sed V L composita ex extremis ostensa est non maior, quam y R B



the. 2. huius composita ex medijs. ergo si est minor, erit * altera mediarum y a, a k maxima, altera minima. sed a y maior est quam a R, ergo ipsa a R, hoc est a k, minima erit: & per consequens V P maior quam a K. Si vero V L composita ex extremis æqualis est y R compositæ ex medijs,
the. 3 huius * minor extremarum minori mediarum æqualis erit. hoc est V P æqualis a R, vel a k.

Et quoniam V P minor est quam V S, hoc est quam a I, ipsaque a I minor quam a F, erit V P ipsa a F multo minor. Recta igitur V P differentia rectarum V N, N S non est minor quam a k, nec maior quam a F. quod est primum. C

lem 17 Simili ratione quoniam est vt a G ad a C, * ita F C ad C X, & ita V Z ad z L ex constructione, ergo vt V z ad z L, ita erit F C ad
12 quinti C X. & permutando vt V z ad F C, ita erit z L ad C X, & ita * quoque V L ad F X omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed V z non est maior quam F C, ponitur enim V z non maior minore rectarum a k, F C. ergo neque V L maior erit quam F X. Et quoniam re-
lem. 17 ctangulum F a X * æquale est quadrato a I, & recta a I minor quam a F: erit a X multo minor. D

Rursus quoniam rectangulum Q V P, hoc est V Q L, sunt enim æquales
36. terti; lem. 17. V P, Q L, * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato a I, cui quoque * æquale est rectangulum F a X, ipsa rectangula V Q L, F a X æqualia erunt, & ideo
16 sexti proportionales * V Q, F a, a X, Q L: sed V L composita ex extremis ostensa est
The. 2. huius non maior, quam F x cōposita ex medijs. ergo si est minor erit altera * mediarū F a, a x. Maxima, altera minima. sed a x ostensa est minor quam a F, ergo F a maxima erit. quare V Q minor quam a F. Si vero V L composita ex extre-

A extremis æqualis est F X composita ex medijs, * maior extremarum maiori mediarum æqualis erit, hoc est V Q æqualis A F. The.3 huius

Et quoniam est vt A G ad A C, minor nempe ad maiorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione, quadratum A k minus erit quadrato A I. vnde & recta A k minor quam recta A I, hoc est quam recta V S; sed V Q maior est, quam V S, ergo multo maior erit quam A K. Recta igitur V Q composita ex V N, N S non est minor, quàm A k, nec maior quam A F, quod est secundum.

Postremo quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. & ita V z ad z L vtrumque ex constructione, erit vt V z ad z L, ita quadratum A K ad quadratum A I, hoc est ad quadratum V S, seu ad re-

B ctangulum P V Q, vel v P L. sed vt v z ad z L ita * est quoque quadratum v z ad rectangulum v z L; sunt enim eiusdem altitudinis v z. ergo vt quadratum v z ad rectangulum v z L, ita erit quadratum A k ad rectangulum v P L. sed quadratum v z non est maius quadrato A K: ponitur enim recta v z non maior minore rectarum A K, F C. ergo si est minus erit, & rectangulum v z L minus rectangulo v P L. quare punctũ B * propinquius erit ipsi N, quam punctum Z, atque vterque existit in medietate v N. ergo punctum z erit in recta v P. Si vero quadratum v z æquale est quadrato A k, erit & rectangulum v z L æquale rectangulo v P L. quare punctum Z idem erit, quod punctum P. itaque z erit in recta v P. quod vltimo loco erat ostendendum. lem.27 12 quinti

C

Scholium.

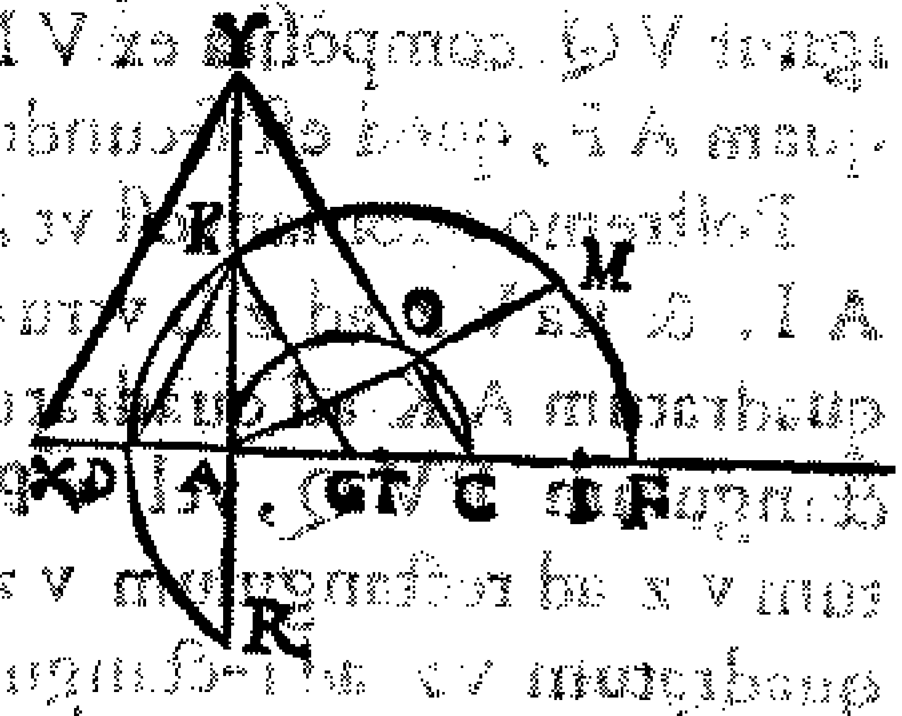
Ex demonstratis patet si A D ad A F minorem rationem habeat quam A G ad A C, & semicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F, atque data v z non sit maior minore rectarum A k, F C, Problema duobus modis posse absolui. Nam si à puncto A ad circumferentiam K F ducatur recta A M æqualis A I, vel v S secans semicirculum A B C in O: erit M O * minima omnium, quæ inter circumferentias A B C, k F intercipiuntur, Et quoniam v P differentia rectarum v N, N S minor est, quàm v S, hoc est quam A M, non autem quam A k, vt demonstrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta lem.29

D A E æqualis v P.

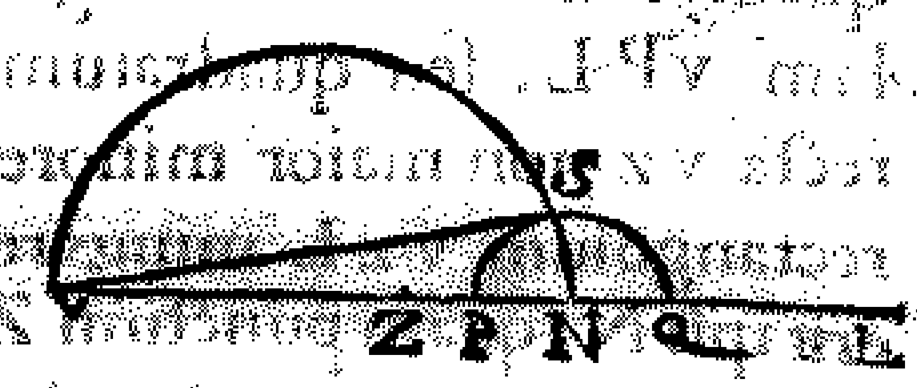
Similiter quoniam recta v Q composita ex v N, N S maior est quam v S, hoc est quam A M, non autem quam A F, vt demonstrauimus; poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta A E æqualis v Q. Itaque si recta A E ducatur æqualis v P, aptabitur recta æqualis datæ v z inter circumferentias K M, A O. si vero ducatur æqualis v Q, aptabitur inter circumferentias M F, O C. poterit igitur aptari ex vtraque parte minimæ, atque adeo Problema duobus modis absolui. quod in tertio præcepto monuimus.

Lemma XXV.

Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & semicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F: sed data V Z sit maior minore rectarum A k, F C, & à puncto A ad circumferentiam k F ducatur A M æqualis A I; est enim A I,* minor quàm A F, maior quam A k. Dico si A K maior sit quam F C, differentiam rectarum V N, N S maiorem esse quam A K, minorem autem quam A M, & punctum z existere in ipsa differentia: sin minor compositam ex V N, N S minorem esse quam A F, maiorem autem quam A M, & punctum z existere in ipsa composita.



Sit enim V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S; V Q vero æqualis compositæ ex ipsis, & connectantur G K, k D, eisque parallelæ agantur C y, y x secantes A k, A D productas in punctis y x, & compleatur circulus F E, D R, quem K A producta secet in R, & sit primum A k maior, quam F C: ergo ipsa A k maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias A B C, k F. quare recta datæ V z æqualis poterit aptari inter circumferentias K M, A O. non etiam inter circumferentias M F, O C cum sit V z maior quàm F C, ex positione, ipsa autem F C * maxima omnium interceptarum inter circumferentias M F, O C.



Et quoniam est vt A G ad A C, *ita A K ad A y, & ita V z ad z L, ex constructione; erit vt V Z ad Z L, ita A k, hoc est A R, ad A Y. & permutando vt V Z ad A R, ita Z L ad A y. & ita* V L ad R Y; omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, sed V Z minor est quam A R. ponitur enim V Z minor maxima A k. ergo & V L minor erit quam R y.

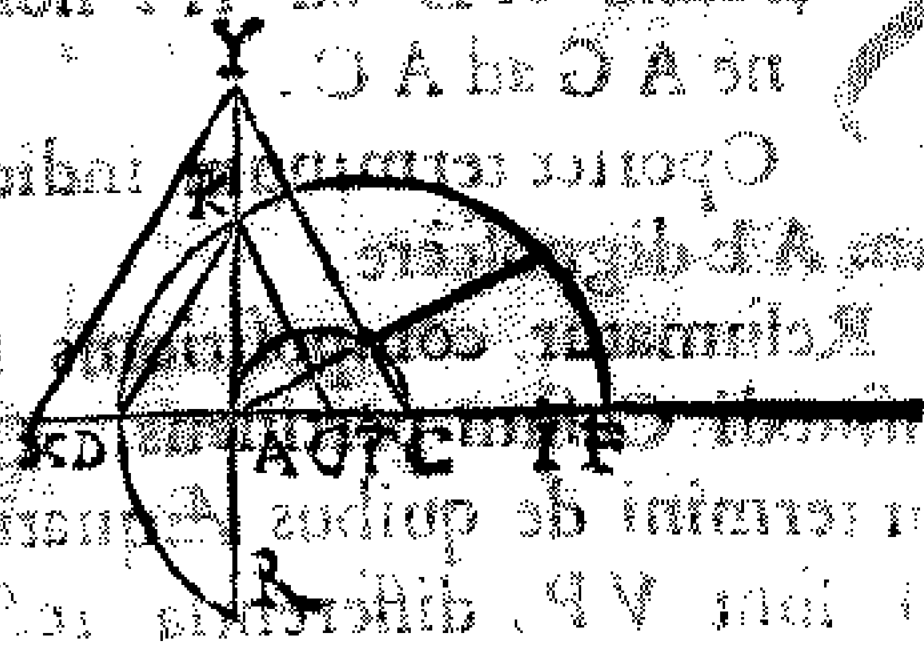
Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L,* æquale est quadrato V S, vel quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum y A K, hoc est y A R, ideo æqualia erunt rectangula V P L, y A R; & ideo* proportionales V P, y A, A R, P L. sed V L composita ex extremis ostensa est minor quam y R composita ex medijs. ergo* altera mediarum y A, A R maxima erit, altera minima; sed A R minor est quam A y. ergo ipsa A R minima erit, & consequenter V P maior quam A R hoc est quam A K. Ipsam autem V P minorem esse quam A M patet, cum ipsa V P minor sit quam V S, cui æquales sunt A I, A M, ex constructione.

Rursus quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratũ A I, & ita V z ad z L vtraque ex constructione erit vt V z ad z L, ita quadratum A k ad quadratum A I, hoc est ad quadratũ V S, seu ad * rectangulum P V Q, vel V P L. sed vt V z ad z L, ita est* quoq; quadratum V z ad rectangulum,

cum

A cum sint eiusdem altitudinis V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum A K ad rectangulum V P L, sed quadratum V z minus est quadrato A K; ponitur enim recta V z minor maxima, quæ est A k. ergo & rectangulum V z L minus erit rectangulo V P L. quare punctum P * propinquius erit ipsi N, quam punctum z. itaq; punctum z erit in in recta V P. Existente igitur A K maiori, quam F, recta V P differentia rectarum V N, N S maior est, quàm A L, minor autem quam A M, atq; punctum z existit in recta V P. quod est primum. lem. 18

Deinde sit A k, minor quam F C. ergo F C * maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias A B C, k F. quare recta data V z æqualis poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias k M, A O, cum ponatur V z maior quam A K, quæ est * maxima omnium interceptarum inter circumferentias K M, A O. lem. 21



B

Corol. le. 21

lem. 17

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita F C ad C x, & ita V z ad z L, ex constructione, erit vt V z ad z L ita F C ad c x; & permutando vt V z ad F C, ita erit z L ad C x, & consequenter * ita V L ad F x, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed V z minor est quam F C; ponitur enim V z minor maxima interceptarum inter circumferentias A B C, k F, ergo & V L minor erit, quam F x. Et quoniam rectangulum F A x * æquale est quadrato A I, & recta A I minor quam A F, erit A x multo minor. 11 quinti

C

lem 19

Et quoniam rectangulum Q V P, vel V Q L * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est reganctulum F A x, rectangula V Q L, F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V Q, F A, A x, Q L, sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quam F x, composita ex medijs, ergo * altera mediarum F A, A X maxima erit, altera minima. sed A x ostensa est minor quam F A, ergo ipsa F A maxima erit, quare V Q minor quam A F. Ipsam autem V Q maiorem esse, quam A M manifestum est, cum ea maior sit, quam V S, cui æqualis est A I, vel A M ex constructione. 36 tertij lem 17 the. 2 huius

D

Similiter punctum z existere in recta V Q constat. nam cum sit vt A G ad A C minor ad maiorem, ita V z ad z L ex constructione, erit & V z minor, quam z L vnde punctum z erit in recta V N, & consequenter in recta V Q. Existente igitur A k minori, quàm F C, recta V Q composita ex V N, N S minor est, quàm A F, maior autem quam A M, & punctum z existit in ipsa V Q. quod secundo loco erat ostendendum.

Resolutio prædicti Casus quemadmodum tertij, & quarti incidit in æquationem de duobus terminis explicabilem, quorum non semper vterque indicat quæsitam A E, isque Casus parum distat à prædictis, idcirco eadem fere

ratione

ratione terminus ipsam quæsitam indicans dignoscitur; quo tamen constantior vndique cernatur methodus, hic quoque breuiter ostendam quomodo terminus quæsitam A E indicans à non indicante discernatur. A

Propos. I.

Terminum quæsitam A E indicantem, in semicirculis ad primum Præceptum pertinentibus dignoscere.

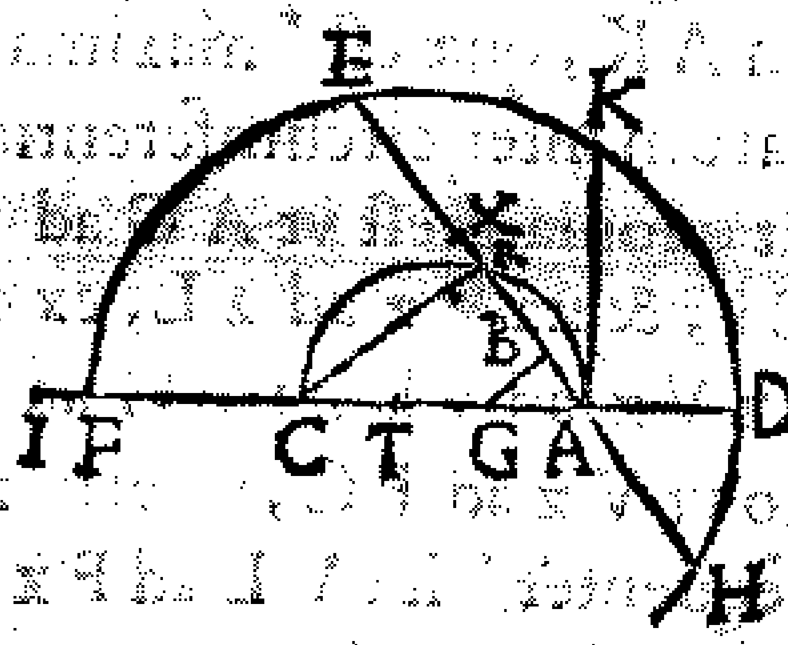
Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C.

Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere.

2 A D 4
4 A C 8
3 C F 6
3.5 6 A I 3.224
1 A G 2

Resumatur compositionis figura ad huiusmodi Casum pertinens. Quoniam igitur termini de quibus Æquatio explicabilis est sunt V P. differentia rectarum V N, N S. & V Q aggregatum earundem. V Q autem maior est quam V S, hoc est quam A I, & consequenter multo maior quam A E, de qua quæritur; est enim *A I non maior quam A F. itaq; v Q non indicat ipsam A E. ergo eam indicat v P. Itaque existente ratione A D ad A F non minori, quàm A G ad A C, differentia rectarum v N, N S indicat A E quæsitam; agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum primum constitutum est. B

lem 19



C

Propos. II.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad secundum Præceptum pertinentibus dignoscere.

vide fol. 224 Cas. 7

Sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. & semicirculus A B C non extendatur vltra T centrum circuli D E F.

Oportet terminum quæsitam A E indicantem dignoscere. Resumatur compositionis figura ad hunc Casum pertinens. D

Termini de quibus æquatio explicabilis est sunt v P aggregatum rectarum v N, N S, & v Q differentia earundem. Et quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A L ad quadratum A I ex constructione. & A G in hac semicirculorum positione non minor quam A C: ergo neque quadratum minus erit, quadrato A I. quare nec recta A K minor, quam recta A I, sed A E quæsita maior est, quam A K; ergo maior etiam, quàm A I, hoc est quam V S. & consequenter multo maior, quam v Q: recta igitur v Q non indicat quæsitam A E. ergo eam indicat v P. Itaque existente ratione A D ad A F maiore, quam A G ad A C, & semicirculo A B C non extenso vltra

centrum

A centrum circuli DEF. aggregatum rectarum VN, NS indicat quæsitam AE. Agnitus est igitur terminus ipsam quæsitam indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum secundum constitutum est.

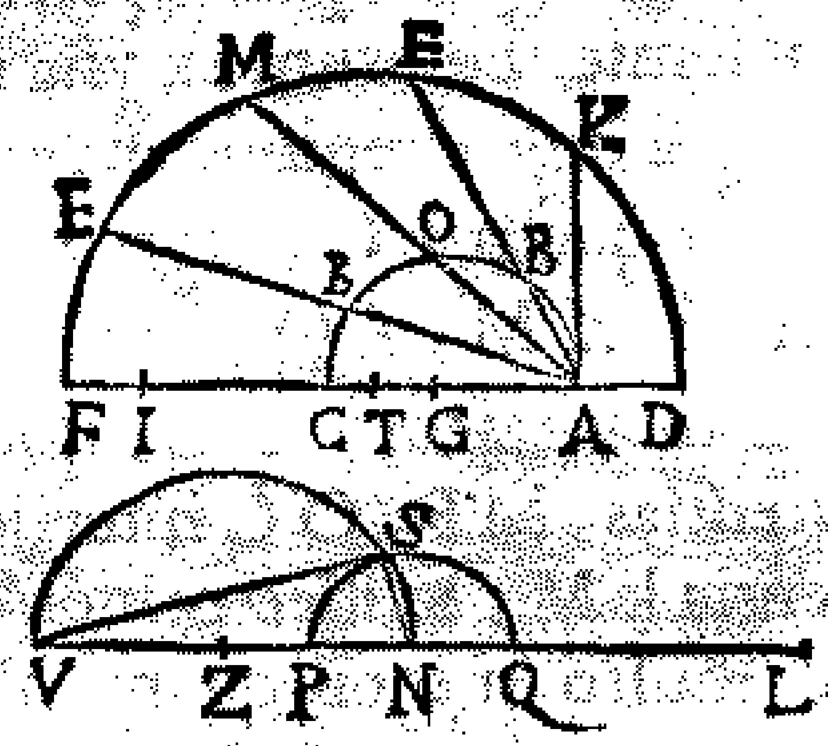
Propos. III.

Terminum indicantem quæsitam AE in semicirculis ad tertium Præceptum pertinentibus dignoscere.

RVrsus sit ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC. sed semicirculus AB extendatur vltra centrum T, & data Vz non sit maior minore rectarum AK, FC.

B Oportet terminum indicantem quæsitam AE dignoscere.

Resumatur compositionis figura pertinens ad hunc Casum



Quoniam igitur est. vt AG ad AC, ita quadratum Ak ad quadratum AI, ex constructione; & AG in hac semicirculorum positione minor est, quam AC; erit & quadratum AK minus quadrato aI, vnde & recta ak minor, quam recta aI, seu quod idem est aI maior, quam ak; sed ipsa * aI minor est quam aF, ergo poterit à puncto A ad circumferentiam KF

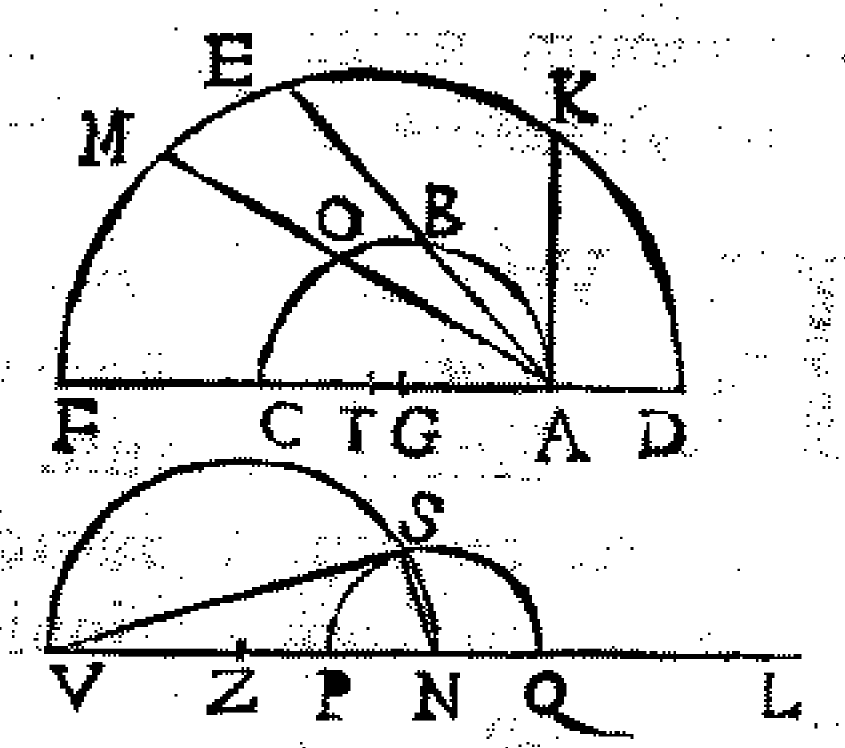
C duci recta AM æqualis AI; ducatur igitur AM secans semicirculum aBC in O. Aut igitur quæsita aF terminatur in circumferentia kM, vel in circumferentia MF: potest enim terminari in vtraque nam recta æqualis datæ Vz potest aptari inter circumferentias semicirculorum ex vtraque parte minimæ MO, cum ipsa Vz ponatur non maior minore rectarum ak, FC. si igitur aE desinit in circumferentia kM; ea minor est, quam aM, hoc est, quam aI, seu quam VS, & multo minor quam VQ aggregatum rectarum VN, NS, quod est vnus è duobus terminis de quibus A quatio explicabilis est; alter vero est VP differentia rectarum VN, NS. Tertio minus igitur VQ non est idoneus ad indicandam aE quæsitam, ergo eam indicat VP.

D Si vero quæsita aE desinit in circumferentia MF, ea maior est, quam aI, seu quam VS, & multo maior quam VP, recta igitur VP non indicat ipsam quæsitam. ergo eam indicat VQ. Quando igitur ratio aD ad aF minor est ratione aG ad aC, & semicirculus aBC extenditur vltra centrum T, atque data Vz non est maior minore rectarum aK, FC, indicat quæsitam aE, tum differentia tum aggregatum rectarum VN, NS. differentia quidem cum aE desinit in circumferentia kM; aggregatum vero cum desinit in circumferentia MF. Agnitus est igitur terminus quæsitam aE indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum tertium constitutum est.

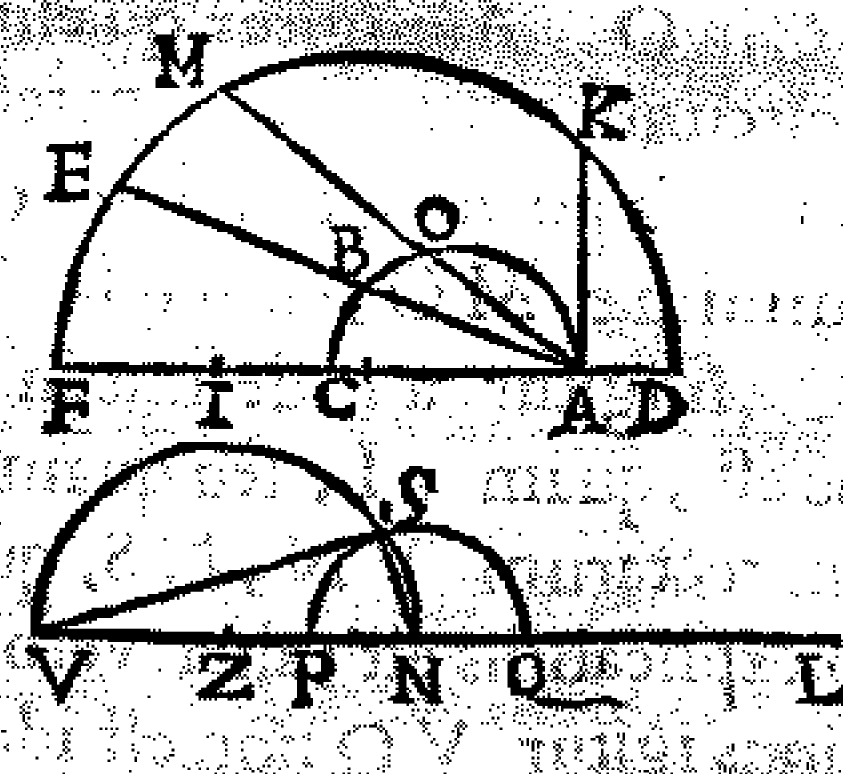
Propos.

Propos. IV. A

Terminum indicantem quæsitam a E in semicirculis ad Præceptum quartum pertinenibus dignoscere.



RVrsus sit ratio a D ad a F minor ratione a G ad a C, & semicirculus, a B C extendatur vltra T centrum circuli D E F, sed dat V z sit maior minore rectarum a K, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam a E dignoscere. Facta constructione vt in antecedenti Propositione, manifestum est rectam B datæ V z æqualē posse aptari inter circumferentias semicirculorum ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum A K, F C. Itaque sit primum A K maior quam F C, ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias K M, A O, non autem inter circumferentias M F, O C, cum sit Corol. le. 21 V z maior quam F C, ipsaque F C * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur. ergo A E quæsita desinit in circumferentia k M, & ideo minor est quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S: terminus igitur v Q non indicat quæsitam A E. ergo eam indicat V P differentia ipsarum V N, N S. C



Sed sit F C maior quam A k. ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias K M, A O, & A E quæsita desinit in circumferentia M F, & ideo maior est quam A M hoc est quam A I, seu quam V S, & per consequens multo maior quam V P differentia rectarum V N, N S. ipsa igitur v P non indicat quæsitam A E, ergo V Q aggregatum rectarum v N, N S eam indicat. Cum igitur ratio A D ad A F minor est ratione A G ad A C, & semicirculus A B C extenditur vl- D tra centrum T, atque data v z maior est minore rectarum A K, F C, existente A k maiore, quam F C differentia rectarum v N, N S indicat A E quæsitam. existente vero F C maiore quam A R, aggregatum. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum quartum constitutum est.

Casus. VIII.

Rursus vergant ad diuersas partes dati duo semicirculi. maior si compleretur minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi mino-

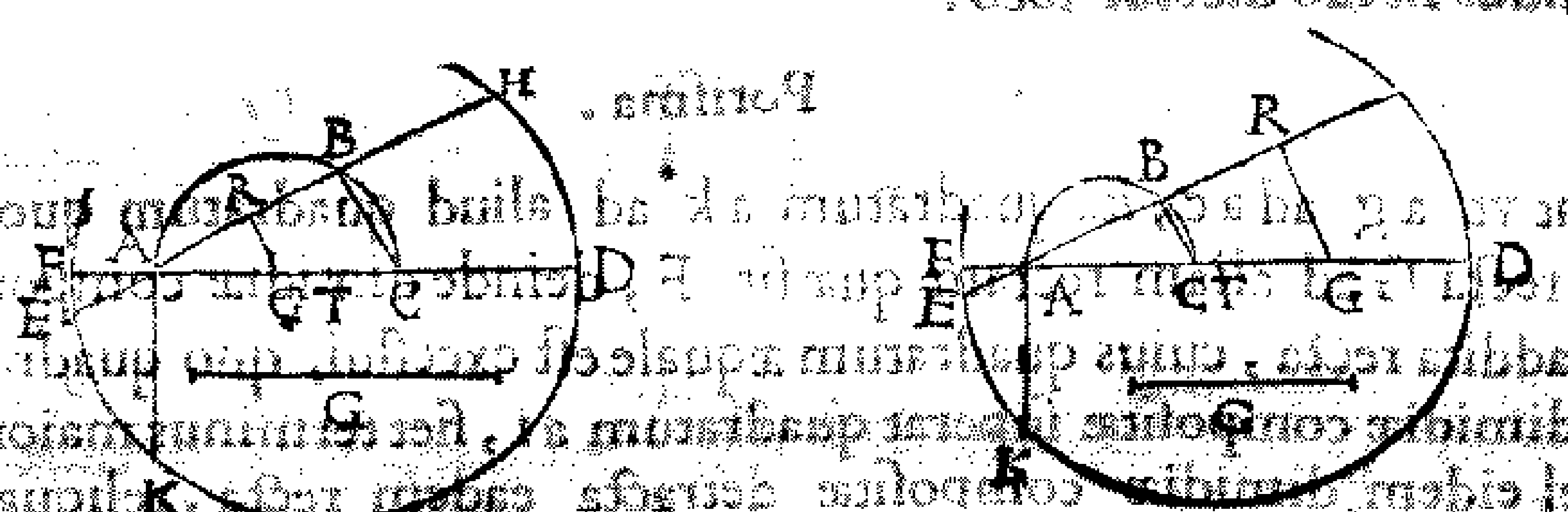
A minoris; sed ab eo angulo semicirculus maior minus distet, quam à reliquo.

Int igitur tales dati duo semicirculi a b c, d e f; data autem recta linea G, & à puncto a demittatur ipsi d f perpendicularis a k, vsque ad circumferentiam d e f.

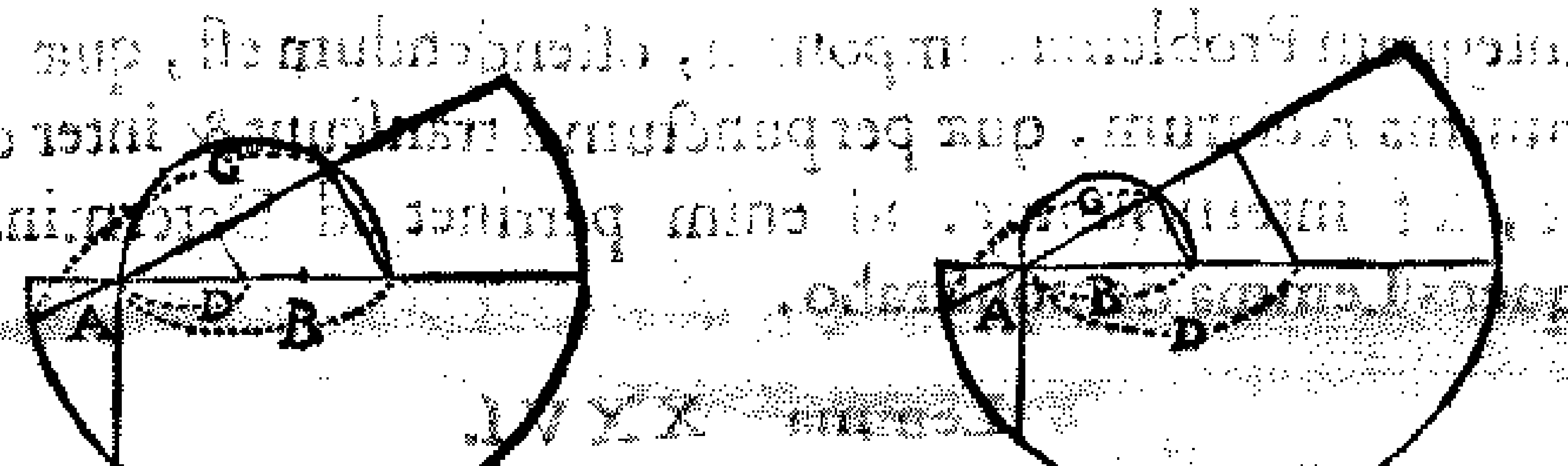
Oportet inter circumferentias a b c, K f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertineat.

Resolutio.

B Sit iam posita recta linea e a b æqualis datæ G, & ex centro circuli d e f, quod sit t, ponatur t g æqualis t c, & compleatur circulus f e, d h, quem e b producta secet in h, & ipsi e h ducatur perpendicularis



C



g r, & ducatur b c. ea quoque eidem e h perpendicularis erit; cum sit rectus angulus a b c in semicirculo. quare æqualis erunt h r, e b.

Datarum autem a c, a g, b e, a k prima sit B. secunda D. tertia G. quarta K, vt designatura est in figuris ad resolutionem pertinentibus. & quæratur

D a e. esto illa A. ergo a b erit G -- A. & cum sint similia triangula a b c, a r g, erit vt a c ad a g, ita a b ad a r. quod in figuris ad resolutionem pertinentibus respondet: vt B ad D ita G -- A ad $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$, cui addita r h æquali e b tota a h erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B} + G$. sed rectangulum e a h æquale est quadrato a k, ergo

$$G \text{ in } A + \frac{D \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } A\,Q}{B} \text{ æquabitur } K\,Q.$$

Ducantur omnia in B, ergo

$$B \text{ in } G \text{ in } A + D \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } A\,Q \text{ æquabitur } k\,Q \text{ in } B.$$

Et applicentur omnia ad D, vt Potestas æquationis ex se subsistat, ergo.

$$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} + G \text{ in } A - A\,Q \text{ æquabitur } \frac{k\,Q \text{ in } B}{D}.$$

Sed

Sed vt Æquario facilius explicetur transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in resolutionibus præcedentium Casuum factum est; hoc est A
fiat vt D ad B, ita k Q ad aliud quadratum quod sit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam rectam, quæ sit F, eritq. F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$. & planum F in A idem, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur trasmutatione.

F in A ✢ G in A -- A Q æquabitur Z Q.

Vel F ✢ G in A -- A Q æquabitur Z Q

Et explicata Æquatione. $F\frac{1}{ij}$ ✢ $G\frac{1}{2}$ ✢ L.V. ($F\frac{1}{2}$ ✢ $G\frac{1}{2}$ Q -- Z Q) æquabitur A

Vel $F\frac{1}{2}$ ✢ $G\frac{1}{2}$ -- L. V. ($F\frac{1}{ij}$ ✢ $G\frac{1}{ij}$ Q -- Z Q) æquabitur A

In hac quoque Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, sed cum in omni Casu non possit sumi vterque ad indicandam a e quæsitam, inter B
sumendus sit suo dicetur loco.

Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k* ad aliud quadratum quod sit a i. & ita recta G ad aliam rectam quæ sit F, deinde dimidiæ compositæ ex F, & G addita recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ compositæ superat quadratum a i, fiet terminus maior.

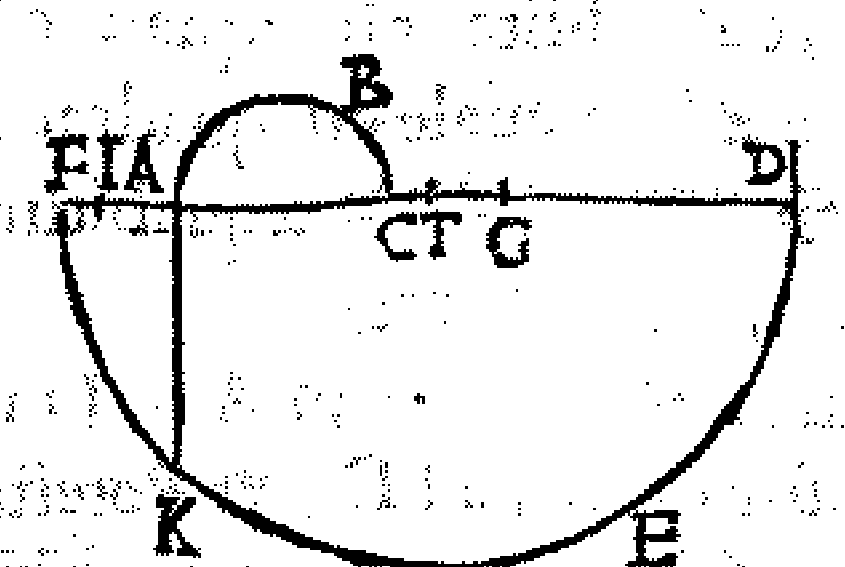
Vel eidem dimidiæ compositæ detracta eadem recta, reliqua erit terminus minor.

Sed antequam Problema componam, ostendendum est, quæ sit maxima, quæue minima rectarum, quæ per punctum a transeunt & inter circumferen- C
tias a b c, k f interijciuntur. id enim pertinet ad Determinationem, sed prius sequens Lemma demonstrabo.

Lemma XXVI.

Sint duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur, & recta A k perpendicularis ipsi F D secet semicirculum D E F, in K, & ex centro circuli D E F, quod sit T sumatur T S æqualis T C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico si ratio A D ad A F minor est ratione A G ad A C, & rectam A I minorem esse, quam A F, & si æqualis, æqualem: & si maior maiorem. D

PRimum sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. ergo minor erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I: est enim vt A G ad A C, ita quadratum a k ad quadratum A I; sed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium a D, a k, a F ad tertiam, ita est quadratum secundæ a K ad quadratum A F tertiæ. ergo ratio



F A	4
A C	$\frac{1}{2}$
C G	2
A D	9
A K	6
A I	R. 15 $\frac{3}{7}$

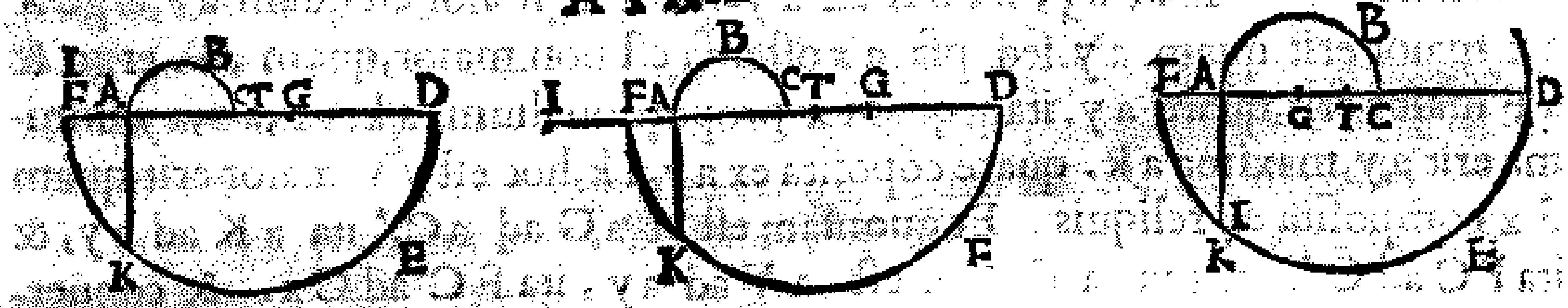
qua-

A quadrati A K ad quadratum A F minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I. quare quadratum a I minus erit quadrato A F. vnde & recta A I, minor, quàm recta A f. quod est primum.

Sit deinde ratio A D ad A f eadem, quæ A G ad A C. ergo eadem erit ratio & quadrati A k ad quadratum A I. sed vt A D ad A f, prima nempe ad tertiam, trium proportionalium A D, A k, A f; ita est quadra-

F A	2
A C	1
A D	6

F A	2
A C	4
A D	18
A G	12
A I &	12

B 

tum secundæ A k ad quadratum A f tertiæ, ergo quadratum A I quadrato A f æquale erit. vnde & recta A I æqualis rectæ A f. quod est secundum.

Sit tertiò ratio a D ad a f maior ratione a G ad a C. ergo maior erit & ratione quadrati a L ad quadratum a I, cum sit vt a G ad a C, ita quadratum a L ad quadratum a I, ex constructione. sed vt a D ad

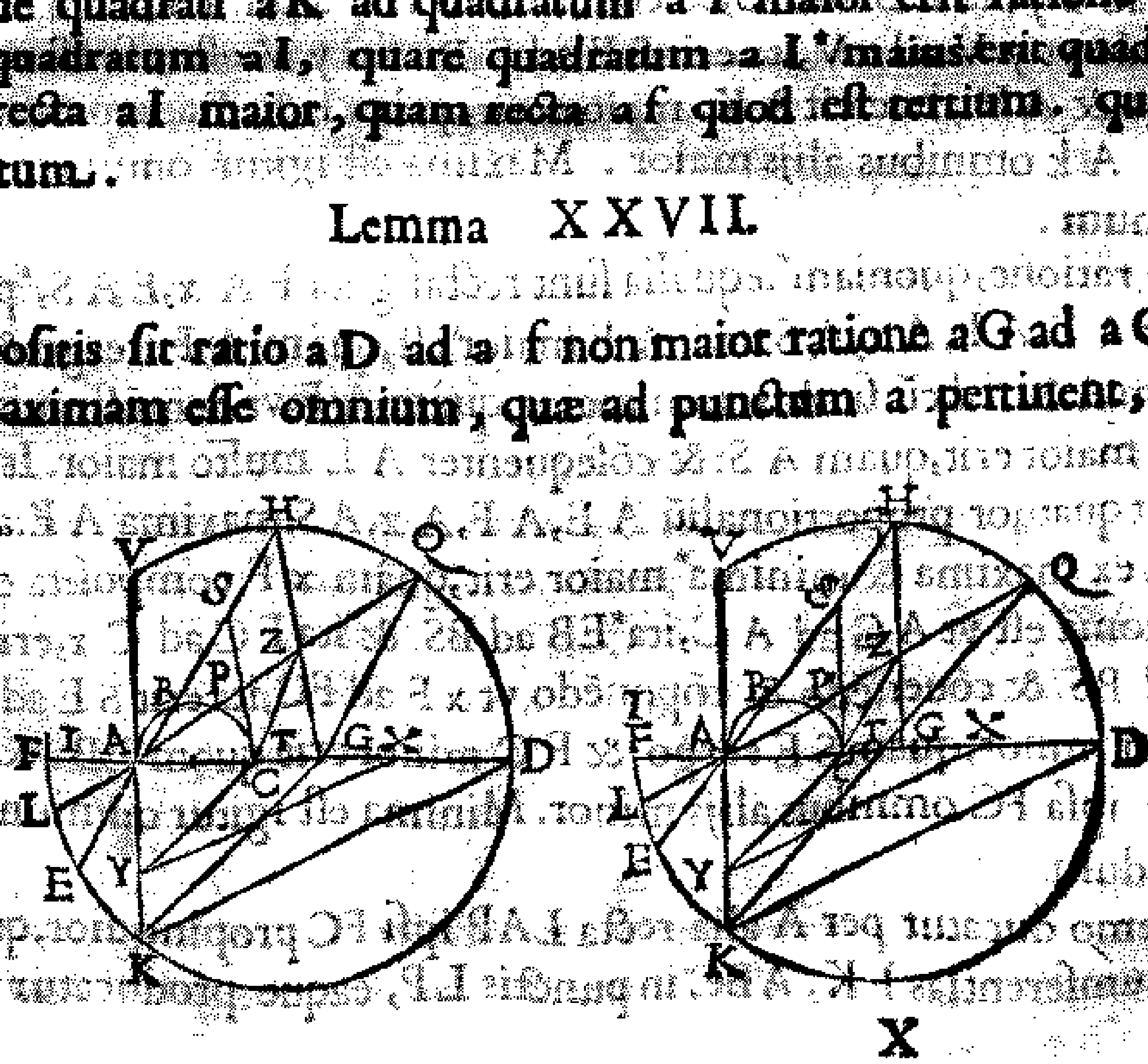
C a f, ita est quadratum a k ad quadratum a f, vt demonstrauimus, ergo ratio quoque quadrati a K ad quadratum a f maior erit ratione quadrati a K ad quadratum a I, quare quadratum a I *maius erit quadrato a f. vnde & recta a I maior, quam recta a f quod est tertium. quare constat propositum. 2. quinti

Lemma XXVII.

Isdem positis sit ratio a D ad a f non maior ratione a G ad a C. Dico a K maximam esse omnium, quæ ad punctum a pertinent, & inter

A F	2
A C	1
A D	6

F A	4
A C	$1\frac{1}{2}$
C G	2
A D	9
A K	6
A I &	15



cir-

circumferentias a B C, K f interijciuntur, minimam vero f C. Aliarum A
autem propinquiorem minimæ, remotiore minorem esse.

Ducatur enim per a vtcunque recta linea E a B secans circumferentias k f, a B C in pūctis E B, & cōpleatur circulus f E, D H, quē E B, K a productæ secent in punctis H V, & connectantur G K, K D, G H, quibus parallelæ agātur C y, y X, C S secantes a K, a D, a H in punctis y X S. erit igitur rectangulum
lem. 17 F a X* æquale quadrato a I, vnde proportionales erunt a F, a I, a X. sed a I, ex antecedente Lemmate, non est maior quam a F, eo quod ratio a D ad a F ponitur nō maior ratione a G ad a C. ergo neque a x maior erit, quam a I, nec ideo
corol. lem. 17 16 sexti maior quam a F. Rursus quoniam rectangulum F a X* æquale est rectangulo Y a K. erit* vt a K ad a F, ita a X ad a y. sed a K maior est quam a F, ergo & a x maior erit, quam a y. sed ipsa a x ostensa est non maior, quàm a F. ergo & B
a F maior erit, quam a y. itaq; quatuor proportionalium a k, a F, a x, a y minima erit a y, maxima a k. quare cōposita ex a y, a k, hoc est y V maior erit, quàm
lem. 17 F x composita ex reliquis. Et quoniam est vt a G ad a C,* ita a K ad a y, & ita F C ad C X erit vt a K, hoc est a V ad a y, ita F C ad C x. & conuertendo vt y a ad a V, ita x C ad C F. & componendo vt y V ad V a, ita x F ad F C, sed y V ostēsa est maior quā x F. ergo & V a, hoc est a k, maior erit quā F C.
corol. lem. 17 16 sexti Similiter quoniā* æqualia sunt rectāgula y a K, E a S, erit vt* a k ad a E, ita a S
sexti ad a y: sed a K maior est, quam a E: ergo & a S maior erit, quā a y. est autem & a E maior quā a y, cum sit & a F maior, vt demōstrauimus. ergo quatuor
25 quinti proportionalium a k, a E, a S, a y minima erit a y, maxima a k. quare cōposita ex a y, a K, hoc est recta y v,* maior erit, quàm S E composita ex reliquis. C
lem. 17 Et quoniā est vt a G ad a C,* ita E B ad B S, & ita a k ad a y. erit vt a k, hoc est a V ad a y. ita E B ad B S, & cōuertendo vt y a ad a V, ita S B ad B E, & cōponendo vt y V ad a V, ita erit S E ad E B. sed y V ostensa est maior, quam S E, ergo & A V, hoc est A K, maior erit, quàm E B. Eadem ratione ostendetur ipsa A k omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium A k: quod est primum.

corol. lem. 17 16 sexti Eadē ratione, quoniam* æqualia sunt rectangula F A x, E A S,* proportionales erunt A E, A F, A x, A S: sed A E maior est, quàm A F. ergo & A x maior erit, quàm A S. sed cū sit A x non maior, quàm A F, vt demōstrauimus, ergo & ipsa A F maior erit, quam A S: & cōsequenter A E multo maior. Itaq; A S minima erit quatuor proportionaliū A E, A F, A x, A S. maxima A E. atq; adeo S E D
25 quinti cōposita ex maxima & minima* maior erit, quàm x F composita ex reliquis.
lem. 17 Et quoniā est vt A G ad A C, ita* E B ad B S. & ita F C ad C x, erit F C ad C x vt E B ad B S. & cōuertēdo, & cōponēdo vt x F ad F C, ita erit S E ad E B. sed x F ostensa est minor, quam S E: ergo & F C minor erit quam E B. & sic demonstrabitur ipsa F C omnibus alijs minor. Minima est igitur omnium F C; quod est secundum.

Postremo ducatur per A alia recta L A P ipsi F C propinquior, quàm E B, secans circumferentias F K, A B C in punctis L P, eaque producatur donec secet

cir-

A circulum F E D completum in Q; & iungatur G k, & ei parallela agatur C Z secans ipsam L Q in Z. rectangula igitur L A Z, E a S æqualia* erunt, coro. lem. 17 16 sexti
& ideo* proportionales a L, a E, a S, a Z. sed a L minor est, quam A E. ergo & a S minor erit, quàm a Z. Et quoniam rectangulum E a S* æquale lem. 17
est quadrato a I: proportionales erunt a E, a I, a S; sed a E maior est, quàm a I cum ipsa a I non* sit maior quam a F. ergo & a I maior erit quam a S. 17 sexti
itaque ipsa a S minor erit, quam a L, & multo minor, quam a E, atque est minor quam a Z, vt demonstrauimus. ergo ipsa a S minima erit quatuor proportionalium a L, a E, a S, A Z: maxima ideo a E. vnde E S composita ex maxima, & minima* maior erit, quàm L Z composita ex reliquis, hoc est L z minor, quàm E S.

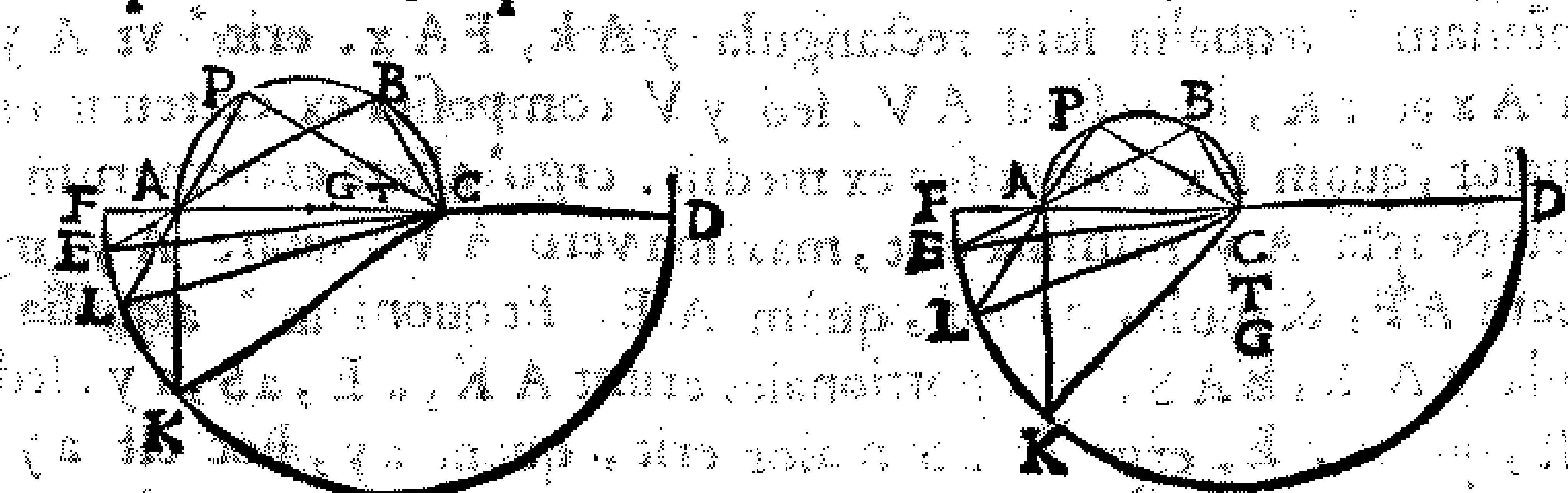
B Et quoniam est vt a G ad a C,* ita E B ad B S, & ita L P ad P z. erit vt lem. 17
L P ad P z, ita E B ad B S. & conuertendo vt z P ad p L, ita S B ad B E. & componendo vt z L ad L p, ita S E ad E B. sed z L ostensa est minor, quàm S E, ergo & L p minor erit quam E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. quod tertio loco erat ostendendum.

Lemma XXVIII.

RVrsus ijsdem positis ratio autem A D ad A F sit maior ratione A G ad A C. Dico si semicirculus A B C extenditur vltra centrum circuli D E F, aut ipsum centrum attingit, rectam F C maximam esse omnium, quæ ad punctum A pertineat, & inter circumferentias A B C, k F
C interijciuntur, minimam A k. Si vero nec extenditur, nec centrum illud attingit; ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam A B C in O: est autem A I* maior, quàm a F, lem. 16
minor vero, quàm a K. cum sit vt a G ad a C maior nempe ad minorem, ita quadratum a k ad quadratum a I ex positione. Dico maiorem rectarum a K, F C maximam esse; M O minimam. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore ex eadem parte minorem esse.

Ducatur enim per A vtcunque recta linea E a B secans circumferentias F K a B C in punctis E B, & primum semicirculus a B C, vel extendatur vltra cen-

D

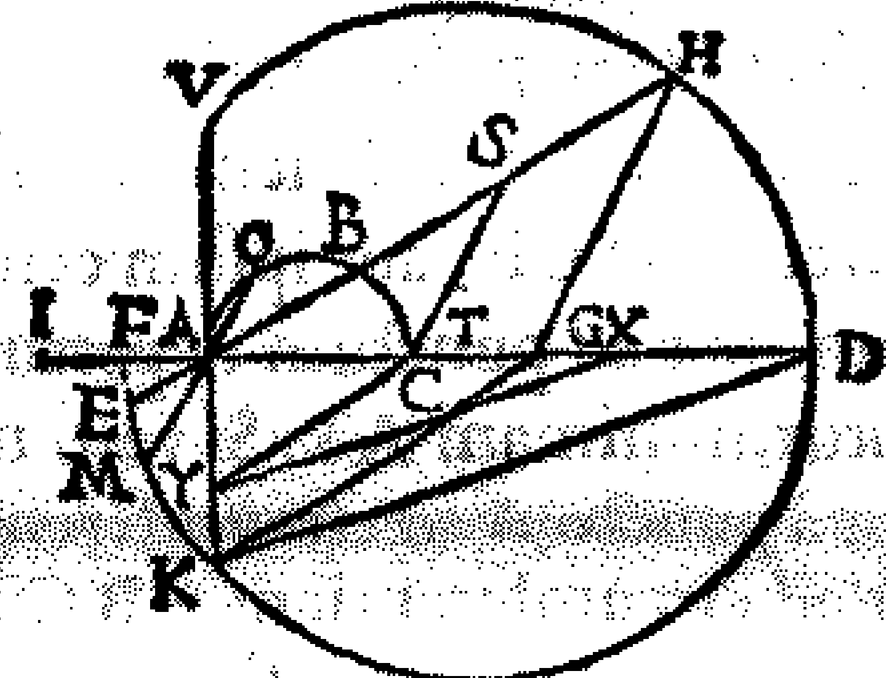


trum circuli D E F, quod sit T, vel ipsum centrũ attingat, & connectantur C K C E, C B. angulus igitur E B C in semicirculo rectus erit. quare E C basis trianguli E B C, maior erit latere E B. sed F C non est minor, quam E C: ergo & F C maior erit quã E B, & sic ostẽdetur maior omnibus alijs. Maxima est igitur F C.

Rursus quoniam C K non est maior quam C E. ideo nec quadratum C k A
47 primi maius erit quadrato C E; sed quadratum C k * æquale est quadratis A K, A C, & quadratum C E æquale quadratis E B, B C. ergo nec quadrata A K, A C maiora erunt quadratis E B, B C: sed quadratum A C maius est quadrato B C. ergo reliquum quadratum A K minus erit reliquo quadrato E B. vnde & recta A K minor, quàm recta E B. atque eadem ratione ostendetur minor omnibus alijs. Minima est igitur A k.

Ducatur autem alia recta L A P ipsi A K propinquior quam E B, secans circumferentias F k, A B C in punctis L P, & iungantur C P, C L. angulus igitur L P C in semicirculo rectus erit; Et quoniam C L non est maior quam C E, nec quadratum C L maius erit quadrato C E. idest nec quadrata L P, P C maiora erunt quadratis E B, B C; sed quadratum P C B
maius est quadrato B C. ergo reliquum quadratum L P minus erit reliquo quadrato E B. quare & recta L P minor, quam recta E B. idest propinquior minimæ minor remotiore.

Sed non extendatur semicirculus A B C vltra centrum T, nec ipsum centrum attingat. Producatur autem E B secans circulum completum in H, quem etiam k A producta secet in V, & iungantur G H, G k, K D, eisque parallelæ agantur C S, C y, y X secantes A H, A k, A D, in punctis S y X. & sit primum A k maior quam F C. Quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita F C ad C X, & ita A k ad A y. erit A K hoc est A V ad A y, vt F C ad C X. & permutando vt A V ad F C, ita A y ad C x. & con-



FA	2
AC	4
AG	16
AD	22
AKR	44
AIB	11

C

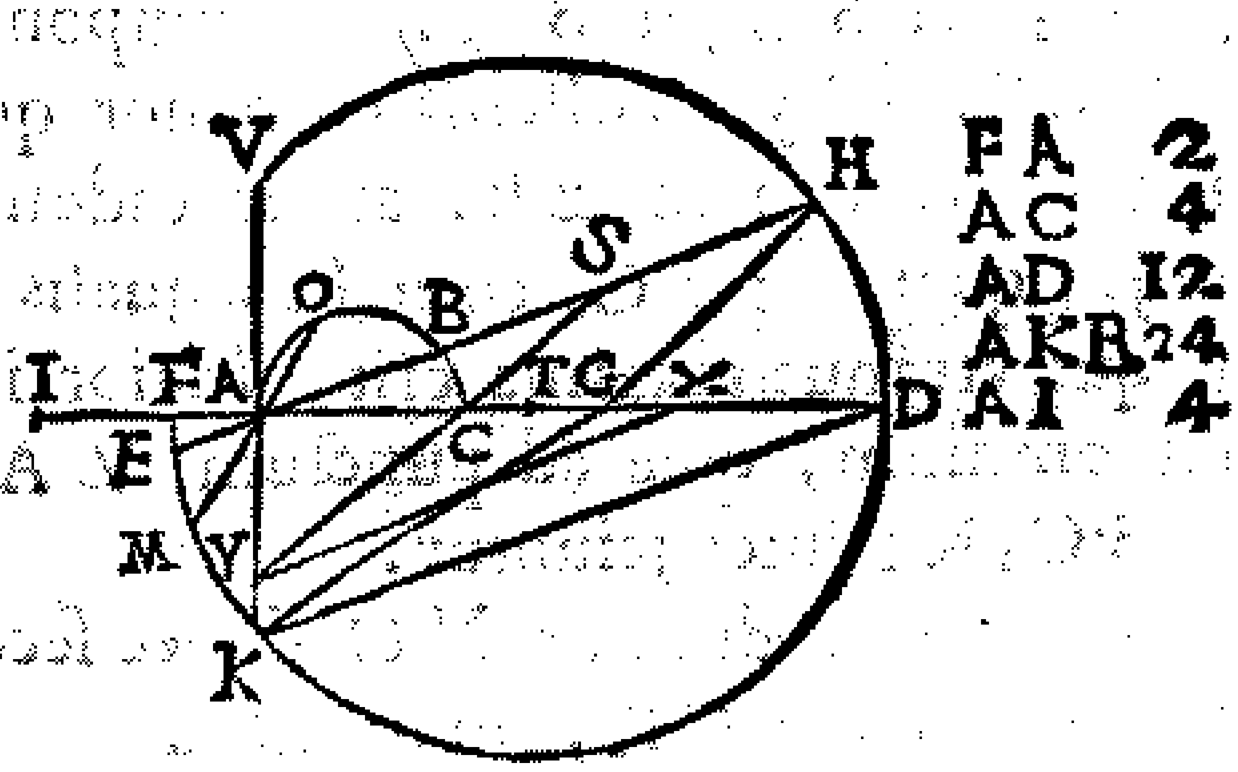
13 quinti sequenter * ita V y ad F x omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed A V, cui æqualis est A K, ponitur maior quam F C: ergo & V y maior erit quam F x.

corol. lem. 17 / 15 sexti Et quoniam * æqualia sunt rectangula y A k, F A x. erit * vt A y ad A F, ita A x ad a K, hoc est ad A V. sed y V composita ex extremis ostenTeor. 2 huius sa est maior, quam F x composita ex medijs. ergo * altera extremarum A y, D
A V, nempe ipsa A y minima erit, maxima vero A V. quare A y minor
corol. lem. 17 erit, quam A F, & multo minor, quàm A E. Et quoniam * æqualia sunt
16 sexti rectangula y A k, E A S, * proportionales erunt A K, a E, a S, a y. sed a k maior est, quam a E. ergo & a S maior erit, quam a y, hoc est a y minor, quam a S. sed ipsa a y est quoque minor, quam A E, vt demonstrauimus, & minor, quam a K; ergo ipsa A y minima erit quatuor proportio-
Teor. 1 huius nalium a K, a E, a S, a y. * maxima vero a K. vnde composita ex y a, a K maxima videlicet, & minima, hoc est recta y V, maior erit quam E S composita ex reliquis.

Et

A Et quoniam est vt a G ad A C, ita* E B ad B S, & ita a K ad a y; erit a K, hoc est a V ad a Y vt E B ad B S, & conuertendo, vt y a ad a F, ita S B ad B E, & componendo vt y V ad V a, ita erit S E ad E B. sed Y V ostensa est maior, quam S E, ergo & V a, hoc est a K, maior erit quam E B. & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium a K. Lem. xvj.

Sed sit F C maior, quàm A k. eadem ratione quoniam est vt a G ad a C, *ita F C ad C X, & ita a k ad a y. erit F C ad C X, vt a k, hoc est a V ad a y. & permutando vt F C ad a V, ita C X ad a Y. & consequenter ita F X ad V y, idest omnes antecedentes ad omnes consequentes. ibid.



B sed F C ponitur maior, quam a K, hoc est quam a V. ergo & F X maior erit, quam V y. sed F X composita est ex extremis quatuor proportionalium a F, a y, a V, a X. ipsa vero V y ex medijs, constat autem eas proportionales esse ex eo quod rectangulum F a X* æquale est rectangulo y a K, hoc est y a V. ergo* altera extremarum a F, a X maxima erit, altera minima. sed a F non est maxima, cum sit minor quam a V. ergo minima erit, & consequenter a X maxima itaque a X maior erit quam a V, & multo maior quam a E. Corol. xvij. Th. 2. huius

C Et quoniam* æqualia sunt rectangula F a X : E a S, proportionales erunt a F, a E, a S, a x. sed a F minor est, quam a E, ergo & a S minor erit, quam a X. est autem & a E minor quam a X, vt demonstrauimus. & consequenter a F multo minor itaque a X maxima erit quatuor proportionalium a F, a E, a S, a X. quare *a F minima, vnde F X composita ex maxima, & minima maior erit, quàm S E composita ex reliquis. Corol. xvij Teor. i. huius

Et quoniam est vt a G ad a C* ita F C ad C X, & ita E B ad B S. erit F C ad C x vt E B ad B S. & conuertendo vt x C ad C F, ita S B ad B E,* & componendo vt x F ad F C, ita S E ad E B. sed x F ostensa est maior quam S E; ergo & F C maior erit, quam E B. eademq. ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare maxima est omnium F C. quod est primum. lem. xvj

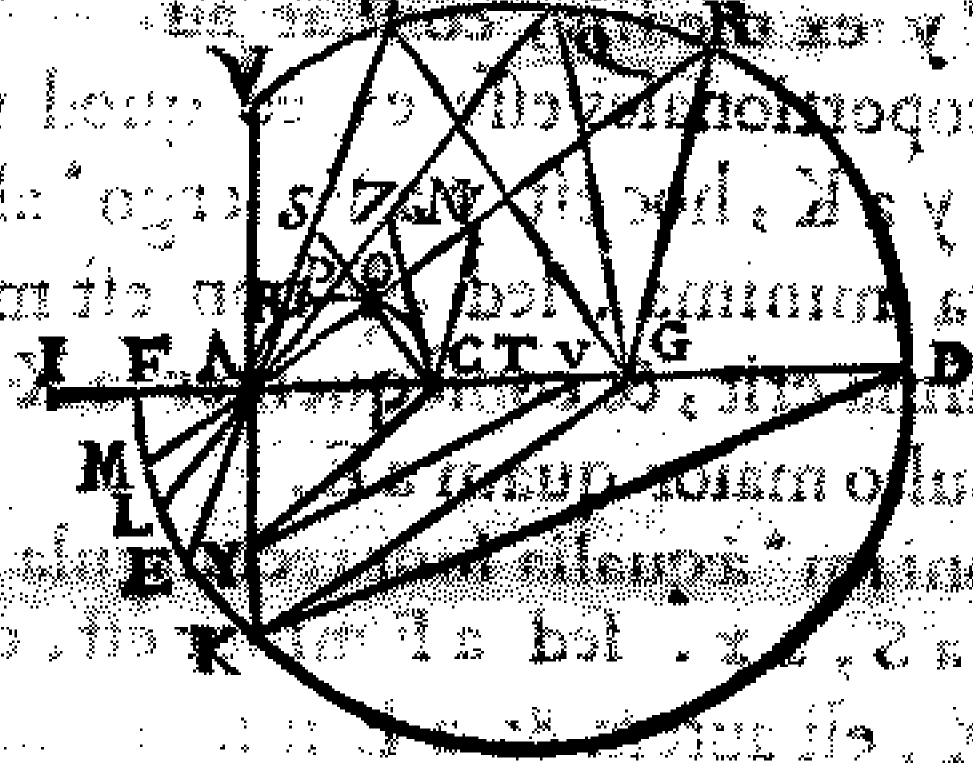
D Sed sint æquales a k, F C. Quoniam igitur est vt a G ad a C,* ita F C ad C x. & ita a k ad a Y. erit F C ad C X, vt a k ad a y: sed F C ponitur æqualis a k; ergo & C x æqualis erit a y. & additis æqualibus C F, a V, tota x F æqualis erit toti y V. sed x F composita ex extremis quatuor proportionalium F a, a y a V, a x; ipsa vero y V ex medijs. patet autem eas proportionales esse, quia rectangulum F a x* æquale est rectangulo y a K, hoc est Y a V. ergo maior extrema maiori mediæ, minor minori* æqualis erit. itaque a F altera ex extremis æqualis erit alteri ex medijs y a, a V. sed non est æqualis ipsi a V, quia minor est, ergo æqualis erit ipsi a y. ibidem Corol. lem. 17 Theor. 3 huius

Corol. lem. 17. Et quoniam rectangulum y A K, hoc est y A V æquale est rectangulo E A S, proportionales erunt A y, A E, A S, A V. Et A y cum sit æqualis A F, minor est quam A E. ergo & A S minor erit, quam A V. itaque quatuor proportionalium A y, A E, A S, A V maxima erit A V, & *con-sequenter minima A y. vnde y V composita ex maxima, & minima maior quam S E composita ex reliquis. A

Theori 8 hnius

lem. 17. Et quoniam est vt A G ad A C, ita* E B ad B S, & ita A k, hoc est A V ad A y, erit A V ad A y, vt E B ad B S. & conuertendo vt y A ad A V, ita S B ad B E. & componendo vt y V ad V A, ita erit S E ad E B. sed y V, ostensa est maior quam S E. ergo & V A, hoc est A k maior erit, quam E B. atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs: quare & F C, cum sit æqualis A k, erit quoque omnibus maior. itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum A k, F C maxima est omnium, quæ ad punctum V A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur. B

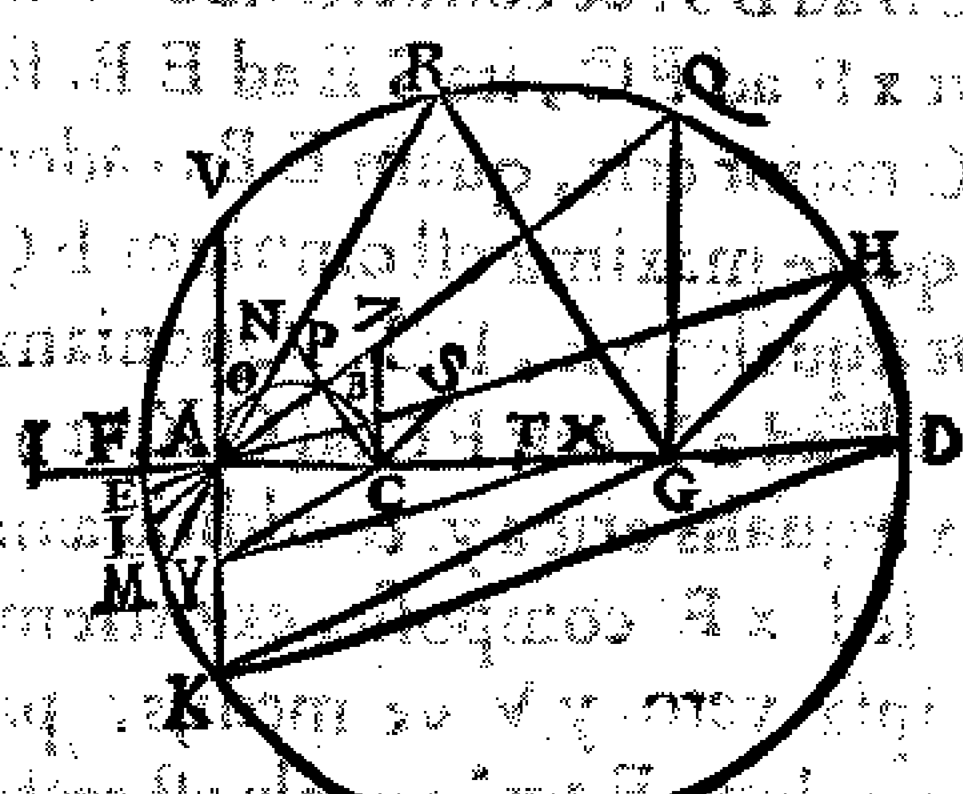
Deinde producatur M O donec secet circulum F E D completum in R, & connectatur G R, cui parallela agatur C N secans M R in N.



lem. 17 rectangulum igitur M A N * æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M; sunt enim æquales rectæ A I, A M, ex constructione. quare A M æqualis erit ipsi A N, & cum sit rectanguli F A X C

lem. 17 * æquale quadrato A I, hoc est quadrato A M; proportionales erunt a F, a M, a X: sunt autem & inæquales, quia a F minor est quam a M. ergo F X composita ex extremis maior erit quam dupla media, hoc est quam M N.

lem. 17 Et quoniam est vt a G ad a C, * ita F C ad C x. & ita M O ad O N erit F C ad C X, vt M O ad O N. & conuertendo vt X C ad C F, ita N O ad O M. & componendo vt X F ad F C, ita erit M N ad M O. sed X F ostensa est maior, quam N M. ergo & F C maior erit quam M O. Eadem ratione quoniam rectangulum y a K, hoc est y a V, D



lem. 17. * æquale est quadrato a I, vel qua-

17 sexti drato a M, * proportionales erunt y A, A M, A V: sunt autem & inæquales. ergo y V composita ex extremis maior erit, quam M N, media videlicet dupla. Et quoniam est vt A G ad A C, ita A K ad A y. &

ita

A ita MO ad ON: erit vt AK vel AV ad AY, ita MO ad ON. & conuertendo vt y A ad AV, ita NO ad OM. & componendo vt y V ad VA, ita erit NM ad MO. sed y V ostensa est maior, quam NM: ergo & VA, vel Ak, maior erit quam MO.

Atque quoniam rectangulum EAS* æquale est quadrato AI, hoc est quadrato AM; proportionales erunt AE AM AS; sunt autem & inæquales. ergo ES composita ex extremis maior erit, quam dupla media, hoc est quam MN. Et quoniam est vt AG ad AC,* ita EB ad BS: & ita MO ad ON. erit vt EB ad BS, ita MO ad ON. & conuertendo vt SB ad BE, ita NO ad OM. & componendo vt SE ad EB, ita erit NM ad MO. sed SE maior est, quàm NM, vt demonstrauimus, lem. 17 lem. 17

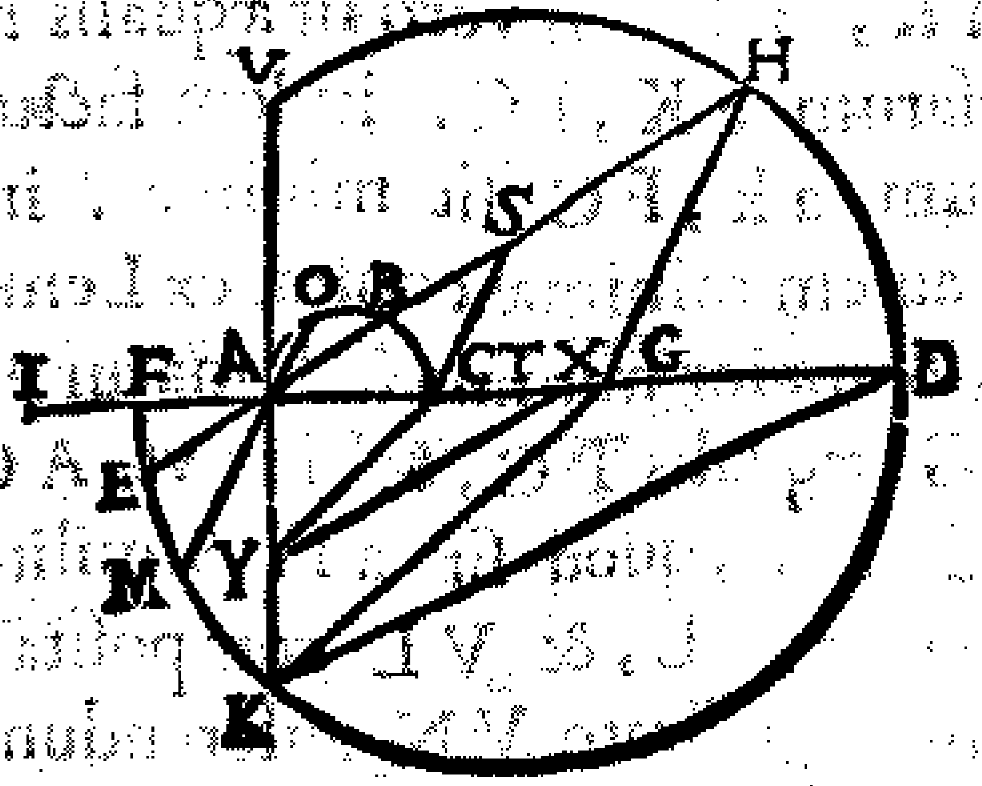
B ergo & EB maior erit, quam MO. Atque eadem ratione ostendemus omnes alias maiores esse ipsa MO. minima est igitur MO. quod est secundum.

Postremo ducatur per A alia recta LAP, ipsi MO propinquior, quam EB secans circumferentias Fk, ABC in punctis LP. & sint rectæ LP, EB ex eadem parte minimæ MO, & producatur LP donec secet circulum DEF completum in Q. & iungatur GQ; & ei parallela agatur CZ secans ipsam LQ in Z. Rectangula igitur LAZ, EAS* æqualia erunt, ac proinde proportionales AL, AE, AS, AZ. in prima quidem figura vbi AL, AE existunt inter rectas AM, Ak sic argumentor. sed AL minor est quam AE, ergo & AS minor erit, quam AZ. Et Corol. lem. 17

C quoniam rectangulum EAS* æquale est quadrato AI, hoc est quadrato AM; proportionales erunt AE, AM, aS. sed aE maior est quam aM, ergo & aM maior erit quam aS atque adeo aS, minor erit quam aL; & multo minor quam aE, atque est minor quam AZ, vt demonstrauimus; ergo ipsa aS minima erit quatuor proportionalium aL, aE, aS, aZ, &* consequenter aE maxima. quare ES composita ex maxima & minima* maior erit, quam LZ composita ex reliquis, hoc est LZ minor, quàm ES. lem. 17 Theor. 5 huius 25 quinti

In secunda vero figura vbi aL, aE existunt inter rectas aM, aE argumentor hoc modo. sed aL

D maior est quam aE, ergo & aS maior erit quam aZ. Et quoniam rectangulum EaS* æquale est quadrato aI, hoc est quadrato aM, proportionales erunt aE, aM, aS. sed aE minor est quam aM. ergo & aM minor erit quam aS. atque adeo aS maior erit quam aL; lem. 17



FA	2
AC	2
AG	4
AD	8
AK	4
AI	8

& multo maior quam aE. est quoque maior quam aZ, vt demonstrauimus; ergo ipsa aS maxima erit quatuor proportionalium aZ, aE, aS, az, & conse-

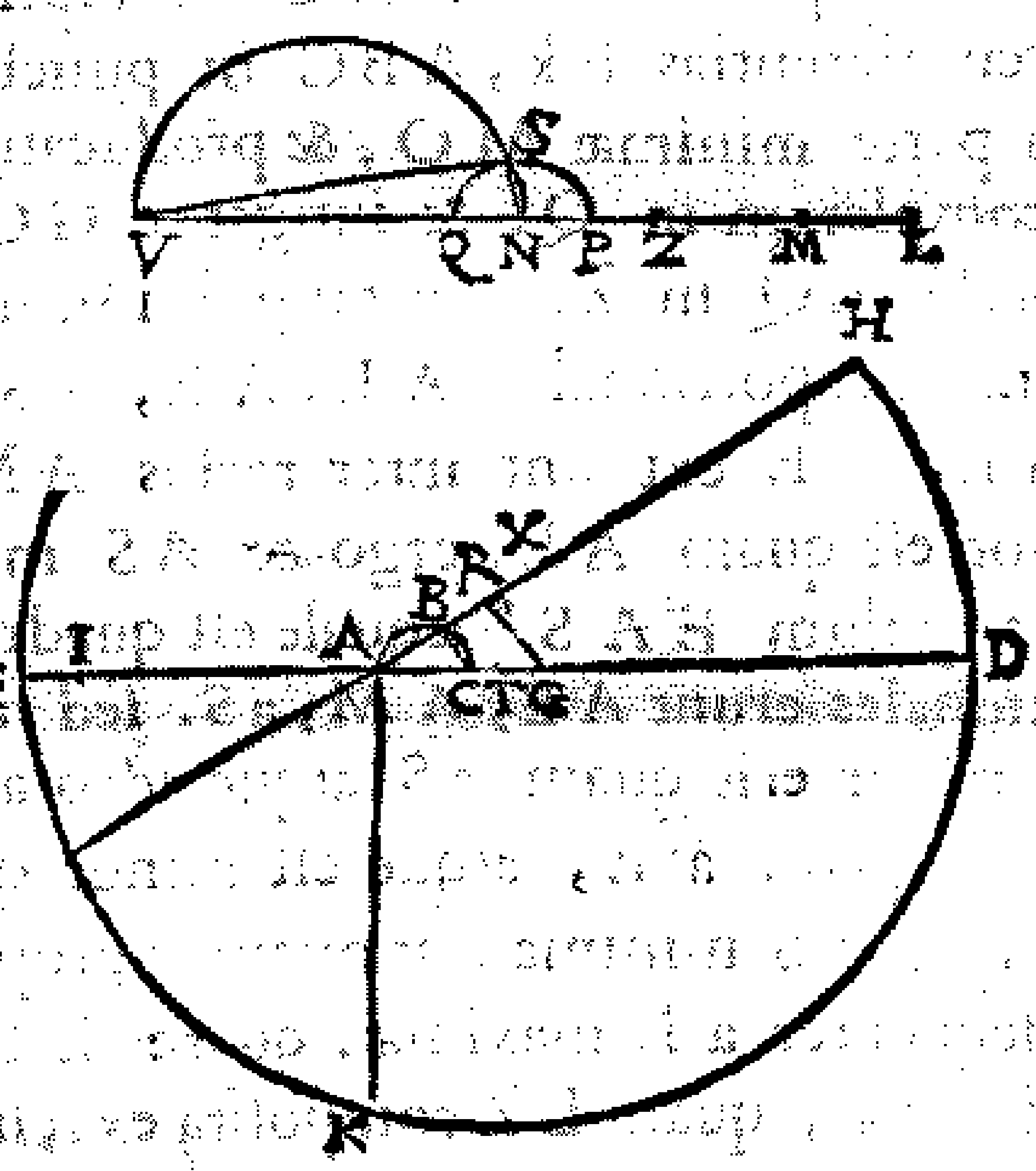
Th. 1 huius sequenter * a E minima. quare ES composita ex maxima, & minima maior erit, quàm LZ composita ex reliquis, hoc est L z minor quam E S. quod etiam demonstrauimus & supra. A

lem. 17 Et quoniam in vtroque casu est vt a G ad a C, ita E B ad B S, * & ita L P ad P z. erit vt L P ad P z, ita E B ad B S. & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad B E, & componendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B. sed Z L ostensa est minor, quàm S E. ergo & L P minor erit, quàm E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore ex eadem parte. quod tertio loco erat ostendendum.

Compositio octaui Casus.

SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti casu ponuntur, data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias A B C, DEF ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum A pertineat. B

Oportebit autem ipsam V z non esse maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias a B C, D E F interijciuntur. neque minorem minima. quæ autem sit maxima, quæue minima iam est demonstratum. C

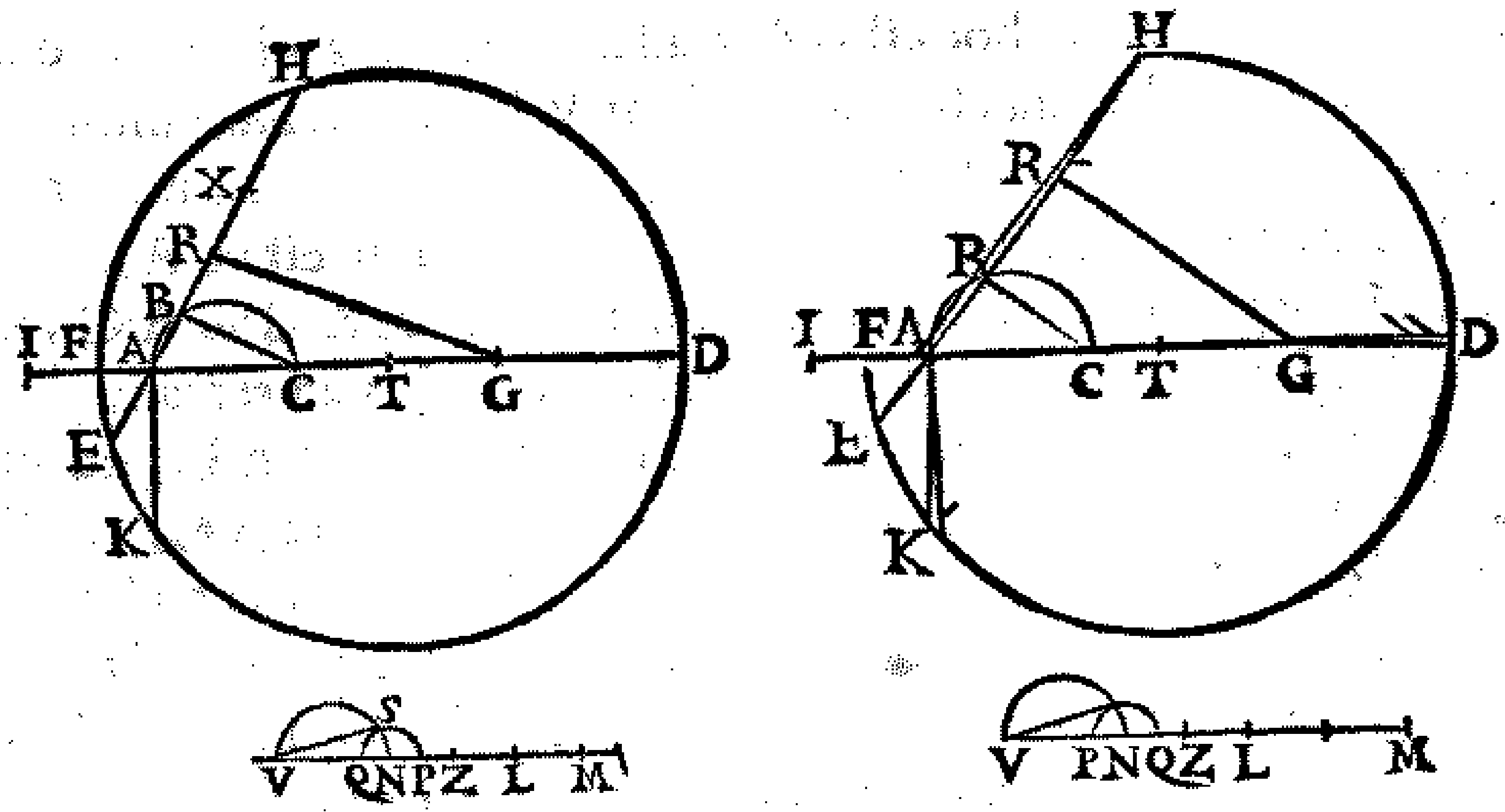


A F	4
A C	$1\frac{1}{2}$
C G	2
A D	9
A K	6
A I B.	$15\frac{3}{4}$

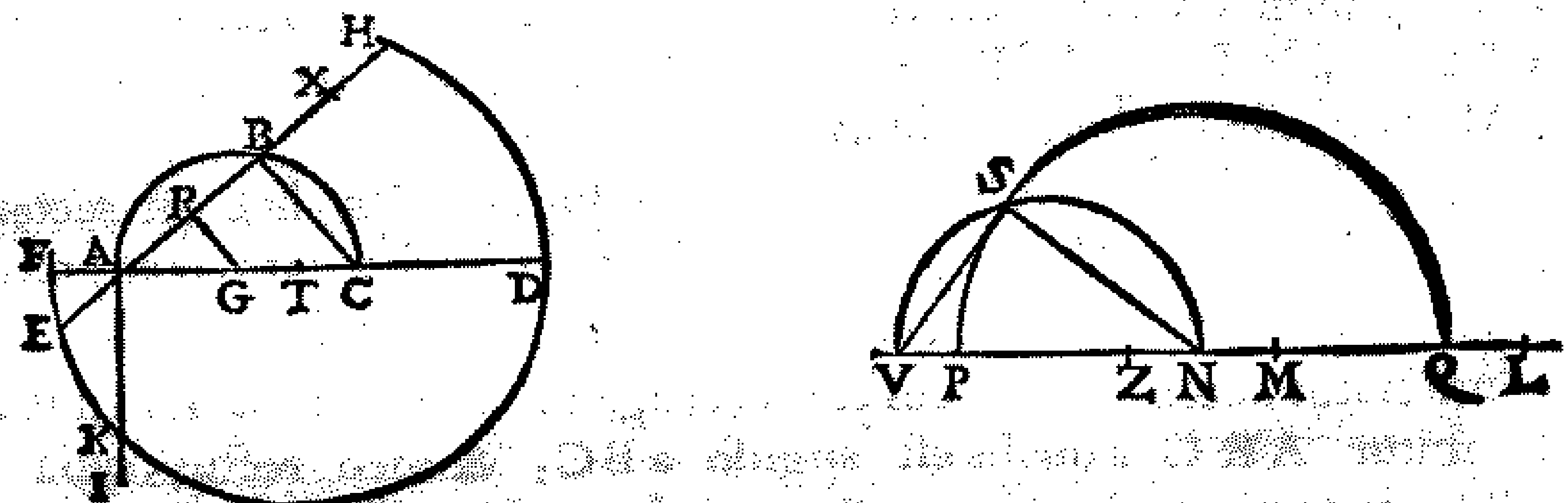
Ducatur a K ipsi F D perpendicularis secans semicirculum D E F in K, & si quidem data v z sit æqualis maximæ. factum iam erit, quod proponitur. etenim maxima est ea, quæ maior est rectarum a K, F C. si vero sit æqualis minimæ, minimaque sit ea, quæ minor est ipsarum a K, F C. itidem factum erit quod proponitur; si vero neutra rectarum a k, F C sit minima. inuenta minima Problemati satisfiet, inuentio autem minimæ constat ex Lemmate 31. Si autem V z minor sit maxima, & maior minima. sumatur ex centro circuli D E F, quod sit T, D

Probl. 1 huius recta T G æqualis T C, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum a K ad aliud quadratum, quod sit a I. Similiter fiat vt A G ad aC, ita V z ad aliam, quæ sit z L, & V L composita ex V z, z L secetur bifariam in N, cum igitur à quadrato V N auferendum sit quadratum A I, vt Porisma fieri præcipit; describatur in V N semicirculus, in quo accomodetur V S æqualis A I. infra ostendetur A I minor, quàm V N. Deinde connectatur SN. quadratum igitur V N superat quadratum V S quadrato SN; angulus enim

AF	2
AD	18
AC	4
AG	12
AI	√12



AF	2
AD	18
AC	4
AG	12
AI	√12



A enim V S N in ſemicirculo rectus eſt. itaque rectæ V N addenda eſt, vel auferenda recta æqualis N S. ſic Poriſma fieri iubet. addatur ergo, vel auferatur prout ſequentia Præcepta docebunt, eaque acuta vel diminuta ſit V P. ea non erit minor quam A F, nec maior quam A k, vt quatuor ſequentia Lemmata oſtendent. itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k F duci recta A E æqualis V P; ducatur igitur A E, & producatur donec ſecet ſemicirculum A B C in B. Dico rectam E B Problema efficere.

Compleatur enim circulus F E, D H, quem E B producta ſecet in H. & centro N interuallo N S, vel M P deſcribatur circulus ſecans rectam V L in Q. is circulus tangit rectam V S in S; quare quadratum V S æquale erit rectangulo P V Q, vel V P L, ſeu, quod idem eſt rectangulo V P,
B Z L, plus rectangulo V P Z: punctum enim Z exiſtit in recta P L, vt eadem quatuor ſequentia Lemmata oſtenderet. Si igitur fiat vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes itidem manebit inter eas partes æqualitas. At quoniam eſt, vt A G ad AC, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex conſtructione. erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum A I, hoc eſt quadratum V S ad quadratum A K. quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis. alteram vero ſic inueniemus. Primo quoniam eſt vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex conſtructione. erit conuertendo vt A C ad A G, ita L Z ad z O, vt autem L z ad z O, ita eſt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z: eandem enim habent altitudinem V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z.

Fiat

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L z ad z V, ita P z ad aliam, quæ sit z M A
vt autem P z ad z M, ita est rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M: sunt enim eiusdem altitudinis V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M. Et quoniam est vt A G ad A C, ita V z ad z L, ex constructione; erit conuertendo vt A C ad A G, ita L z ad z V. sed vt L z ad z V, ita est rectangulum v P, L z ad rectangulum P V z; eandem enim habent altitudinem V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z. sed vt A C ad A G, ita ostensum est rectangulum V P z ad rectangulum v P, z M: ergo, vt rectangulum v P, L z ad rectangulum P v z, ita erit rectangulum v P z ad rectangulum V P,
12 quint. Z M. sed vt vna antecedentium ad vnam consequentium, ita * sunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. ergo, vt rectangulum V P, L z ad B
rectangulum P v z, hoc est vt A C ad A G, ita erunt rectangula v P, L z, v P z, ad rectangula P v z, v P, z M. atque adeo rectangula P v z, v P, z M, erunt altera pars æqualitatis.

Itaque quadratum A K, hoc est rectangulum A k, hoc est rectangulum E A H, æquale erit rectangulis p v z, v p, z M, hoc est rectangulo P v M. sed P v æqualis est A E, ex constructione; ergo & v M æqualis erit A H. connectatur autem B C, cui parallela agatur G R secans E a in R. angulus igitur A R G æqualis est angulo a B C, & ideo rectus, quia & ipse
lem. 8. a B C in semicirculo rectus est, vnde * æquales sunt E B, H R. sumatur autem B x æqualis a R; tota E x æqualis erit toti a H. hoc est ipsi v M; sed E A æqualis est V P ex constructione. ergo & reliqua a x æqualis erit reliquæ P M. C

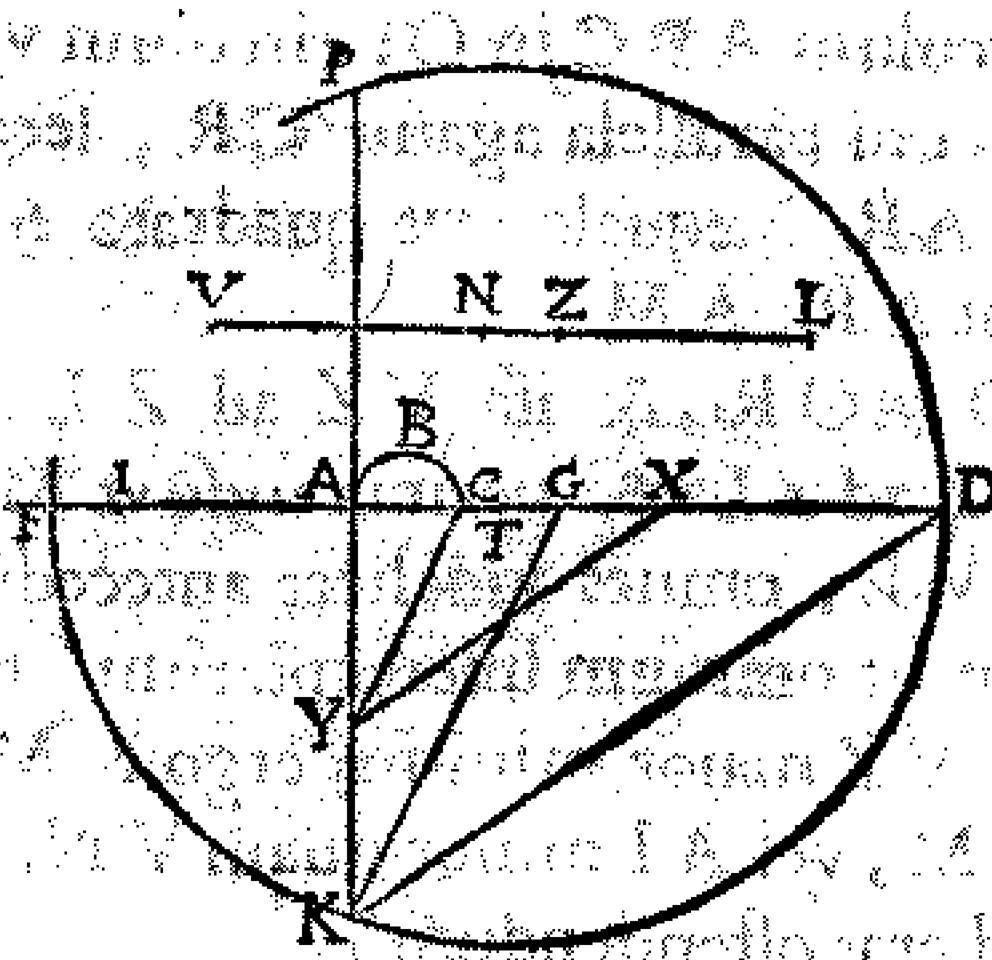
Et quoniam similia sunt triangula a B C, a R G; erit vt a C ad a G, ita a B ad a R. sed vt a C ad a G, ita est quoque p z ad z M, ex constructione; ergo vt a B ad a R, hoc est ad B X, ita erit p z ad z M. & componendo vt a x ad x B, ita p M ad M z. sed a x ostensa est æqualis p M. ergo & x B æqualis erit M z. sed tota E X ostensa est æqualis toti V M, ergo & reliqua E B reliquæ V z æqualis erit. Posita est igitur inter circumferentias a B C, K F recta E B æqualis datæ V z, eaque ad punctum a pertinet. quod faciendum.

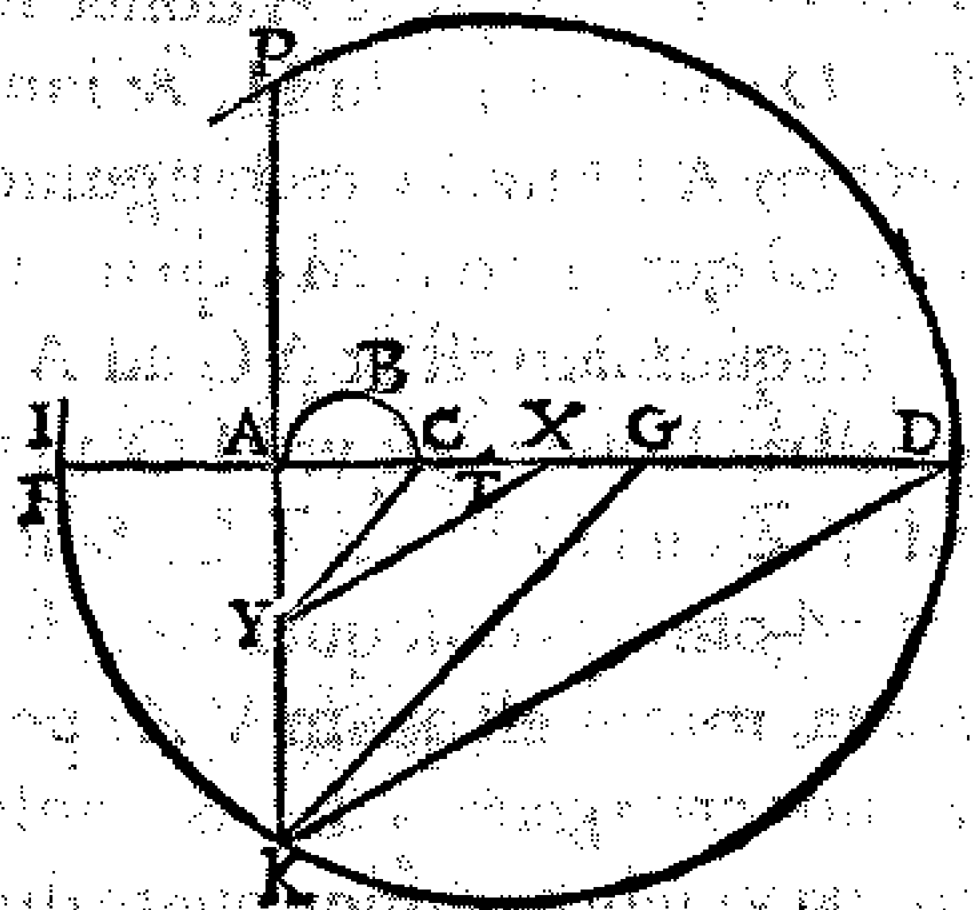
At vero rectam a I minorem esse, quàm V N, sic demonstrabimus.

Primum habeat a D ad a F non maiorem rationem, quam a G ad a C. D
lem. 26. lem. 27 ergo a I non * erit maior quam a F. atque F C minima erit interceptarum inter circumferentias a B C, K F. connectantur autem G K, K D, eisque parallelæ agantur C Y, Y x secantes a k, a D in punctis Y x. Rectangu-
lem. 17 lum igitur F a X * æquale erit quadrato a I. quare proportionales erunt F a, a I, a x. vnde F x composita ex extremis non erit minor, quàm a I dupla.

lem. 17 Et quoniam est vt a G ad a C, ita * F C ad C X. & ita V z ad z L ex constructione; erit vt F C ad C X, ita V z ad z L & permutando vt F C ad
12 quinti v z, ita erit C X ad z L & * ita quoque F X ad V L. omnes videlicet antecedentes

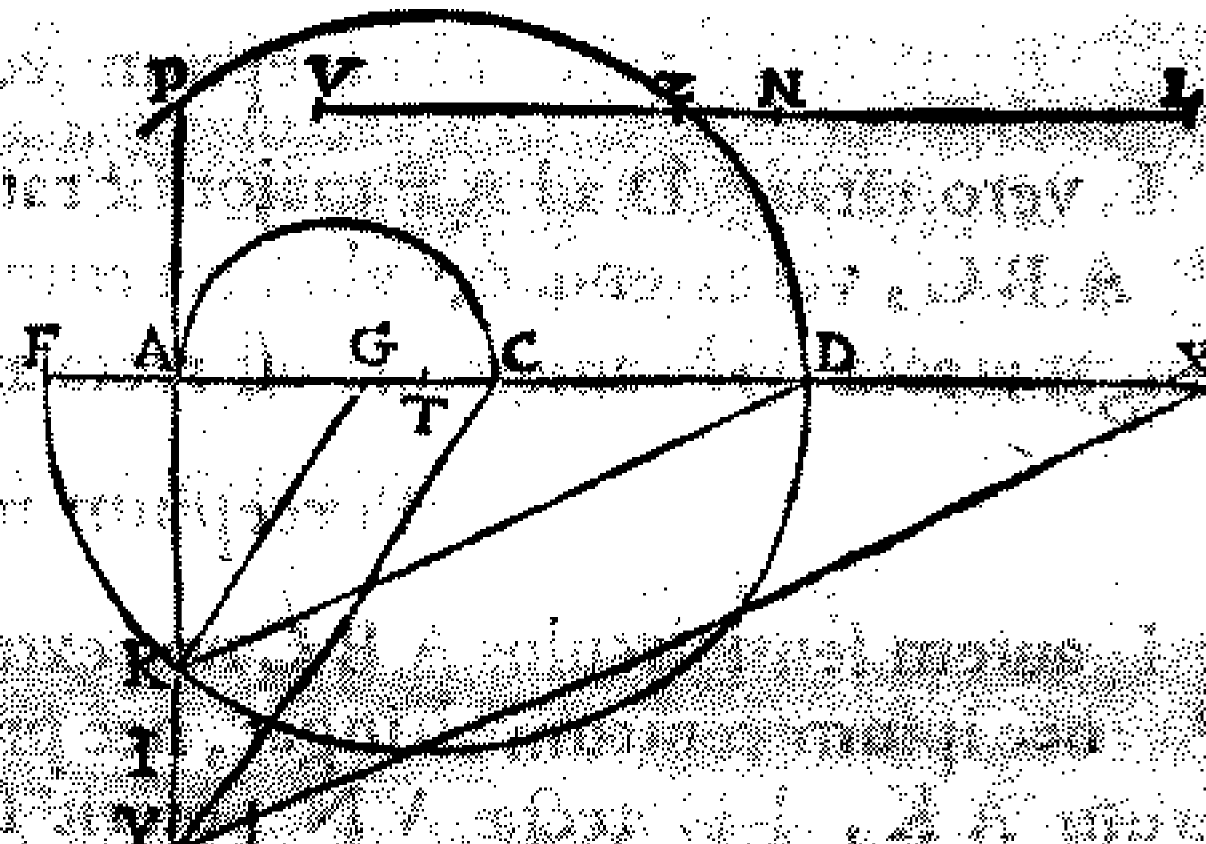
A





B cedentes ad omnes consequentes. sed FC, cum sit omnium interceptarum minima, minor est quam Vz; ponitur enim Vz maior minima; ergo & Fx minor erit quam VL sed Fx ostensa est non minor, quam dupla aI. ergo & aI dupla minor erit, quam ipsa Vz. & consequenter aI simpla minor, quam VN dimidia videlicet ipsius VL.

Sed habeat aD ad aF maiorem rationem, quàm aG ad aC. Aut igitur, semicirculus aBC extenditur vltra centrum circuli DEF, quod sit, T, aut non extenditur. primum extendatur, & producatur



C ka donec secet circulum FED completum in P. & connectatur
Gk, cui parallela agitur CY secans ak in Y. rectangulum igitur yak lem. 17
*æquale erit quadrato aI. vnde proportionales erunt ya, aI, ak. quare composita ex extremis yA, AK, hoc est recta yP. non erit minor quam AI dupla.

Et quoniam est vt AG ad AC* ita AK ad Ay, & ita Vz ad ZL, ex con- lem. 19
structione; erit vt Ak hoc est AP ad Ay, ita Vz ad zL. & permutando
vt AP ad VZ, ita erit Ay ad zL. & * ita quoque Py ad VL; omnes videli- 12 quinti
D cet antecedentes ad omnes consequentes. sed AP, cui æqualis est* AK mini- lem. 18
ma interceptarum, minor est quam Vz; ponitur enim Vz maior minima. ergo & Py minor, erit quam VL; sed Py ostensa est non minor quam dupla aI. ergo & aI dupla minor erit, quam VL, & consequenter aI simpla minor, quam VN dimidia videlicet ipsius VL.

Sed non extendatur semicirculus aBC vltra centrum T ergo aG maior erit, quàm aC, & per consequens ak maior quam aI; est enim vt aG ad aC, ita quadratum ak ad quadratum aI ex constructione. cum itaque aI minor sit, quàm aK; maior autem, quam aF. poterit a puncto a ad circumferentiam FK duci recta aM æqualis aI. ducatur igitur aM, eaque pro-

Producatur ex parte A donec secet semicirculum A B C in O; circulum vero A
F E D completum in H. & iungatur G H, cui parallela agatur C R, secans
Lem. 17 rectam A H in R. rectangulum igitur M A R * æquale erit quadrato A I,
hoc est quadrato A M. quare æquales erunt A R, A M.

Ibid. Et quoniam est vt A G ad A C * ita M O ad O R, & ita V Z ad Z L, ex constructione; erit vt M O ad O R, ita V Z ad Z L. & permutando vt M O ad V Z, ita O R ad Z L. & ita * M R ad V L, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed M O, cum sit omnium interceptarum * minima, minor est quam V Z: ponitur enim V Z maior minima; ergo & M R minor erit quam V L. & consequenter A M, vel A I minor quam V N, dimidia videlicet minor, quam dimidia. quod erat ostendendum.

Ex quinta; Lem. 18

Quo autem casu rectæ V N addenda sit recta æqualis N S, quoue auferenda ratio his constat præceptis. B

Præceptum primum.

SI ratio A D ad A F non sit maior ratione A G ad A C, rectæ V N addenda est recta æqualis N S.

Præceptum secundum.

SI vero ratio A D ad A F maior sit ratione A G ad A C, & semicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel ipsum centrum attingat; rectæ V N auferenda est recta æqualis N S. C

Præceptum tertium.

SI autem semicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat, nec præterea V Z data maior sit minore rectarum A K, F C rectæ V N poterit siue addi, siue auferri recta æqualis N S, in hoc enim casu recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F K, A B C ex vtraque parte minimæ. & ideo duobus modis Problema absolui, nam si auferatur, aptabitur ea recta è regione F C. si vero addatur, aptabitur è regione A K.

Præceptum quartum.

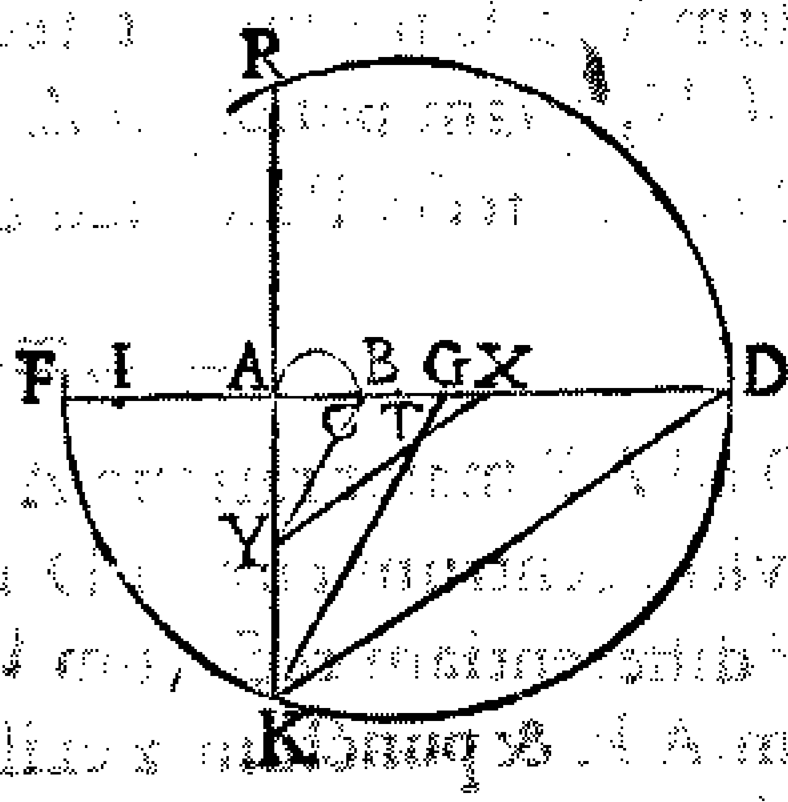
SI vero V Z data maior sit minore rectarum A K, F C, rectæ ipsi V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F K, A B C ex vna tantum parte minimæ, nempe, è regione maioris rectarum A K, F C. Itaque existente A K maiore, quam F C, rectæ V N addenda est recta æqualis N S; existente minore, auferenda. D

Nunc ostendendum est rectam V P sumptam prout præcepta docent non esse minorem, quam A F, nec maiorem quam A K. atque punctum Z existere in recta P L, quocirca quatuor Lemmata proponuntur.

Lem-

Lemma XXIX.

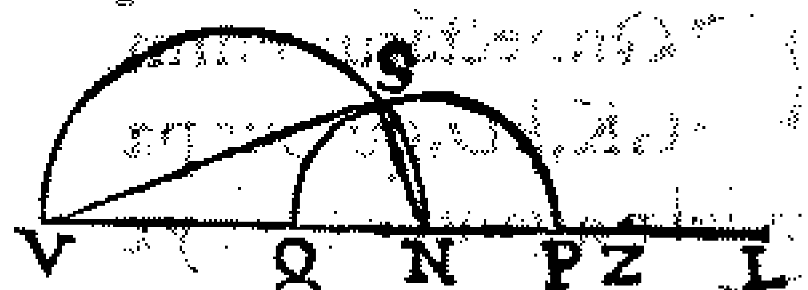
A Sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C. Dico V P cópositam ex V N, NS, maiorem esse, quam A F, minorem quam AK. atque punctum z existere in recta P L.



F A 4
A C 1 $\frac{1}{2}$
C G 2
A D 9
A K 6
A I √ 3 Lem. 17

COnnectantur enim GK, kD, quibus parallelæ agantur C y, y x secantes A k, A D in punctis Y x; erit igitur * vt A G ad A C, ita F C ad C X. sed ita est quoque V z ad z L, ex cóstructione: ergo vt v z ad z L, ita erit F C ad C x. Et permutando vt V z ad F C, ita z L ad C x. & ita

B quoq; v L ad F x; * est enim vt vna antecedentium ad vnam consequentium, ita oés antecedentes ad omnes cósequentes. sed v z ponitur maior, quàm FC cum ipsa FC* minima sit omnium, quæ inter circumferentias Fk, A B C interijciuntur, ergo & V L maior erit quam F X. 12 quinti



lem. 17

Et quouiam æquales sunt V N, N L ex constructione, & æquales quoq; NQ NP, vt semidiametri. ergo fiunt quoque æquales V Q, L P. quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L, sed rectangulum PVQ* æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, seu* rectangulo F A x. ergo rectangulum v P L æquale erit rectangulo F A x. quare proportionales erunt v P, F A, A X, P L. sed 36 tertij lem. 17.

C v L composita ex extremis ostensa est maior quam F x composita ex medijs, ergo altera extremarum v P, P L * maxima erit, altera minima. sed v P maior est, quam P L. ergo ipsa v P maxima erit, atque adeo maior quam A F. quod est primum. Th. 2 huius

Deinde compleatur circulus F E, D R, quem K A producta secet in R. Quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita A k ad a y. & ita quoque v z ad z L, ex constructione, erit vt v z ad z L, ita A k hoc est a R ad a Y, & permutádo vt v z ad A R, ita z L ad A y. & consequenter ita v L ad R y. omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed v z minor est, quam AR vel Ak, quæ est maxima omnium interceptarum inter circumferentias F k, A B C; ponitur enim v z minor maxima, ergo & v L minor erit quàm R y. lem. 17

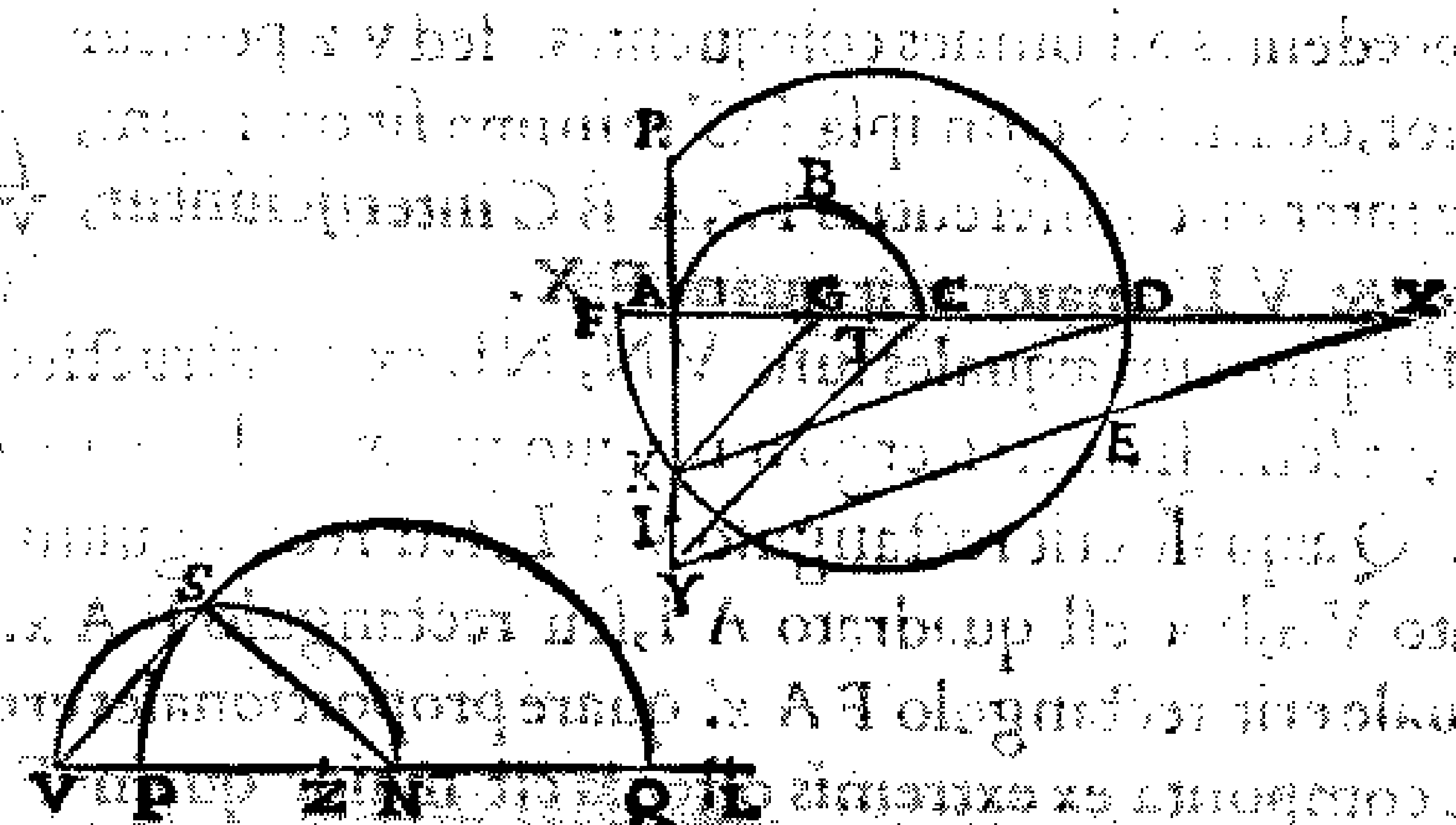
D Et quoniam rectangulum P v Q, vel v P L* æquale est quadrato v S, hoc est quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum y A K, hoc est y A R; æqualia erunt rectangula v P L, y A R; & ideo proportionales vP, yA, AR, PL. sed v L composita ex extremis ostensa est minor, quam R y composita ex medijs. ergo altera mediarum y a, a R maxima erit, altera minima: sed a R, maior est quam a y; ergo ipsa a R maxima erit, & per consequens v P minor quá a R, hoc est quam a K. quod est secundum. 36 tertij lem. 17

Rursus quoniam est, vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratú a I, & ita v z ad z L, vtrumq; ex constructione, erit vt v z ad z L, ita quadratum a k ad quadratú A I, hoc est ad quadratú v S, seu ad* rectangulú P v Q, vel v P L. 36 tertij

ſed vt V Z ad Z L, ita eſt quoq; quadratũ V Z ad rectãgulũ V z L; eandẽ enim habent altitudinẽ V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulũ v z L, ita erit quadratũ A K ad rectangulũ V P L; ſed quadratum V z minus eſt quadrato A K; A
lem. 27 ponitur enim recta V z minor, quàm A k, quæ* eſt maxima interceptarũ. ergo
lem. 28 & rectangulum V Z L minus erit rectãgulo v P L. quare punctum P* propinquius erit ipſi N, quàm punctum Z. atq; eſt vtrũque in medietate N L. ergo punctum Z erit in recta P L, quod eſt tertium. quare conſtat propoſitum.

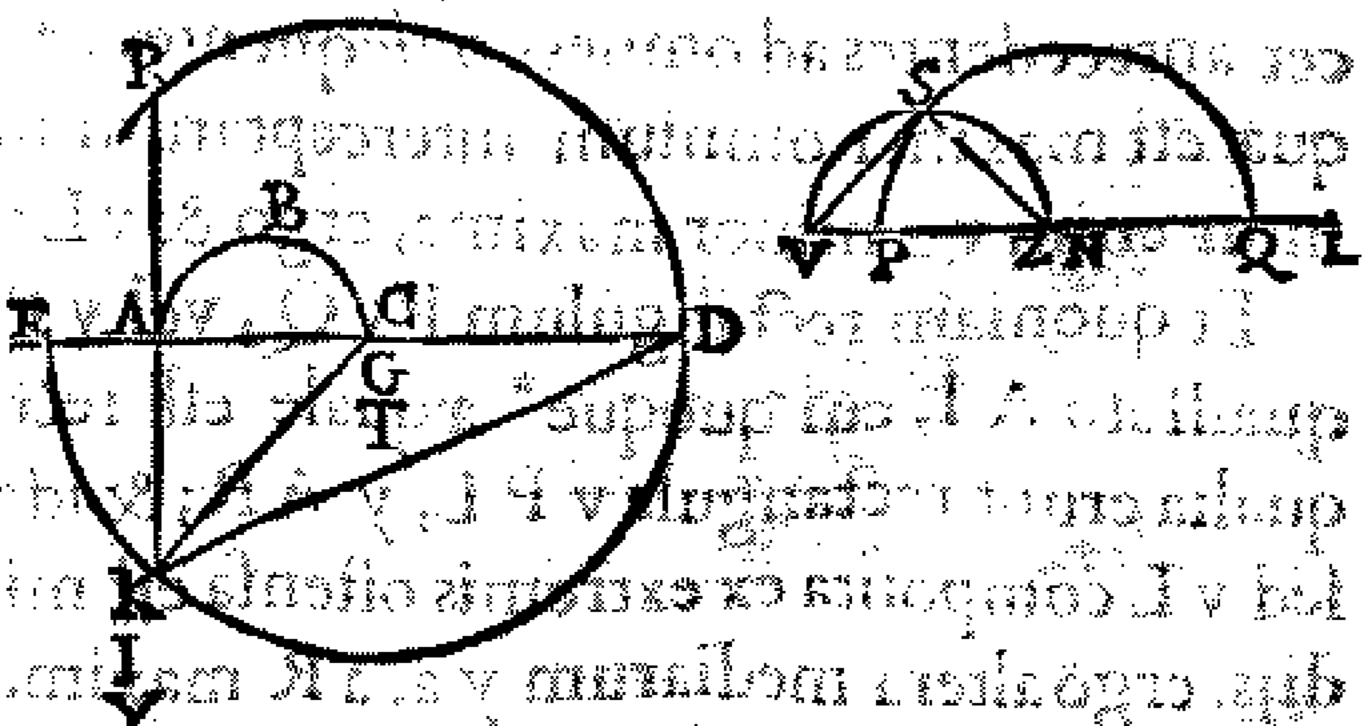
Lemma XXX.

Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & ſemicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel ſaltem ipſum centrum attingat. Dico V P differentiam rectarum V N, N S maiorem eſſe, quam A F, minorem quam A k. & punctum z exiſtere in recta P L. B



Connectãtur enim GK, kD, quibus paralle̜læ agantur Cy, yx ſecãtes A k, A D productas in punctis y x. erit
lem. 27 igitur vt a G ad a C* ita Fc ad c x; ſed ita eſt quoque V z ad z L, ex conſtructione. ergo vt v z ad z L, ita erit Fc ad cx. & permutãdo vt v z ad C
19. quinti FC, ita z L ad C x.* & ita quoq; v L ad F x; oẽs videlicet antecedẽtes ad oẽs cõſe-
lem. 28 quẽtes; ſed v z ponitur minor, quã FC, cum ſit ipſa FC* maxima omnium, quæ inter circũferentias F K, A B C interijciuntur. ergo & v L minor erit, quã F x.

Et quoniã æquales ſunt V N, N L, & æquales quoq; N P, N Q. ergo ſunt quoque æquales V P, L Q. quare rectangulũ P v Q æquale erit rectangulo v P L; ſed
36. tertii rectãgulũ P v Q* æquale eſt quadrato v s, hoc eſt quadrato a I, cui quoq; æquale eſt rectãgulũ F a x. ergo rectangulum v P L æquale erit rectangulo F a x. quare proportionales erũt v P, F a, a x, P L. ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quam F x com- D



Th. 2 huius poſita ex medijs. ergo* altera mediarũ F a, a x maxima erit, altera minima; itaq; a F, quippe quę minor eſt, quam a x, minima erit, & per conſequens v P maior erit quam ipſa a X, quod eſt primum.

Deinde compleatur circulus F E, D R, quem K a producta ſecet in R. Quo-
lem. 27 niam igitur eſt, vt a G ad a C,* ita a k ad a y, & ita quoque v z ad z L ex con-

ſtru-

A ſtructione: erit vt V z ad z L, ita a k, vel a R ad a Y; & permutando vt V z ad a R, ita z L ad a y; & * ita quoque V L ad R y; omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes: ſed V z maior eſt quam a R, ponitur enim V z maior, quam a k, quæ eſt * minima interceptarum inter circumferentias f k, a B C. ergo & V L maior erit, quàm R y. vij quinti / lem. 28

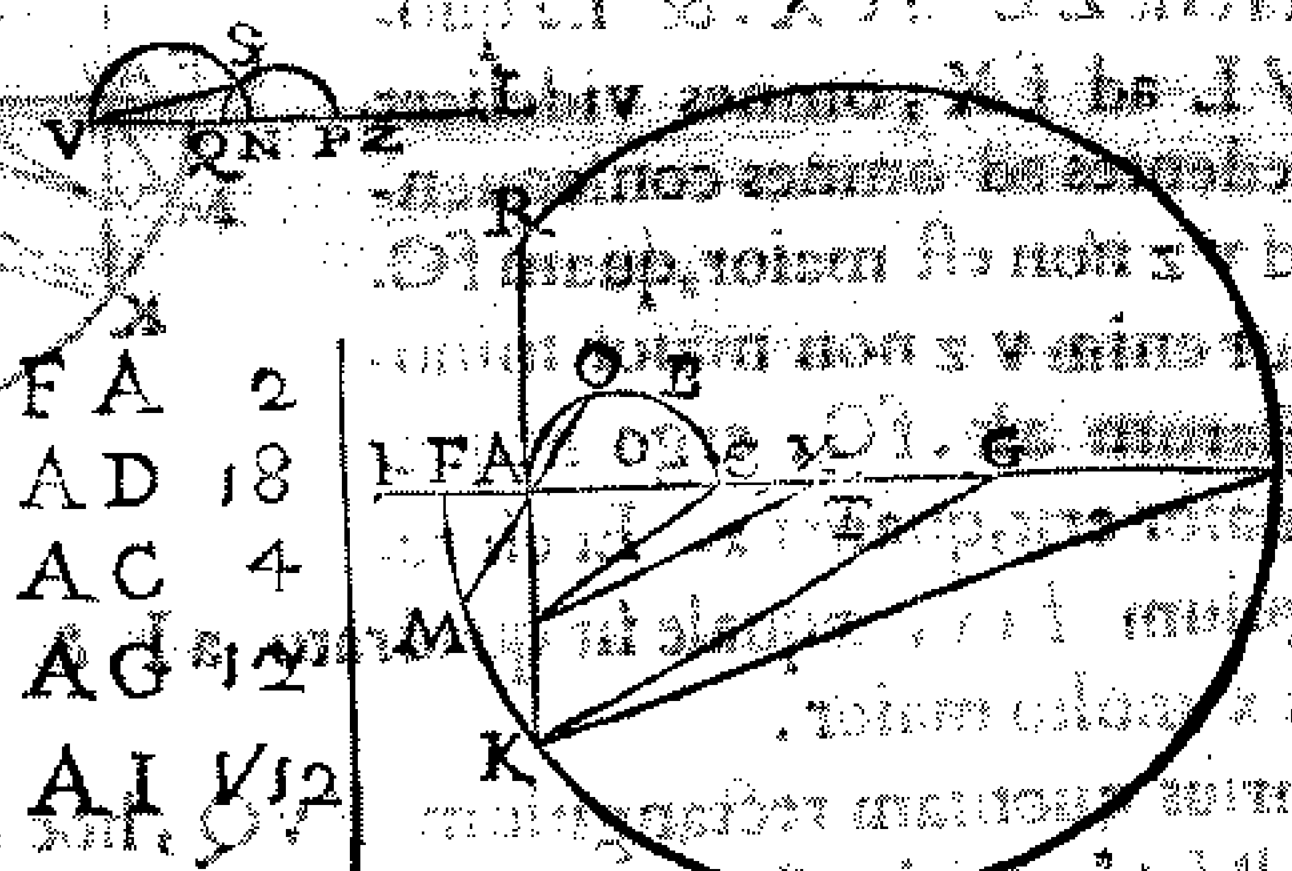
Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L * æquale eſt quadrato V S, vel quadrato A I, cuiquoque * æquale eſt rectangulum y A k, hoc eſt y A R; erũt æqualia rectãgula V P L, Y A R, & ideo proportionales V P, Y A, A R, P L: ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior, quam R y, compoſita ex medijs. ergo * altera extremarum V P, P L, maxima erit, altera minima: ſed V P minor eſt quam P L; ergo ipſa V P minima erit, & per conſequens minor, quã
B A R, hoc eſt quam A K; quod eſt ſecundum. 16 tertij / lem. 17. / Th. 2 huius

Poſtremo cum ſit V P minor quam A K, & A K minor quam V Z, vt demonſtrauimus: erit V P multo minor, quàm V Z, itaque punctum Z erit in recta P L, quod vltimo loco erat oſtendendum.

Lemma XXXI.

Rurſus ſit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C: ſed ſemicirculus A B non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipſum centrum attingat, ſitque præterea data V Z ſit maior minore rectarum A K, F C. Dico rectam V P æqualem, ſiue aggregato, ſiue differentiæ rectarum V N, N S non eſſe maiorem, quam A K, nec minorem, quam A F, & punctum
C Z exiſtere in recta P L.

Compleatur enim circulus F E, D R, quem K A producta ſecet in R: & iungantur G k, k D. quibus parallelæ agantur C Y, Y X ſecantes A K, A D in punctis Y, X, & ſit primum V P, æqualis compoſitæ ex V N, N S. Quoniam igitur eſt vt A G ad AC, * ita Ak ad Ay, & ita quoq; VZ ad ZL, ex cõſtructione: erit vt Vz ad zL, ita Ak, hoc eſt AR
D ad Ay; & permutando vt Vz ad AR, ita zL ad Ay. & conſequenter, * ita VL ad R y. omnes videlicet antecedentes ad omnes cõſequentes: ſed Vz non eſt maior, quàm AR, ponitur enim V z nõ maior minore rectarũ Ak, FC. ergo neq; V L maior erit, quam R y. Et quoniam rectangulũ PVQ, vel VPL (ſunt enim æquales VQ, PL) * æquale eſt quadrato VS, hoc eſt quadrato A I, cui quoq; * æquale eſt rectãgulũ YAK, rectangulũ VPL æquale erit rectãgulo y a k, hoc eſt y AR; quare * proportionales erunt VP, y A, AR, PL. ſed vL compoſita ex extremis oſteſa eſt nõ maior, quã R y cõpoſita ex medijs. ergo ſi eſt minor erit * altera mediarũ y A, AR maxima, altera minima. ſed AR maior eſt, quàm A Y. lem. 29 / lem. 27 / 3 quinti / 16 tertij / lem. 17 / 16 ſexti / Th. 2 huius



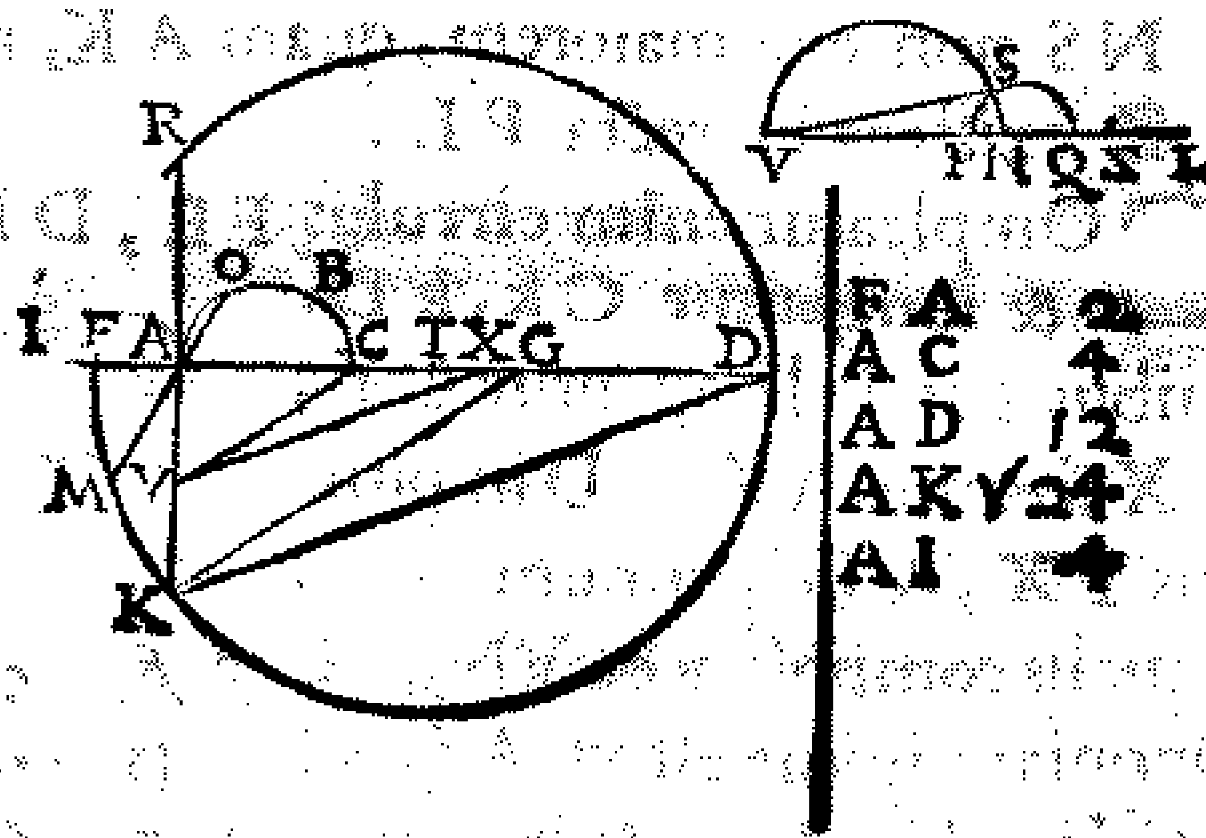
ergo ipsa AR, hoc est AK maxima erit, & per cōsequens V P minor quam A k. A

Theor. iij huius. Si vero V L cōposita ex extremis æqualis est y R cōpositæ ex medijs, maior extremarum maiori mediarum * æqualis erit, hoc est V P æqualis A R, vel A K.

Rursus quoniam V P maior est, quàm V S, hoc est quam A I, ipsaque A I maior quam A F, erit V P multo maior ipsa A F. Recta igitur V P æqualis cōpositæ ex V N, N S, non est maior, quam a k, nec minor quàm a F.

Et quoniam est, vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratum a I, & ita V z ad Z L; vtrumque ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita quadratum a K ad quadratum a I, vel ad quadratum V S, hoc est ad rectangulum P v Q, vel v P L; sed vt V z ad z L, * ita est quadratum V z ad rectangulum v z L; sunt enim eiusdem altitudinis V z; ergo vt quadratum v z ad rectangulum V z L; ita erit quadratum a K ad rectangulum v P L, sed quadratum v z nō est maius quadrato a k, ponitur enim recta v z non maior minore rectarum a k, F C, ergo si est minus, erit & rectangulum v z L minus, rectangulo v P L. quare punctum P propinquius erit ipsi N, quam punctum z. atque est vtrumque in medietate N L, ergo punctum z erit in recta P L. Si vero quadratum v z æquale est quadrato a K, erit & rectangulum v z L æquale rectangulo v P L. quare punctum z idem erit, quod punctum P. itaque z erit in recta P L. B

Sed sit v P æqualis differentiæ rectarum v N, N S. Quoniam igitur est, vt a G ad a C, * ita F C ad C X, & ita quoque v z ad z L, ex constructione; erit vt v z ad z L, ita F C ad C X. & permutando vt v z ad f C, ita erit Z L ad c X. &* ita quoque V L ad f X; omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed v z non est maior, quam f C. ponitur enim v z non maior minore rectarum a k, f C. ergo neque v L maior erit, quàm f x. Et cū rectangulum f a x, æquale sit quadrato a I, & recta a I * maior, quàm a f, erit a x multo maior. C



Rursus quoniam rectangulum P v Q, hoc est v P L (sunt enim æquales v Q, P L) * æquale est quadrato v S, hoc est quadrato a I, cui quoque æquale * est rectangulum f a X; ipsa rectangula v P L, f a X æqualia erunt, & ideo proportionales v P, f a, a X, P L. sed v L composita ex extremis ostensa est non maior quam f X, composita ex medijs. ergo si est minor, erit altera * mediarum f a, a X maxima erit, altera minima. sed a X ostensa est maior quam a f; ergo ipsa f a minima erit. quare v P maior, quàm a f. Si vero v L composita ex extremis æqualis est f x compositæ ex medijs, minor * extremarum v P, P L, nempe ipsa v P, minori mediarum, idest ipsi a f, æqualis erit. D

Item

A Item quoniam est, vt A G ad A C, maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione; quadratum A K maius erit quadrato A I. vnde & recta A k maior quam recta A I; hoc est quam recta V S. sed V P minor est, quam V S. ergo multo minor erit, quàm A k. Recta igitur V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S non est maior quàm A K, nec minor, quàm A F.

Denique quoniam est, vt A G ad A C, maior ad minorem, ita V Z ad Z L, ex constructione, erit & V Z maior, quàm Z L. itaque punctum Z erit in medietate N L, & consequenter in recta P L. Recta igitur V P æqualis, siue compositæ ex V N, N S, siue differentiæ earundem non est maior, quam A K, nec minor, quàm A F. atque punctum Z existit in recta P L; quod

B erat ostendendum.

Scholium.

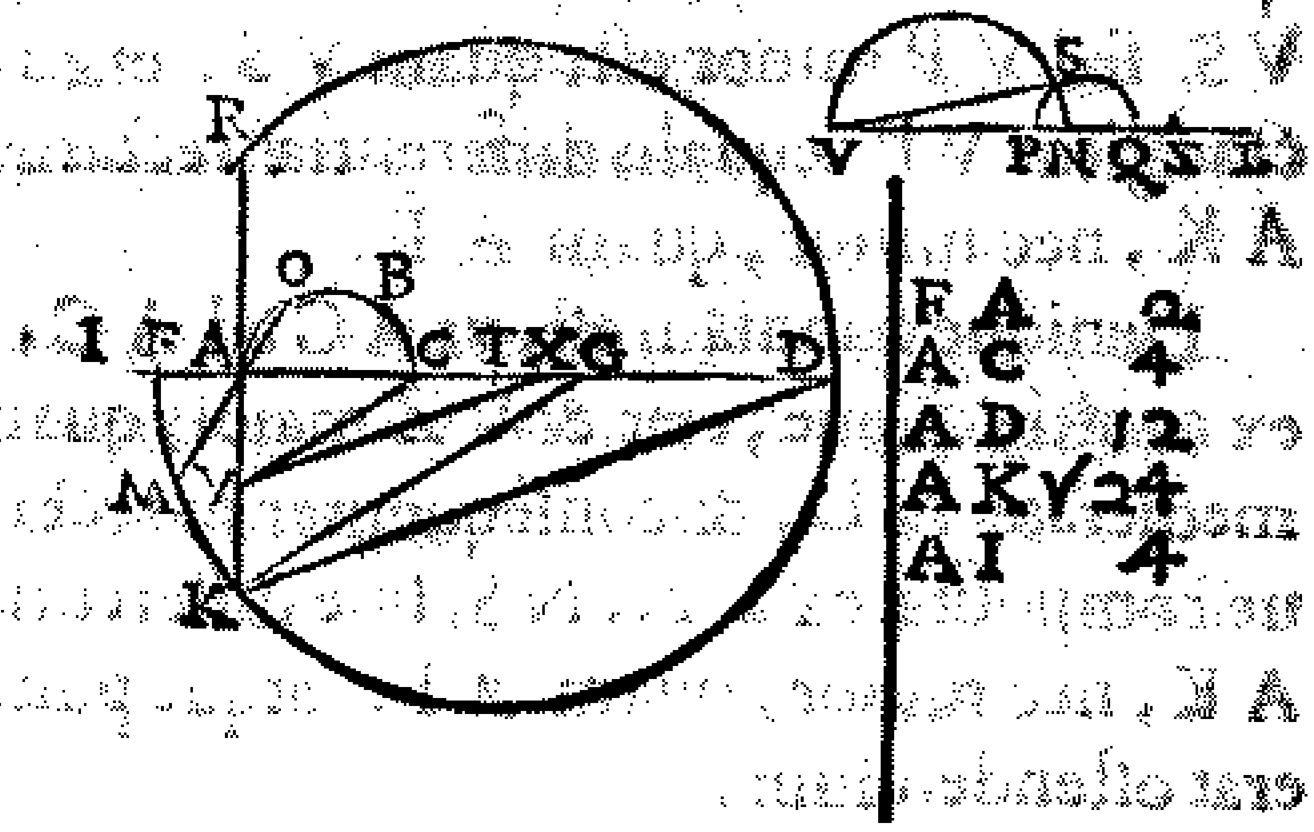
Manifestum est igitur si A D ad A F maiorem rationem habeat, quam A G ad A C, & semicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum attingat, nec præterea data V Z maior sit minore rectarum A k, F C; Problema duobus modis posse absolui. nam si à puncto A ad circumferentiam F K ducatur recta A M æqualis A I, & producatur donec secet semicirculum A B C in O, erit M O* minima omnium, quæ inter circumferentias F K, A B C intercipiuntur. & sumpta V P æquali compositæ ex V N, N S. ea maior erit quam V S, hoc est quam A M, non autem lem. 26

C quam A K, vt demonstrauimus. itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta A E æqualis V P. Similiter sumpta V P æquali differentiæ rectarum V N, N S. ea minor erit, quam V S, hoc est quam A M, non autem quam A F, vt est demonstratum. poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta A E æqualis V P. Itaque si ducatur A E æqualis compositæ ex V N, N S; aptabitur recta datæ V Z æqualis inter circumferentias K M, A O. Si vero ducatur A E æqualis differentiæ rectarum V N, N S, aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C. poterit itaque aptari ex vtraque parte minimæ, atque adeo Problema duobus modis absolui, vt in tertio præcepto monuimus.

D ## Lemma XXXII.

Rursus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & semicirculus a B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat; sed data V Z sit maior minore rectarum a k, F C. & à puncto a ad circumferentiam k F ducatur a M æqualis a I: est enim a I maior, quam a F; minor autem, quàm a k. Dico si a k maior sit, quàm F C compositam ex v N, N S, minorem esse, quàm a k, maiorem quam a M; sin minor differentiam ipsarum v N, N S maiorem esse, quam a F, minorem quam a M, atque punctum Z in vtroque Casu existere in recta P Z. lem. 26

Connectantur enim G K, K D, quibus parallelæ agantur C y, y X secantes a k, a D in punctis y X. & compleatur circulus F E, D R, quem K a producta secet in R. & sit primum V P æqualis compositæ ex V N, N S, & A k maior quam f C. ergo ipsa A K maxima erit omnium interceptarum inter circumferentiam f k, A B C; quare recta datæ V z æqualis poterit aptari inter circumferentias K M, a O; non etiam inter circumferentias M F, O C; cum sit V z maior, quam



Corol lem. 3 F C, ex positione, ipsa vero F C* maxima omnium interceptarum inter circumferentias M F, O C.

Lem. 17 Quoniam igitur est, vt A G ad A C,* ita a K ad a y. & ita V Z ad z L, ex constructione; erit vt V z ad z L, ita A K, hoc est A R ad a y; & permutando vt V z ad A R, ita erit z L ad A y. & ita* V L ad R y. omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed V z minor est quam a R; ponitur enim V z minor maxima a K, cui æqualis est a R; ergo & V L minor erit quam R y.

38 tertij Et quoniam rectangulum P V Q* æquale est quadrato v S, vel quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum y a K, hoc est y a R; ideo erunt

lem. 17

16 sexti æqualia rectangula v P L, y a R, & ideo* proportionales v P, y a, a R, P L. sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quam R y composita ex me-

Th. 2. huius dijs. ergo altera* mediarum Y A, a R maxima erit, altera minima. itaque a R, quippe quæ maior est quam y a, maxima erit, & consequenter v P minor quam ipsa a R, hoc est quam a K. Et cum ipsa V P maior sit quam v S, ea quoque maior erit quam a M; sunt enim æquales v S, a M, cum sit vtraque æqualis recta a I, ex constructione.

Rursus quoniam est vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratum a I, & ita v Z ad z L: vtrumque ex constructione, erit vt v Z, ad z L, ita qua-

36 tertij dratum a K ad quadratum a I, hoc est ad quadratum v S, seu ad* rectan-

1 sexti gulum P v Q, vel v P L, sed vt v z ad z L, ita est* quoque quadratum v z ad rectangulum v z L; eandem enim habent altitudinem v z. ergo vt quadratum v z ad rectangulum v z L, ita erit quadratum a k ad rectangulum v P L. sed quadratum v z minus est quadrato a k; ponitur enim recta v z minor maxima, quæ est a k. ergo & rectangulum v z L, minus erit rectangulo v P L. quare punctum P propinquius erit ipsi N, quàm punctum z. atque ipsa puncta P z sunt in medietate N L. igitur punctum z erit in recta P L. existente igitur a k maiori, quàm F C, recta v P æqualis compositæ ex v N, N S, minor est, quàm A k, maior quam a M; & punctum z existit in recta P L, quod est primum.

Dein-

A Deinde sit V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S, & A k minor, quàm F C. ergo F C* maxima erit omnium, quæ inter circumferentias F k, A B C intercipiuntur. quare recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F M, O C, non autem inter circumferentias M k, A O; cum ponatur V Z maior, quàm A k, quæ est* maxima omnium interceptarum inter circumferentias k M, A O. Et quoniam est, vt A G ad A C *ita F C ad C x. & ita V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad C x. & permutando vt V z ad F C, ita erit z L ad C x, & consequenter *ita quoque V L ad F x, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed V z minor est, quam F C; ponitur enim V z minor maxima interceptarum inter circumferentias F k, A B C. ergo & V L minor erit quam F x. lem. 18 coro l. lem. 18 lem. 17 12 quinti

B Et quoniam rectangulum f a x* æquale est quadrato a I, & recta a I maior quàm a f erit a x multo maior. lem. 17 lem. 16

Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L æquale est quadrato. V S; hoc est quadrato A I, cui quoque æquale est rectangulum f a x; rectangulum V P L, f a x æqualia erunt; & ideo proportionales V P, F A, A x. P L. sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quam f x composita ex medijs. ergo altera mediarum f A, A x* maxima erit, altera minima. sed a x ostensa est maior quàm a f, ergo ipsa a f minima erit, atque adeo V P maior, quam a f. Ipsam autem V P minorem esse, quam a f manifestum est. nam cum sit V P minor quam V S; ea quoque minor erit, quam a M, Theor. 11 huius

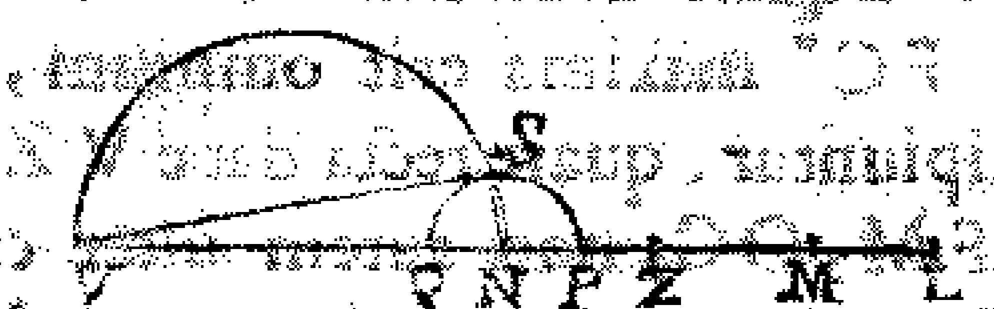
C sunt enim æqualis V S, a M; cum sit vtraque æqualis ipsi a I, ex constructione. Æque manifestum est punctum z existere in recta P L. nam cum sit vt a G ad a C, maior nempe ad minorem, ita V z ad z L ex constructione, erit & V z maior quam z L. quare punctum z erit in medietate N L, & consequenter in recta P L existente igitur a K minore, quam f C; recta V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S, maior est, quam a f, minor quam a M. & punctum z existit in recta P L, quod secundo loco erat ostendendum.

Quamuis in tertio & quarto, ac etiam septimo Casu satis dictum sit de dignoscendo termino quæsitam a E indicante è duobus de quibus Æquatio explicabilis est; tamen in hoc quoque Casu, cum resolutio incidat in Æquationem, de duplici termino explicabilem, non alienum videtur exempla ad
D huiusmodi cognitionem pertinentia subijcere.

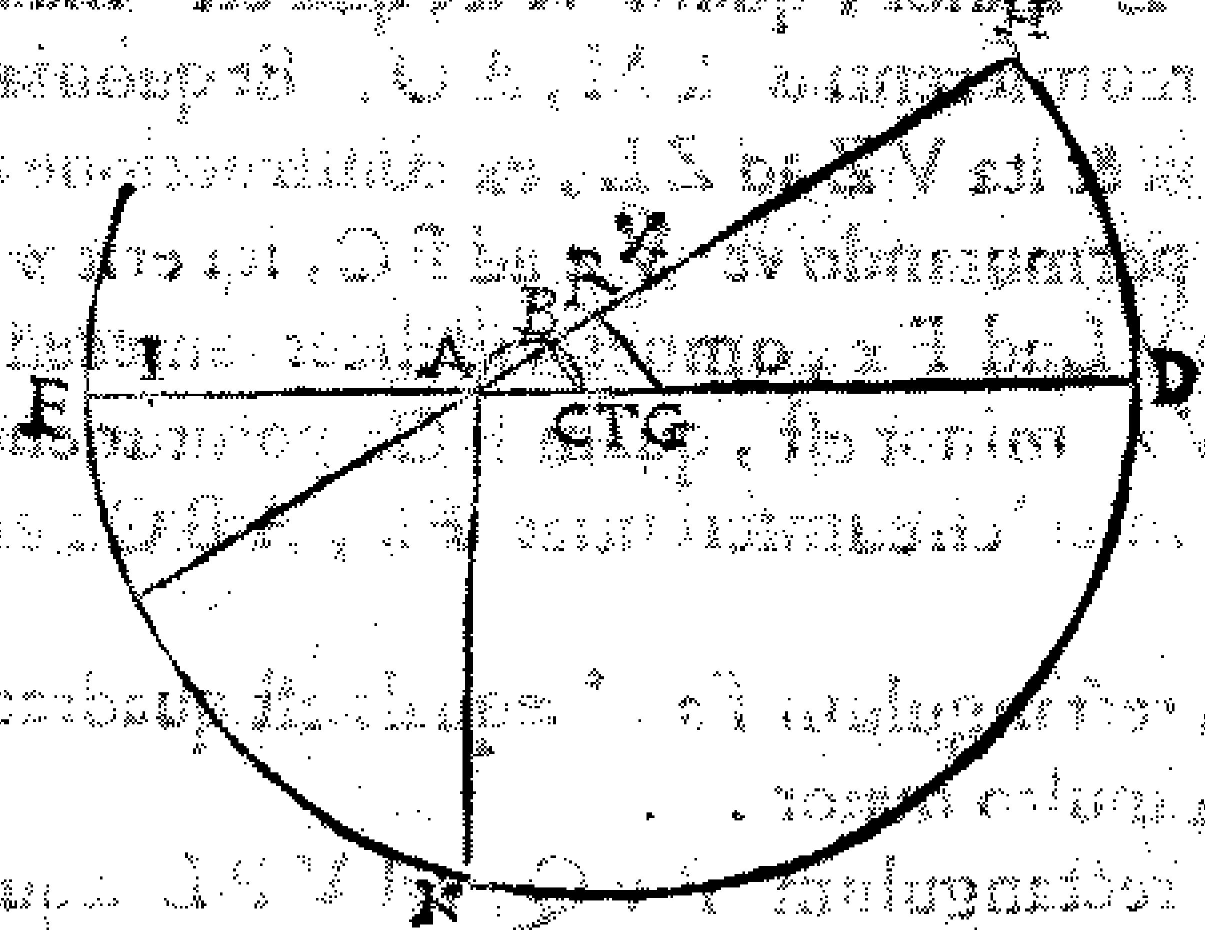
Propositio prima.

Terminum indicantem quæsitam a E in semicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoscere.

Sit ratio a D ad a f non maior ratione a G ad a C. & oporteat iussum facere. Resumatur constructionis figura ad huiusmodi Casum pertinens. termini de quibus Æquatio explicabilis est sunt, V P maior, V Q mi-



minor, quorum VQ minor est, quam VS, hoc est quam a I, & consequenter multo minor, quam a E de qua quæritur, cum sit a I non maior quam A E. terminus igitur VQ non indicat ipsam A E; per consequens eam indicat VP, aggregatum rectarum VN, NS. Itaque existente ratione A D ad A F non maiori ratione A G ad A C, agnitus est terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum constitutum est; A



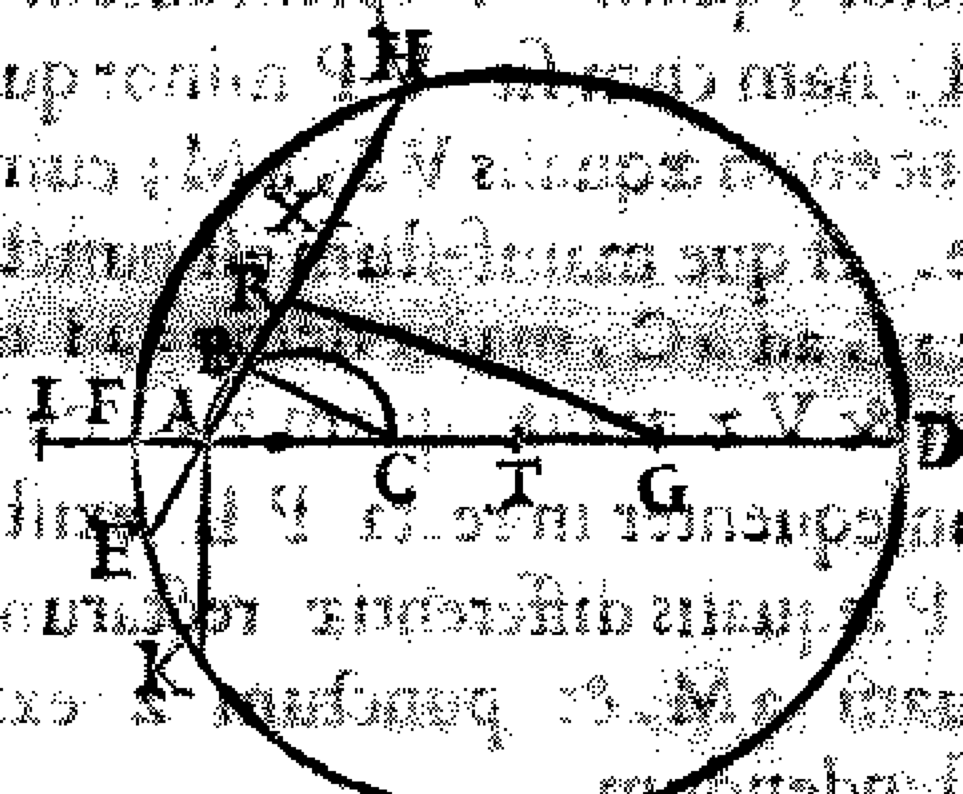
A F 4
A C 1½
C G 2
A D 9
A K 6
A I R. 15¾ B

Propositio Secunda.

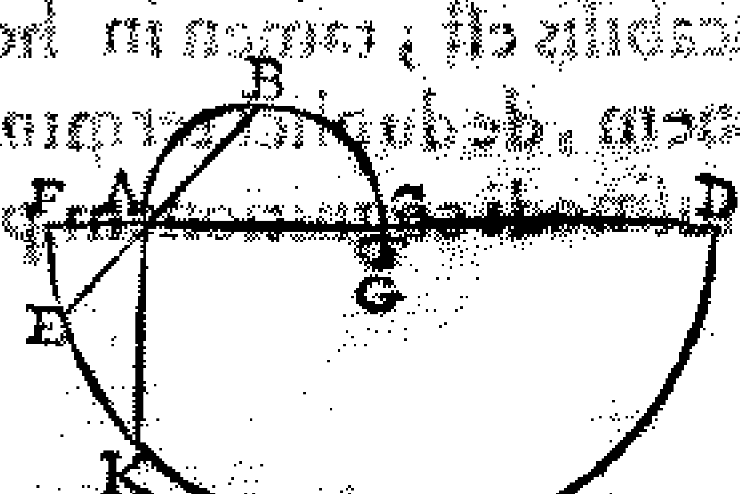
Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad secundum præceptum pertinentibus dignoscere.

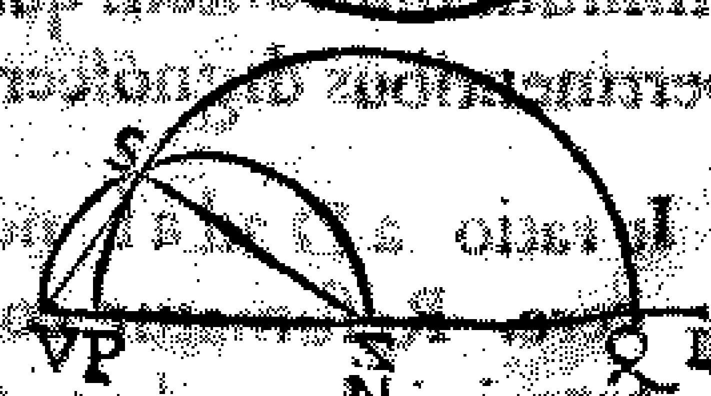
A	F		2
A	D		18
A	C		4
A	G		13
A	I	√	12

Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & semicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel saltem ipsum centrum attingat. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Resumatur constructionis figura ad hunc Casum pertinens. C



Termini de quibus æquatio explicabilis est sunt, VP minor, VQ maior quorum VQ maior est quam VS, hoc est quam A I, & consequenter multo maior quam A E quæsita, est enim A I non minor quam Ak. Nam cum sit vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione, & A G in hac semicirculorum positione non maior, quam A C. ergo neque quadratum A K maius erit quadrato A I, quare nec recta A k maior quam recta A I, hoc est nec A I minor quam Ak. D





Terminus igitur VQ non indicat ipsam A E.

er-

A ergo eam indicat V P differentia rectarum V N, N S. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans vt faciendum erat. Hinc præceptum secundum constitutum est.

Propositio tertia.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoscere.

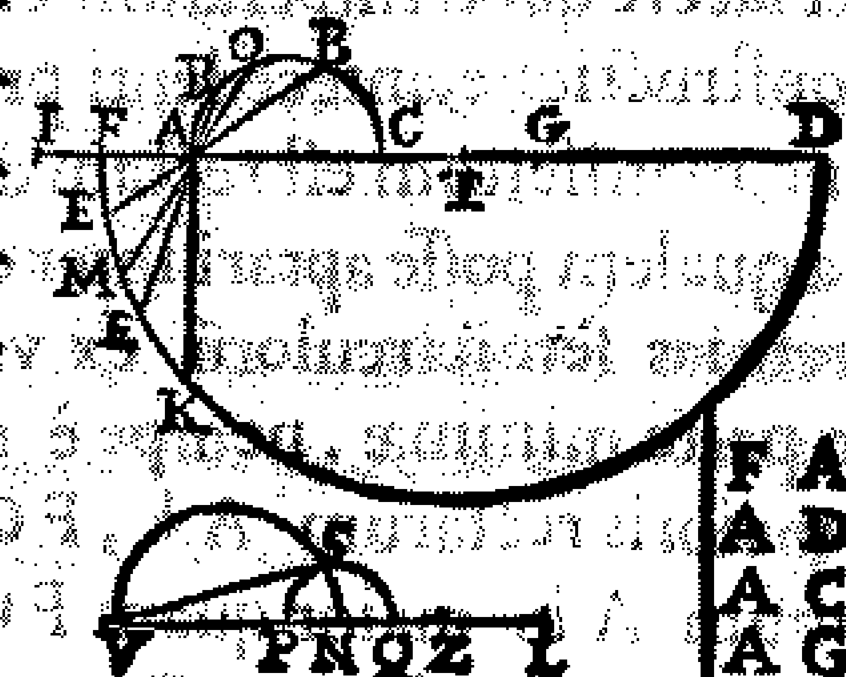
Rursus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C; sed semicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat, nec præterea data V Z sit maior minore rectarum A K, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Resumatur cōstructionis figura ad hunc Casum pertinens. Quoniam igitur est vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione, & A G maior quam A C, erit & quadratum A k maius quadrato A I Vnde & recta A k maior, quam recta A I, seu quod idem est A I minor quam A k; sed ipsa A I maior est, quàm A F, ergo poterit à puncto A ad circumferentiam F K duci recta a M æqualis a I; ducatur igitur a M, & producatur donec secet circulum a B C in O. Aut igitur a E quæsita terminatur in circumferentia F M aut in circumferentia M k; potest enim terminari in vtraque, nam recta datæ V Z æqualis potest aptari inter circumferentias semicirculorum ex vtraque parte minimæ, quæ est M O; cum ipsa V Z ponatur non maior minore rectarum a k, F C. Si igitur a E terminatur in circumferentia F M. ea minor est, quam a M hoc est quam a I, seu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S. quod est vnus è duobus terminis, de quibus Æquatio explicabilis est, alter vero terminus est V P differentia rectarum V N, N S. Terminus igitur V Q non indicat quæsitam a E. ergo eam indicat V P.

B

lem. 16

C

lem. 18



F	A	2
A	D	18
A	C	4
A	G	12
A	I	√12

D Si vero ipsa a E terminatur in circumferentia M K. ea maior est, quam a M, hoc est quam a I, seu quam V S. & multo maior quam V P. recta igitur V P non indicat a E quæsitam, ergo eam indicat V Q. Cum igitur ratio a D ad a F maior est ratione a G ad a C, & semicirculus a B C non extenditur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingit, nec præterea data V Z maior est minore rectarum a K, F C, indicat quæsitam a E tum differentia tum aggregatum rectarum V N, N S; differentia quidem cum a E definit in circumferentia F M, aggregatum vero cum definit in circumferentia M k. Agnitus est igitur terminus quæsitam a E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum tertium constitutum est.

Pro-

 A

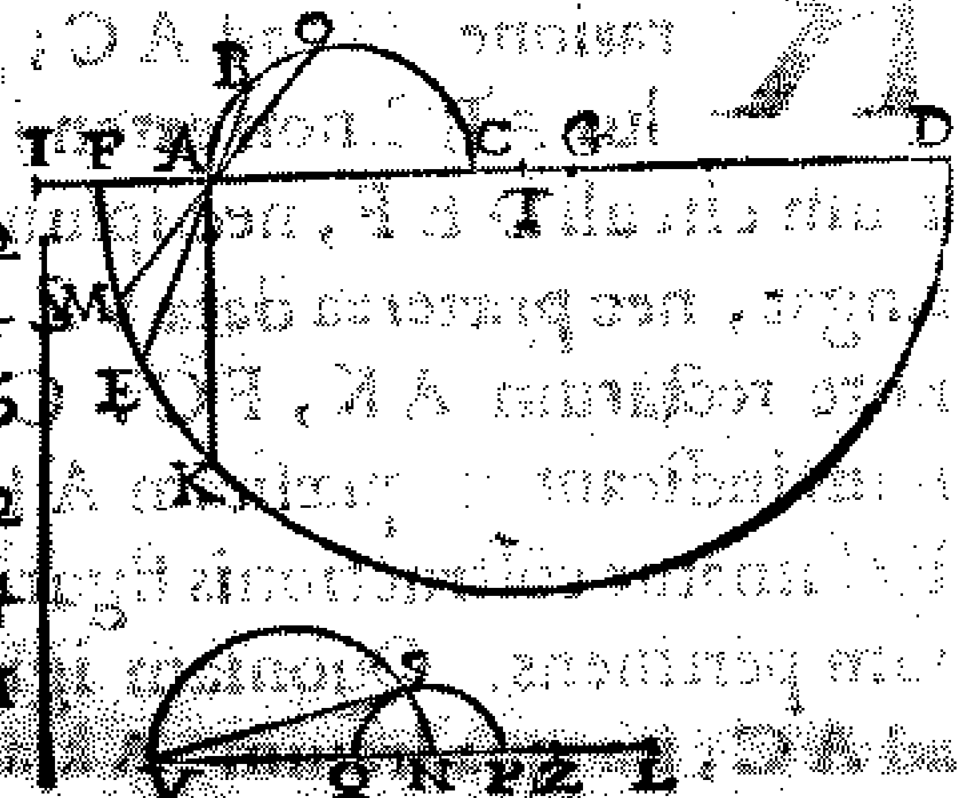
Propositio quarta.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad præceptum quartum pertinentibus dignoscere.

Rursus sit ratio a D, ad a F maior ratione a G ad a C, & semicirculus a B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat; sed data V Z sit maior minore rectarum a k, F C. Oportet facere quod imperatum est.

Facta constructione, antecedenti propositione, manifestum est rectam datæ V Z æqualem posse aptari inter circumferentias semicirculorũ ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum A k, F C. sit primum A k maior quam F C. ergo recta æqualis datæ V Z potest aptari inter circumferentias k M. A O, non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit V Z maior, quam F C vt ponitur. ipsaque F C * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur. ergo A E quæsita desinit in circumferentia K M. vnde maior est quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S. & multo maior quam V Q differentia rectarum V N, N S. terminus igitur V Q non indicat quæsitam A E. ergo eam indicat terminus V P, aggregatum videlicet rectarum V N, N S.

F A	2
A C	4
A G	16
A D	22
A K	$\sqrt{44}$
A I	$\sqrt{11}$



*Resol. lem. 25

Sed sit F C maior, quam A k ergo recta æqualis datæ V Z potest aptari inter circumferentias M f, O C, non etiam inter circumferentias k M, A O, atque A E quæsita desinit inter circumferentias M F. & ideo minor est quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S, & consequenter multo minor quam V P, aggregatum rectarum V N, N S. terminus igitur V P non indicat quæsitam A E, ergo V Q differentia ipsarum V N, N S eam indicat. Itaque cum ratio A D ad A F maior est ratione A G ad A C, & semicirculus A B C nec extenditur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingit, sed data V Z maior est minore rectarum A k, F C. existente A K maiore, quam F C, aggregatum rectarum V N, N S indicat A E quæsitam, existente vero F C maiore, quam A K differentia. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Atque hinc præceptum quartum constitutum est.

Magna est inter grauissimos omnium ætatum viros de circuitu terræ discrepantia. Aristoteles in secundo libro de cælo asserit ex Mathematicorum illius temporis authoritate terræ circuitum esse stadiorum 400000. hoc est milliariorum 50000. Archimedes vero in libro de arenæ numero videtur

A tur assensisse ijs, qui opinabantur ipsum circuitum esse stadiorum 300000. siue milliariorum 37500. At Hypparcus referente Plinio lib. 2. cap. 108. tribuit circuitui terræ stadia 277000, quæ sunt milliaria 34625. Erathostenes vero stadia 252000, vel milliaria 31500. Dionysiodorus autem nobilis Geometra scribens ex centro terræ ad superos, vt Plinius refert eodem libro cap. vltimo affirmat se à sepulchro ad infimam terram peruenisse, esseque id spatium, hoc est semidiametrum terræ stadiorum 42000. hoc est milliariorum 5250. ex quo secundum Archimedis computationem fit circuitus eius milliariorum 33000. At Ptolæmeus, quem recentiores sequuntur affirmat circuitum terræ continere stadia 180000. siue milliaria 22500. Alphraganus, ac Tebicius tribuunt circuitui terræ stadia 563200. siue milliaria 20400.

B Hæc tanta opinionum diuersitas me impulit vt cogitarem quomodo circuitus terræ inueniri posit; & quidem duos inueni modos, quibus id assequi poterimus; eosque Geometrica ratione demonstrabo, quorum alter ita se habet.

Sumantur in crepidine lacus, silentibus ventis, duo loca distantia inter se spatio minimum trium milliariorum, in quorum altero erigatur ad perpendiculum supra aquam lamina habens foramen in latitudinem ductum; à tergo autem laminæ iuxta ipsum foramen ponatur lumen, & sit interuallum inter sumitatem foraminis, & superficiem aquæ, vtpote vnius pedis; in altero autem loco sit mensor attollens sese, vel deprimens donec visu perueniat ad

C lumen per lineam tangentem superficiem aquæ. ita vt si oculus, vel modicum deprimeretur, lumen illud ob rotunditatem aquæ, quæ tunc inter oculum, & lumen interponeretur videri non posset; superficies enim aquæ consistentis, atque manentis sphærica est, cuius sferæ centrum idem est quod centrum terræ, vt demonstrauit Archimedes. & notetur diligenter interuallum, quod est inter oculum mensoris, & superficiem aquæ, quemadmodum notatum est interuallum inter sumitatem foraminis laminæ, & superficiem aquæ; datis enim his duobus interuallis, & distantia duorũ locorũ in crepidine lacus sumptorum; dabitur diameter terræ, vt postea demonstrabimus, & consequenter per calculum Archimedæum, dabitur & circuitus eius. Dixi huiusmodi operationem debere fieri in aliquo lacu, non autem in mari; nam propter

D fluxum, & refluxum maris fallax euaderet operatio. cum ad hoc negotium requiratur aqua consistens, & manens, quapropter fieri hæc debere dixi silentibus etiam ventis, ne superficies aquæ turbaretur; Quin etiam magis oportunus esset riuus, vel canalis in aliqua planitie in directum extensus qualis in Germania inferiori, & præcipuè in Battauia vidi, cum in ijs tranquilla omnino, & immobilis maneat aqua. Alter autem modus inueniendi circuitum terræ, & quidem facilior atque exactior priore ita se habet.

Eligantur duo montes, ex quibus maris prospectus pateat, ita vt ab aliquo loco altioris montis per apicem montis depressioris visus noster extendi possit vsque ad circulum orizontalem, marisque contactum; deinde exquiratur

de-

depresſionis montis altitudo, nempe perpendiculum ab eius vertice vſque ad ſuperficiem maris. A

Similiter exquiratur altitudo loci, à quo per apicem montis ad orizontem viſus extenditur, hoc eſt perpendiculum ab eo loco vſque ad maris ſuperficiem; denique inueniatur diſtantia, quæ eſt inter dictum locum, & dictum apicem montis; quibus diligenter peractis, dabitur diameter terræ, vt perſpicuum fiet, atque adeo & circuitus. Vnico igitur Problemate duos Caſus habente omnia quæ dixi preſtabo.

Lemma ad id quod ſequitur.

Si recta linea per centrum circuli ducta alteram rectam in circulo biſariam non ad rectos angulos ſecuerit centrum circuli in earum ſectione erit. B

Recta linea a B per centrum circuli ducta ſecet alteram rectam C D biſariam non autem ad rectos angulos in E. Dico punctum E eſſe centrum circuli. Ducatur enim per punctum E recta linea F E G ipſi C D ad rectos angulos, ergo cum ſint æquales C E, E D centrum* circuli erit in recta F G, ſed idem centrum eſt quoque in recta a E B, ergo centrum illud erit in puncto E, quod erat oſtendendum.

Corol. prop. 1. tertij

Problema III.

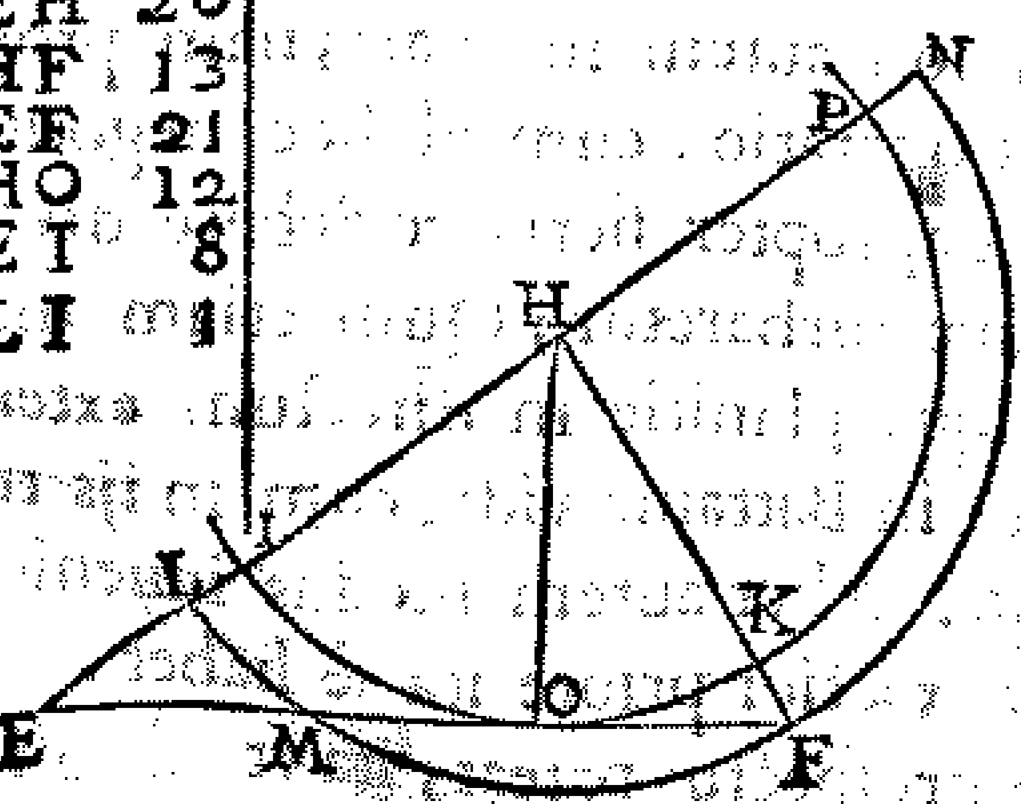
Data baſe trianguli, & exceſsibus, quibus crura ſuperant eius altitudinem, inuenire triangulum.

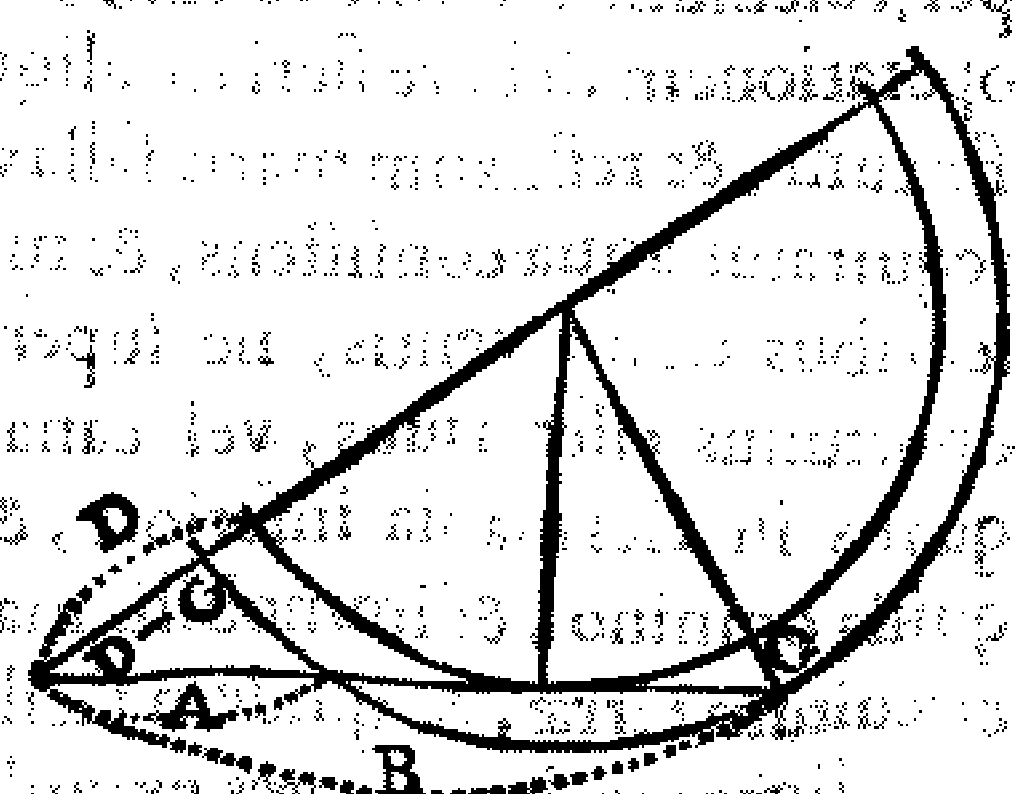
Hoc Problema duos Caſus habet, vel enim altitudo trianguli, hoc eſt perpendicularis è vertice demiſſa intra triangulum cadit, vel extra. Primo Caſu oportebit compoſitam ex exceſsibus minorem eſſe baſe, ſecundo vero differentiam exceſsuum minorem eſse baſe. C

Reſolutio primi Caſus.

Sit data baſis trianguli B, exceſsus vero, quo crus maius ſuperat altitudinem D, exceſſus autem quo crus minus eandem altitudinem ſuperat G. Oportet inuenire triangulum.

EH	20
HF	13
EF	21
HO	12
EI	8
LI	1





D

Factum iam ſit, & ſit illud triangulum H E F, in cuius baſim cadat perpen-

A pendicularis H O, & centro H interuallo H O describatur circulus I O P secans crura H e, H f in punctis I K. productum vero crus maius e H in P. erunt igitur I c, K f excessus, quibus crura H e, H f superant perpendicularem H O. Quoniam igitur dantur basis E F, excessus maior I E excessus minor k F. sit basis B excessus vero maior D, excessus autem minor G, vt in figura resolutionis designatum est. Rursus centro H, interuallo autem H F alius circulus describatur, secans basim E F in M, crus vero E H in L. ipsumque productum in N, differentia igitur segmentorum E O, O F erit E M cum sint * æquales M O, O F, differentia autem crurum H E, H F erit E L, 36 tertij
ea ipsa quæ est excessuum I E. k F; eaque in figura resolutionis erit D — G. Quæratur E M differentia segmentorum E O, O F. ea estò A. ergo B + A
B erit duplum segmentum E O. vnde simplum erit B $\frac{1}{2}$ + A $\frac{1}{2}$. co. 2 prob. 1 lib. primi

Et quoniam rectangulum L E N * æquale est rectangulo M E F, erit vt L e ad E M, ita E f ad E N. hoc est in figura ad resolutionem pertinente erit vt D — G ad A, ita B ad $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$. itaque $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ erit ipsa E N, à qua si auferatur P N hoc est G; reliqua E P erit $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G. 36 tertij

Et quoniam rectangulum I E P * æquale est quadrato E O, hoc est rectangulum sub D, & $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G æquale quadrato ex B $\frac{1}{2}$ + A $\frac{1}{2}$. ibidem

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — B in G æquabitur B Q $\frac{1}{4}$ + A Q $\frac{1}{4}$ + B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Potestas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d\text{-}g}$ — D in G 4 æquabitur B Q + A Q + B in A 2.

Auferantur vtrinque B in A 2, & A Q. addatur autem D in G 4. vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

C $\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d\text{-}g}$ — B in A 2 — A Q æquabitur B Q + D in G 4.

Vt autẽ æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{d \text{ in } b}{d\text{-}g}$ in integrã magnitudinẽ; ea esto F. nam si fiat vt D—G ad D, ita B ad aliã, quæ sit F. erit F eadem quæ $\frac{d \text{ in } b}{d\text{-}g}$. atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d\text{-}g}$. transmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 — B in A 2 — A Q, æquabitur B Q + D in G 4.

Seu quod idem est F 4 -- B 2 in A -- A Q æquabitur BQ + D in G 4.

Et explicata secundum tertium Canonem Æquatione.

F 2 - B - L. V. (F 2 - B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

Vel F 2 - B + L. V. (F 2 B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

D In hac Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum minor tantum indicat quæsitam E M differentiam segmentorum basis. nam terminus maior manifesto se ostendit maiorem ipsa differentia. immo etiam tota base, vt in opere constructionis perspicuum fiet.

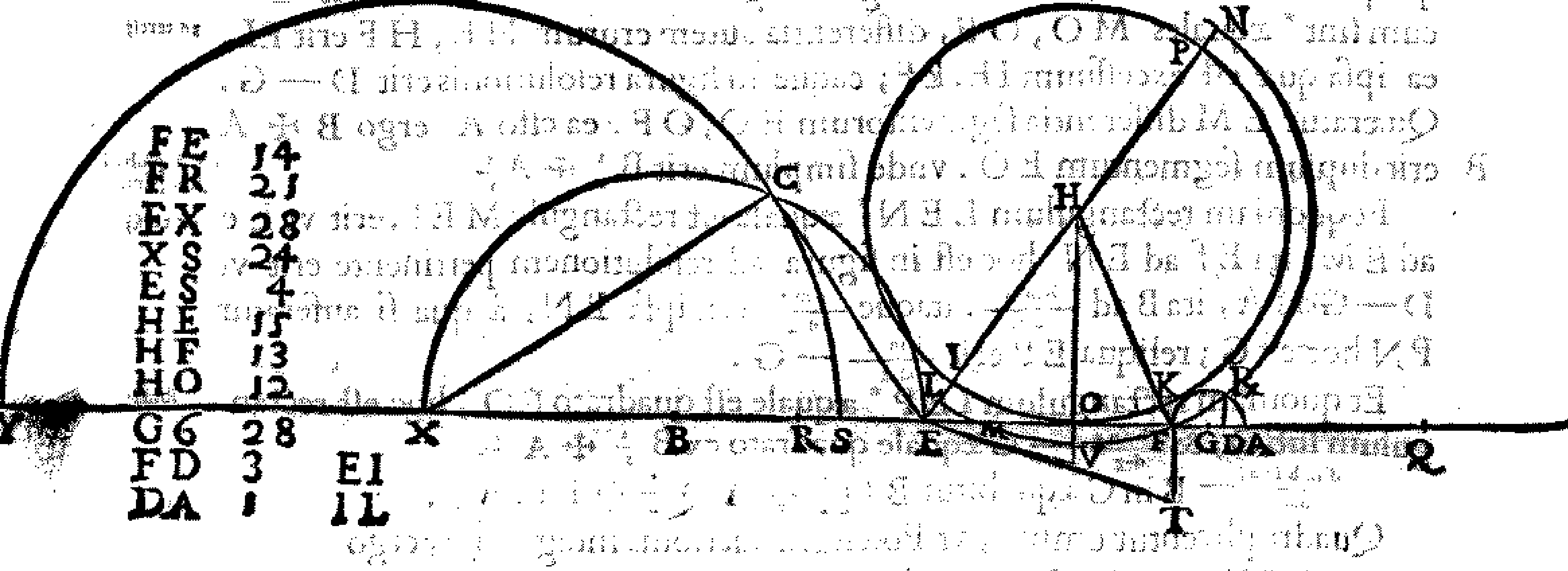
Porisma.

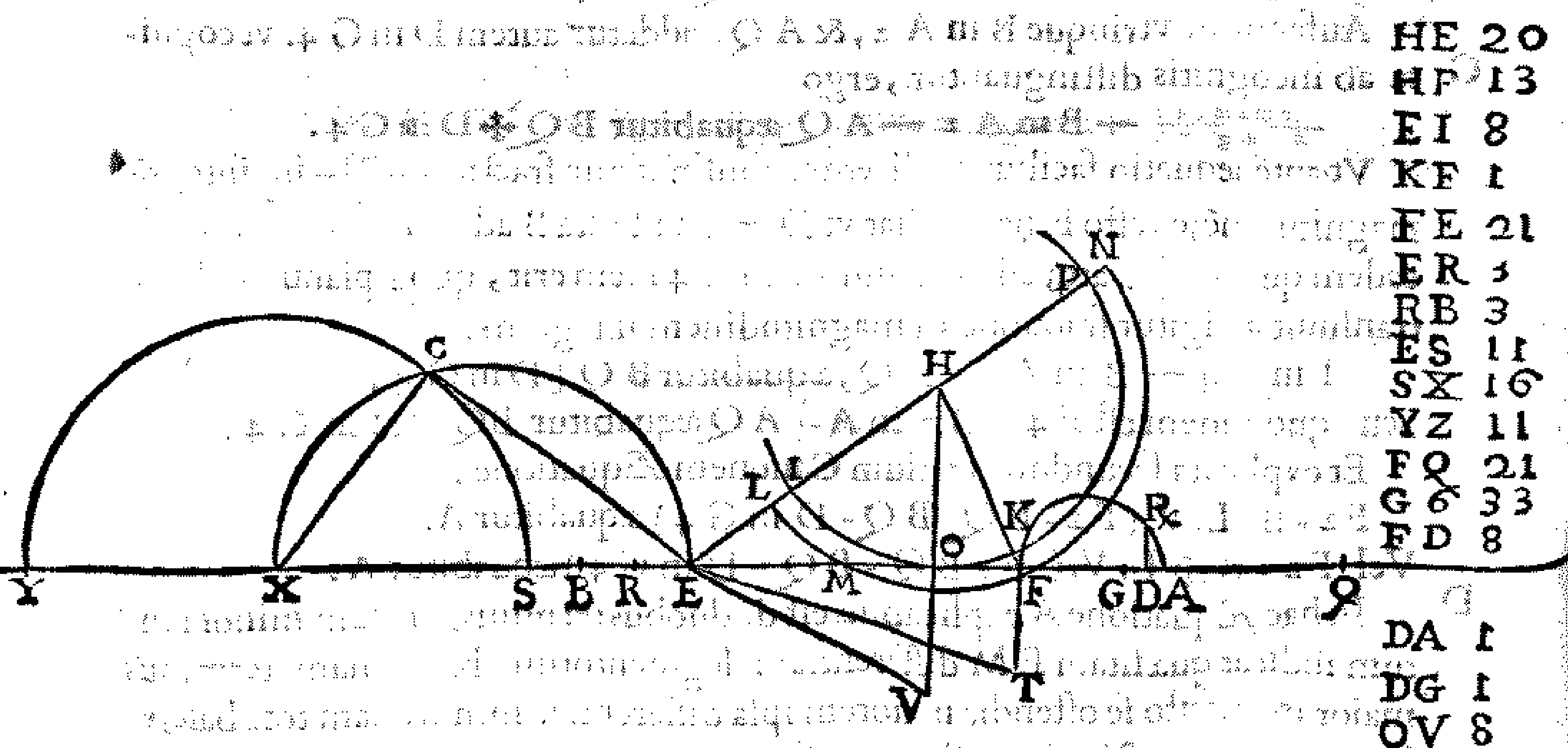
Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam; differentiæ autem, qua dupla ea recta superat basim dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus: reliqua erit terminus minor.

Vel eidem differentiæ addatur eadem recta, & fiet terminus maior.

Compositio primi Casus.

SIt data basis trianguli F E: excessus autem quo crus maius superat altitudinem trianguli F D, excessus vero, quo crus minus eandem altitudinem





superat D A, ex quibus excessibus composita F A sit minor base E F. Oportet inuenire triangulum. Erigatur ex puncto D perpendicularis D ℞, quam semicirculus in F A descriptus secet in ℞. ex puncto autem F. demittatur perpendicularis F T dupla ipsius D ℞. & connectatur F T. quadratum igitur F T quadruplum est quadrati D ℞, vel rectan-

A ctanguli F D A. Deinde in F D sumatur D G æqualis D A, & fiat vt F G ad F D, ita F E ad aliam, quæ sit F R, eaque duplicetur in X, & in E x describatur semicirculus x C E, in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonstrabimus minorem esse diametro E x, & connectatur x C, & centro x interuallo x C describatur circulus secans diametrum E x in S, eandemque productam in y. Termini igitur de quibus A in Æquatione explicabilis est sunt; E S minor; E y maior. & manifestum est terminum E y maiorem esse, quæsita differentia segmentorum basis. immo tota base E F; nam cum sit vt F G ad F D, minor nempe ad maiorem; ita F E ad F R. erit & f R, vel R x maior, quam f E. & consequenter E y multo maior. in base igitur E f sumatur E M æqualis E S, quam postea demonstrabimus minorem esse ipsa E f. reliqua vero M f secetur bifariam in O, per quod

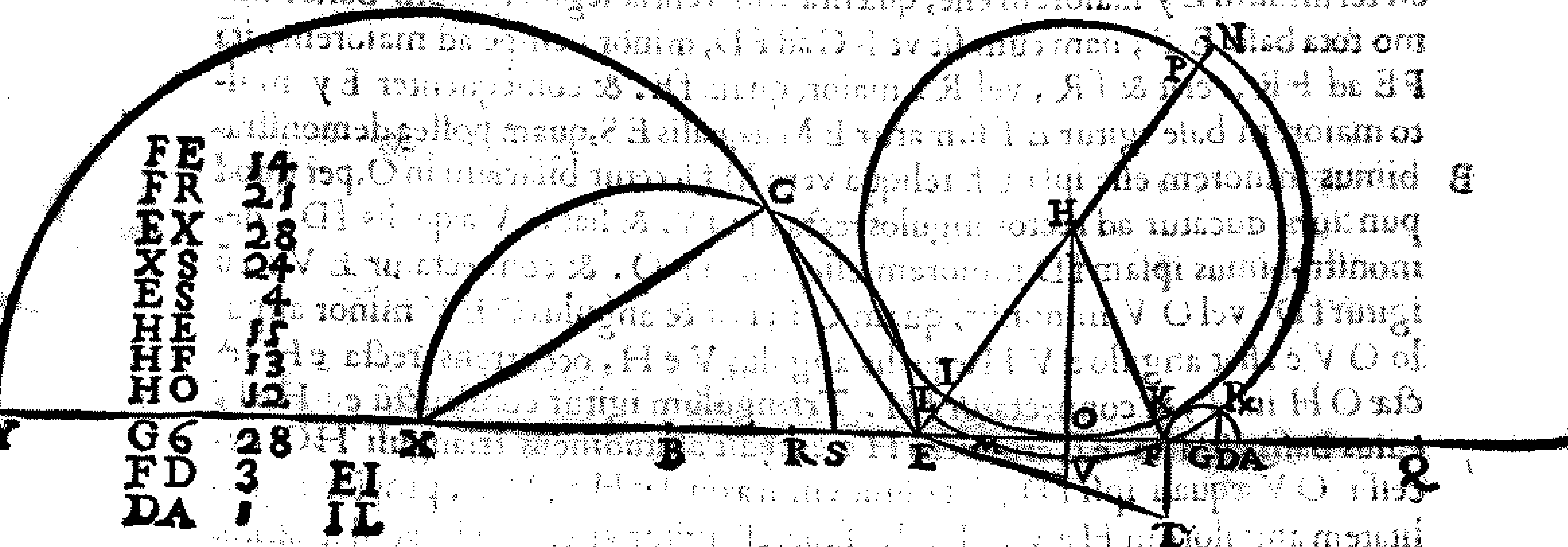
B punctum ducatur ad rectos angulos recta H O V. & fiat O V æqualis f D. demonstrabimus ipsam f D minorem esse, quam E O. & connectatur E V. cũ igitur f D, vel O V minor sit, quam O E; erit & angulus O E V minor angulo O V e. fiat angulo e V H æqualis angulus V e H, occurrens recta e H rectæ O H in H, & connectatur f H. Triangulum igitur constructũ est H e f, cuius basis est data e f, crus vero H e excedit altitudinem trianguli H O excessu O V æquali ipsi f D; datæ sunt enim æquales H e, H V, propter æqualitatem angulorum H e V, H V E. superest igitur vt crus H f excedat altitudinem H O excessu æquali datæ D A; id autem, repetitis Resolutionis vestigijs, ita fiet manifestum.

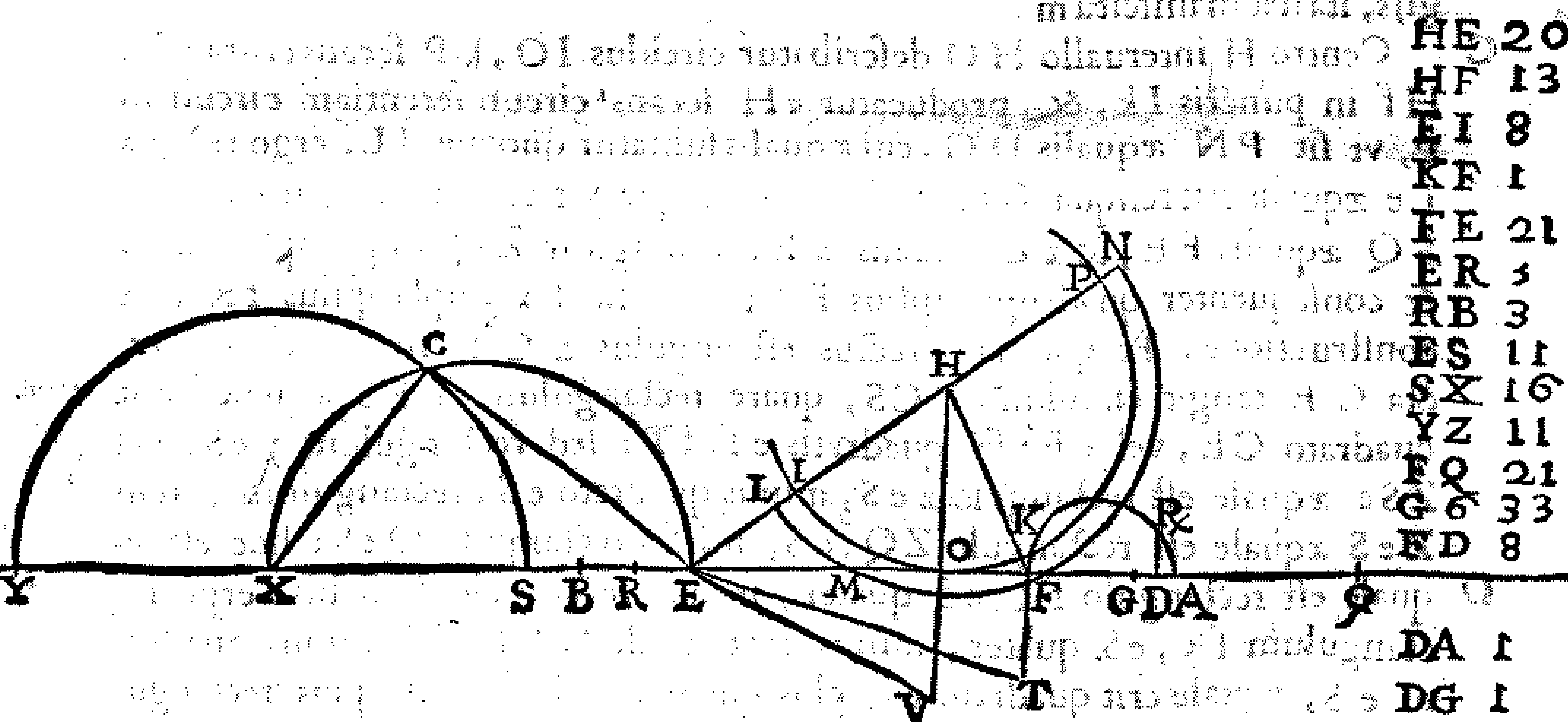
C Centro H interuallo H O describatur circulus I O, k P secans crura e H, H f in punctis I k, & producatur e H secans circumferentiam circuli in P, vt sit P N æqualis D G, cui æqualis sumatur quoque I L. ergo reliqua L e æqualis erit reliquæ G f. producatur quoque y f ex vtraque parte, vt sit F Q æqualis F E, & x Z æqualis x E. erit igitur Z Q dupla ipsius x F. & consequenter quadrupla ipsius F R; cum sit F x dupla ipsius f R, ex constructione. Et quoniam rectus est angulus x C E in semicirculo recta C E tangit circulum Y C S, quare rectangulum Y E S æquale * erit quadrato C E, vel e F: seu quadratis e f, f T: sed rectangulum y e S, vel Z S e æquale est rectangulo z e S, minus quadrato e S, rectangulum autem Z e S æquale est rectangulo Z Q, e S, minus rectangulo Q e S; hoc est æ- 36 tertij

D quale est rectangulo f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis, & minus quadrato e S, æquale erit quadrato e f, plus quadrato f T, hoc est plus rectangulo f D A quater. Addatur vtrobique rectangulum f e S bis, & quadratum e S; auferatur autem rectangulum f D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f D A quater, æquale erit quadratis e f, e S, & rectangulo f e S bis, hoc est * æquale erit quadrato f S, vel quadrato e O quater. recta enim f S dupla est ipsius e O, cum sint æquales S E, e M, & æquales quoque M O, O f, vtraque ex constructione. cum igitur quadruplum sit æquale quadruplo, erit & simplum æquale simplo, 4 secundi

 hoc

hoc est rectangulum F R, E S, vel F R, E M, minus rectangulo f D A,
16 sexti æquale erit quadrato E O. sed quadrato e O æquale est rectangulum I E P, hoc est rectangulum I e N, minus rectangulo e I, P N, vel minus rectangulo e I L, ergo rectangulum f R, e M, minus rectangulo f D A, vel minus rectangulo e I L æquale erit rectangulo I e N, minus rectangulo e I L, addito communi rectangulo e I L rectangulum F R, e M, æquale





erit rectangulo I e N, vt igitur e M ad e N, ita erit e I ad F R. sed cum sit vt f G ad f D, hoc est vt e L ad e I, ita F e ad F R, ex constructione. est quoque permutando vt e L ad e F, ita e I ad f R. ergo vt e M ad E N, ita erit e L ad e F. quare rectangulum F e M sub extremis æquale erit rectangulo L e N sub medijs. ac proinde puncta L M, f N in circulo

A lo erunt, cuius quidem circuli, & centrum * est in recta H V secante rectam M f bisariam, & ad rectos angulos in O, atque ipsa V H secat rectam N L bisariam in H; cum sint æquales N P, I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos, ergo ex Lemmate præmisso punctum H erit centrum circuli L M, F N. atque adeo idem, quod centrum circuli I K P, vnde æquales erunt H F, H L. sunt autem æquales & H K, H I. ergo & reliqua K F, idest excessus, quo crus H f superat H O altitudinem trianguli. reliquæ I L, hoc est D A datæ æqualis erit. Ad datam igitur basim E f constitutum est triangulum H E f, cuius crura H E, H f superant altitudinem H O excessibus I E, K f, æqualibus datis f D, D A. quod facere oportebat. * coro. 1 prop. tertij

B At vero rectam e T minorem esse diametro e X sic demonstrabimus.

Quoniam enim est, vt f G ad f D, ita f e ad f R, ex constructione: erit per diuisionem rationis, vt f G ad G D, ita f e ad e R. sed f G minor est, quàm f e; ergo & G D minor erit quam e R; atque adeo tota f D minor, quam tota f R; quare & rectangulum f D G, vel f D A, minus erit rectangulo f R e. & consequenter rectangulum f D A quater minus erit rectangulo f R e quater, atque addito communi quadrato e f rectangulum f D A quater, hoc est quadratum f T, vnà cum quadrato f e, seu quod idem est quadratum e T minus erit rectangulo f R e quater, vna cum quadrato f e. hoc est minus erit quadrato compositæ ex f R, R e, seu quod idem est quadrato X e. sunt enim æquales f R, R X, ex constructione. quare & recta e T minor erit, quam recta X e, quod erat ostendendum.

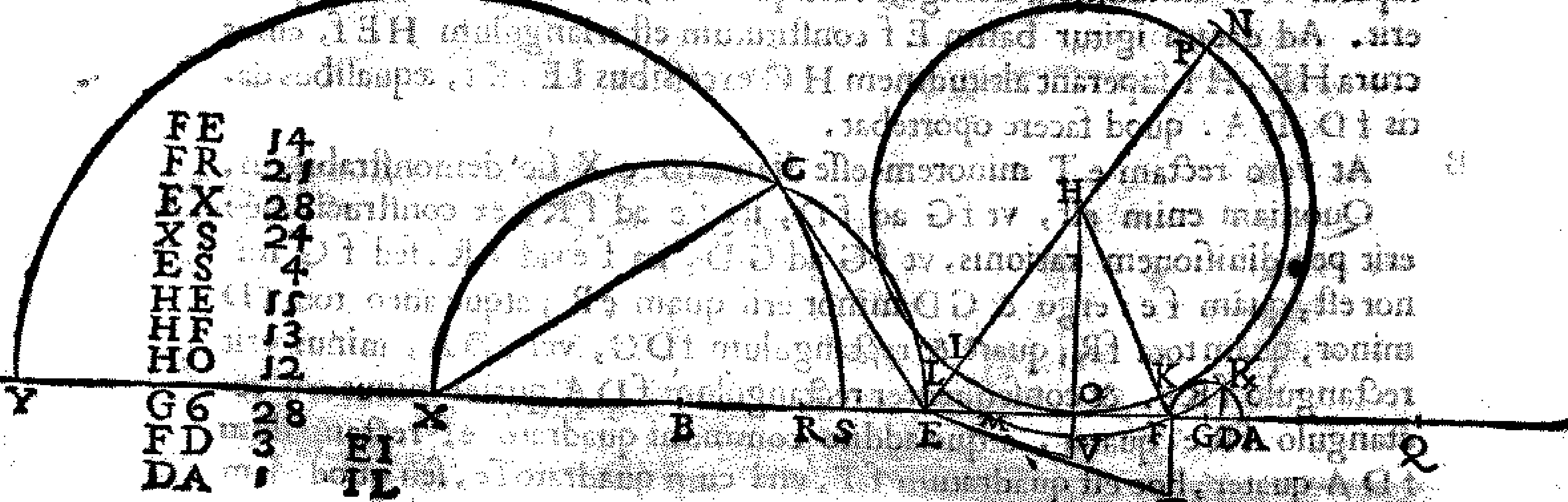
C Rectam quoque e S minorem esse base e f ita demonstrabo.

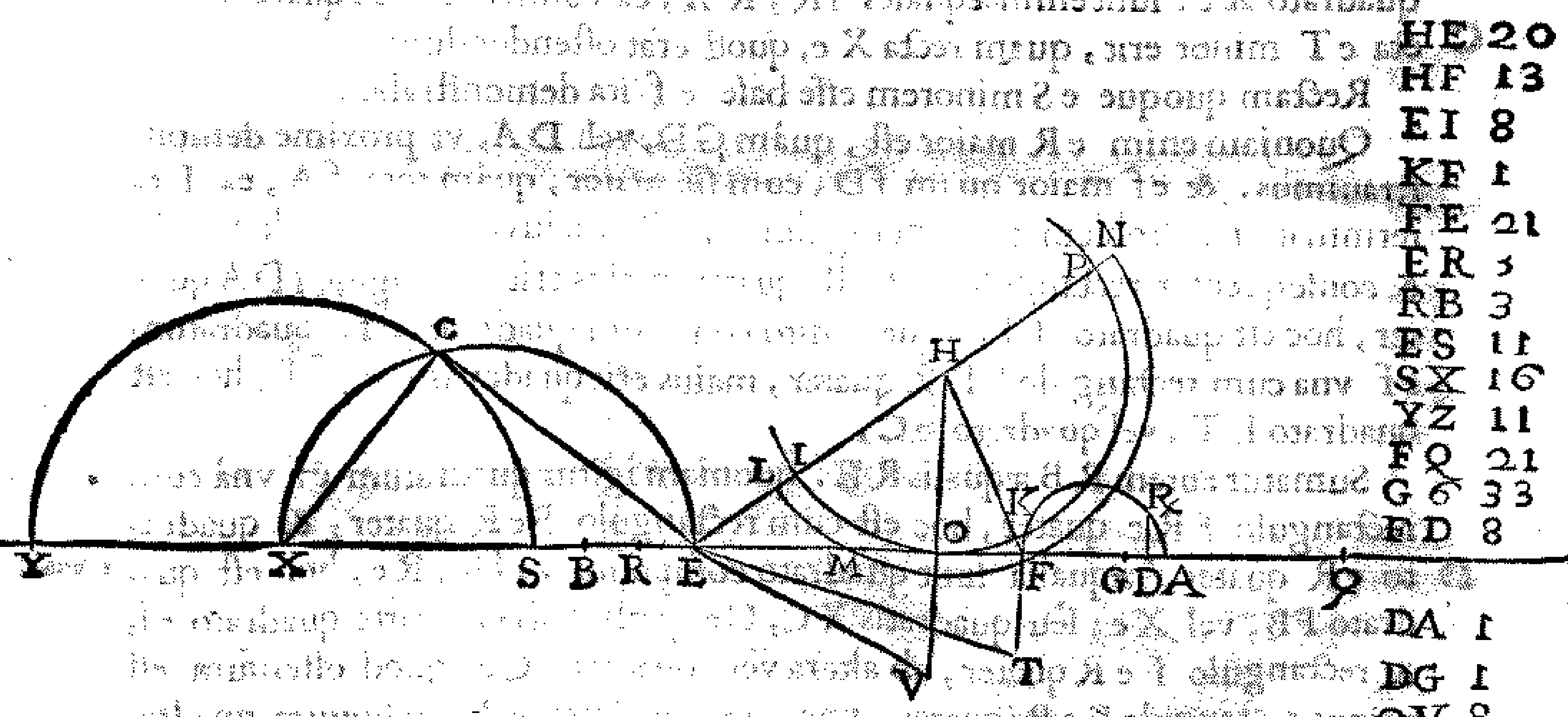
Quoniam enim e R maior est, quàm G D, vel D A, vt proxime demonstrauimus. & e f maior quam f D, cum sit maior, quàm tota f A, ex Determinatione Problematis, rectangulum f e R maius erit rectangulo f D A, & consequenter rectangulum f e R quater, maius erit rectangulo f D A quater, hoc est quadrato f T, atque addito communi quadrato e f, quadratum e f vna cum rectangulo F E R quater, maius erit quadratis e F, f T, hoc est quadrato E T, vel quadrato e C.

Sumatur autem R B æqualis R E. quoniam igitur quadratum e f vnà cum rectangulo F R e quater, hoc est cum rectangulo F e R quater, & quadrato e R quater, * æqualia sunt quadrato compositæ ex f R, R e, hoc est quadrato F B, vel X e; seu quadratis X C, C e. ablato ab vna parte quadrato e f, & rectangulo F e R quater, ab altera vero quadrato C e, quod ostensum est minus rectangulo F e R quater, vnà cum quadrato e F; reliquum quadratum e R quater, hoc est quadratum e B reliquo quadrato X C minus erit, quare & recta e B minus erit, quàm recta X C, vel X S. atque addita, vel ablata vtrinque B S fiet e S minor, quàm X B, hoc est quam e F; sunt enim æquales X B, e F, cum sint æquales R X, R F, & æquales R B, R e, ex constructione. quare constat propositum. Denique rectam F D minorem esse quàm e O demonstrabimus in hunc modum. * 8 secundi

D

Quoniam enim est, vt F G ad F D, ita F E ad F R, ex constructione, erit permutando vt F G ad F E, ita F D ad f R: fiat autem vt F G ad F E, ita E M ad aliam, quæ sit G b. ergo vt f D ad F R, ita erit E M ad G B. quare rectangulum sub extremis f D, G B, æquale erit rectangulo sub medijs F R, E M. sed rectangulum f R, E M, minus rectangulo F D A, vel f D G, ostensum est in Demonstratione Problematis æquale quadrato E O. ergo &





rectangulum F D, G B, minus rectangulo f D G, hoc est rectangulum f D B, æquale erit quadrato E O; vnde proportionales erunt f D, E O, D B. sunt autem & inæquales, vt postea demonstrabimus ergo f B composita ex extremis maior erit, quàm dupla media E O, hoc est quam recta S F, quæ dupla est ipsius E O, nam composita ex tota f E, & E M, vel E S, differentia,

par-

A partium E O, O F, * æqualis est duplæ E O.

Et quoniam est vt f G ad F E, ita E M, vel E S ad G B, ex quarum extremis coro.1 prob. 1 lib.primi
cõposita F b ostensa est maior, quam S f, composita ex medijs; erit * altera ex- th.2 huius
tremarum F G, G b minima; altera maxima. sed f G non est maxima cum sit minor, quam F E, ergo minima erit, & per consequens minor, quàm E S; sed & F A minor est, quàm F E, ex Determinatione; ergo composita ex F G, & F A hoc * est F D dupla minor erit, quàm S f composita ex S E, & corol.ibid.
E f, hoc est quam dupla E O. quare & simpla f D minor erit, quàm simpla E O. quod erat ostendendum.

At vero rectas proportionales f D, E O, D b inæquales esse sic demonstrabitur.

B Si enim non sunt inæquales. sint si fieri potest æquales. ergo f b composita ex extremis æqualis erit duplæ E O, hoc est rectæ S f. & cum sit vt f G ad f E, ita E M, vel E S ad G b. atque F b composita ex extremis æqualis S f compositæ ex medijs, minor * extremarum f G, G B, minori mediarum f E, th.2 huius
E S æqualis erit, maior autem maiori. quare f G, quippe quæ minor est quam f E æqualis erit ipsi E S, vel E M; sed & f D ponitur æqualis E O. ergo & reliqua G D erit æqualis reliquæ M O. & per consequens etiam D A æqualis erit O f, atque adeo tota f A æqualis erit toti f E, quod est absurdum, ponitur enim f A minor quam f E, ex determinatione Problematis. Inæquales sunt igitur f D, E O, D b, quod ostendisse oportuit.

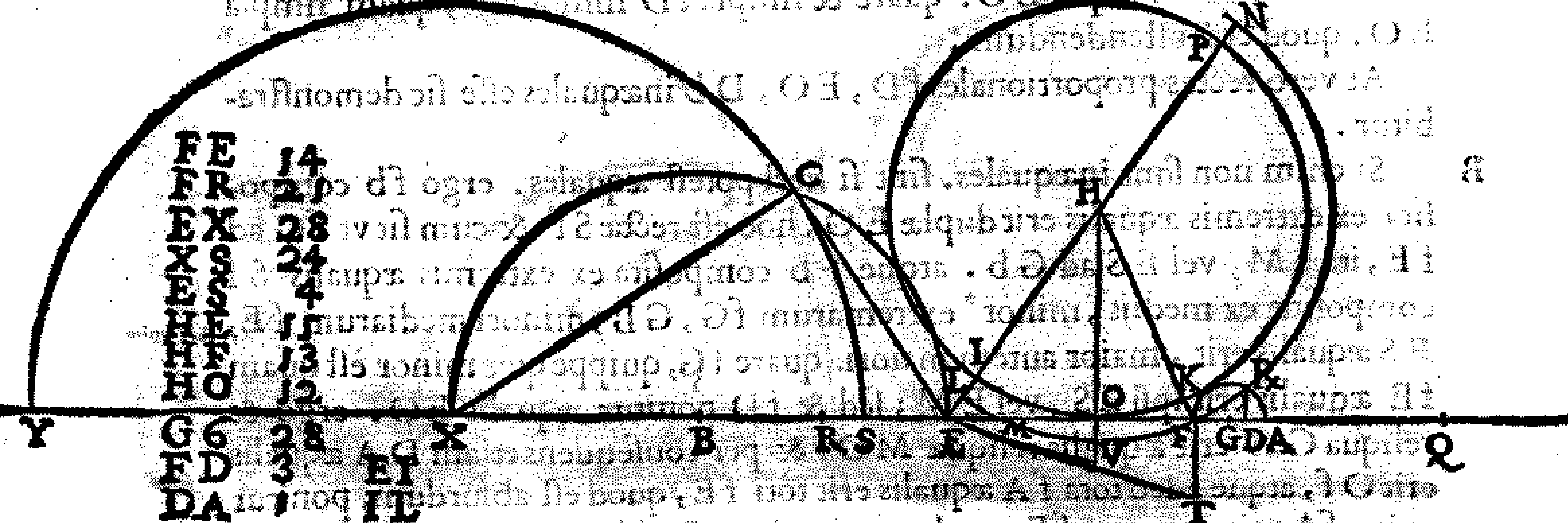
Ex hoc Problematis constructione diametrum terræ inueniemus hac ra-
C tione.

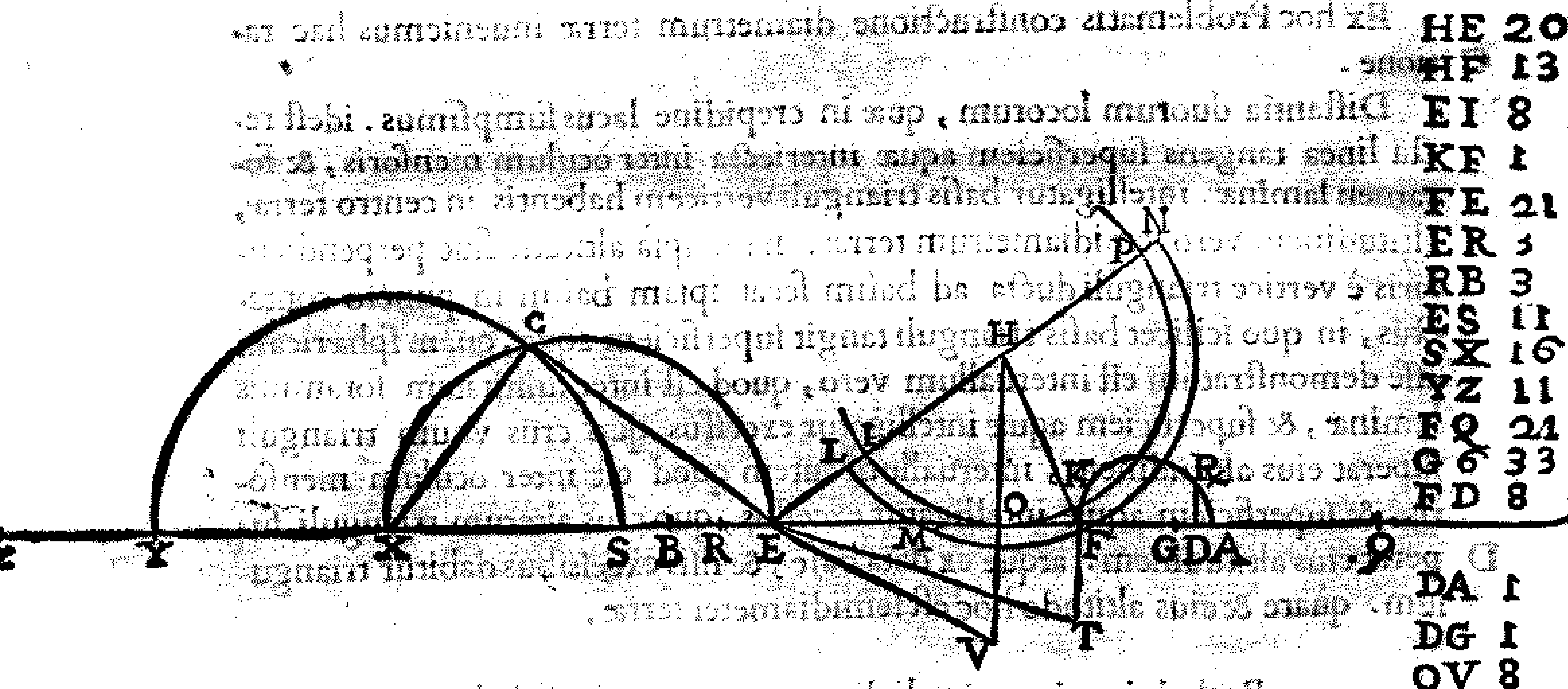
Distantia duorum locorum, quæ in crepidine lacus sumpsimus. idest recta linea tangens superficiem aquæ interiecta inter oculum mensoris, & foramen laminæ. intelligatur basis trianguli verticem habentis in centro terræ, altitudinem vero semidiametrum terræ. nam ipsa altitudo siue perpendicularis è vertice trianguli ducta ad basim secat ipsam basim in puncto contactus, in quo scilicet basis trianguli tangit superficiem aquæ, quam sphæricam esse demonstratum est interuallum vero, quod est inter summitatem foraminis laminæ, & superficiem aquæ intelligatur excessus quo crus vnum trianguli superat eius altitudinem, interuallum autem quod est inter oculum mensoris, & superficiem aquæ intelligatur excessus, quo crus alterum trianguli su-
D perat eius altitudinem: atque ex data base, & illis excessibus dabitur triangulum. quare & eius altitudo hoc est semidiameter terræ.

Ratio igitur inueniendi diametrum terræ ita se habet.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam, differentiæ autem, qua dupla ea recta superat basim deматur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus; reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima ma est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit æqualis compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur.

Est enim ex constructione vt F G ad F D, hoc est vt E L ad E I, ita F E ad f R, cuius dupla est f X, differentia autem, qua ipsa X f superat basim E f, est X E, cuius quadratum excedit quadratum G E, quadrato X C; quadratũ
47 primi autem C E, vel E T* æquale est quadratis E f, f T, hoc est quadrato E f, &





quadruplo rectangulo f D A, vel E I L. itaque quadratum X C est excessus, quo quadratum X E superat quadratum E f, & quadruplũ rectangulum E I L. a recta autem X E dempta est X S æqualis X C, reliquæ vero S E facta est æqualis E M, differentia segmentorum E O, O F; quam quidem E M ponendam esse diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est E L dif-

A differentia excessuum E I, K F: secunda vero basis E F; quartam autem futuram esse diximus æqualem compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum est, nam vt E L ad E F, ita est E M ad E N compositam ex excessibus E I, P N, & diametro I P.

In numeris sit data basis trianguli E F 21, excessus vero I E 8, excessus autem K F 1, fiat vt 7 differentia videlicet excessuum ad 8 excessum maiorem, ita 21, idest basis ad aliam rectam, ea erit 24 eius dupla 48, differentia autem inter 48 & 21 est 27. ab hac auferatur 16 nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 27 superat quadratum ex 21, & quadruplum eius quod fit ex 8 & 1, hoc est ex excessibus; remanebunt 11 pro E M differentia segmentorum E N, N F.

B hæc differentia ponenda est pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 7, nempe differentia excessuum, secunda vero 21, hoc est basis; quarta erit 33 composita ex excessibus, & diametro quæsita, à qua composita si auferantur excessus nempe 8 & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

Vel sit data basis 14, excessus maior 3, excessus minor 1. Fiat vt 2 differentia excessuum ad 3 excessuum maiorem, ita 14 ad aliam rectam. ea erit 21, eius dupla 42. differentia autem inter 42, & 14 est 28. ab hac auferatur 24, nempe recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 28 superat quadratum ex 14, & quadruplum eius, quod fit ex 3 & 1, hoc est ex excessibus. remanebunt 4 pro E M differentia

C segmentorum E N, N F. hæc differentia ponenda est pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 2 differentia excessuum, secunda vero 14 hoc est basis, quarta erit 28 composita ex excessibus, & diametro quæsita, auferantur excessus, nempe 3 & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

Aliam quoque rationem inueniendi diametrum terræ exponemus, & quidem faciliorem quia per numeros minores procedet.

Fiat vt differentia excessum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam. differentiæ autem, qua dupla ex recta inuenta superat basim dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub recta inuenta, & differentia ipsius inuentæ, & basis superat quadru-

D plum rectangulum sub excessibus; reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit composita ex excessibus, & diametro quæsita.

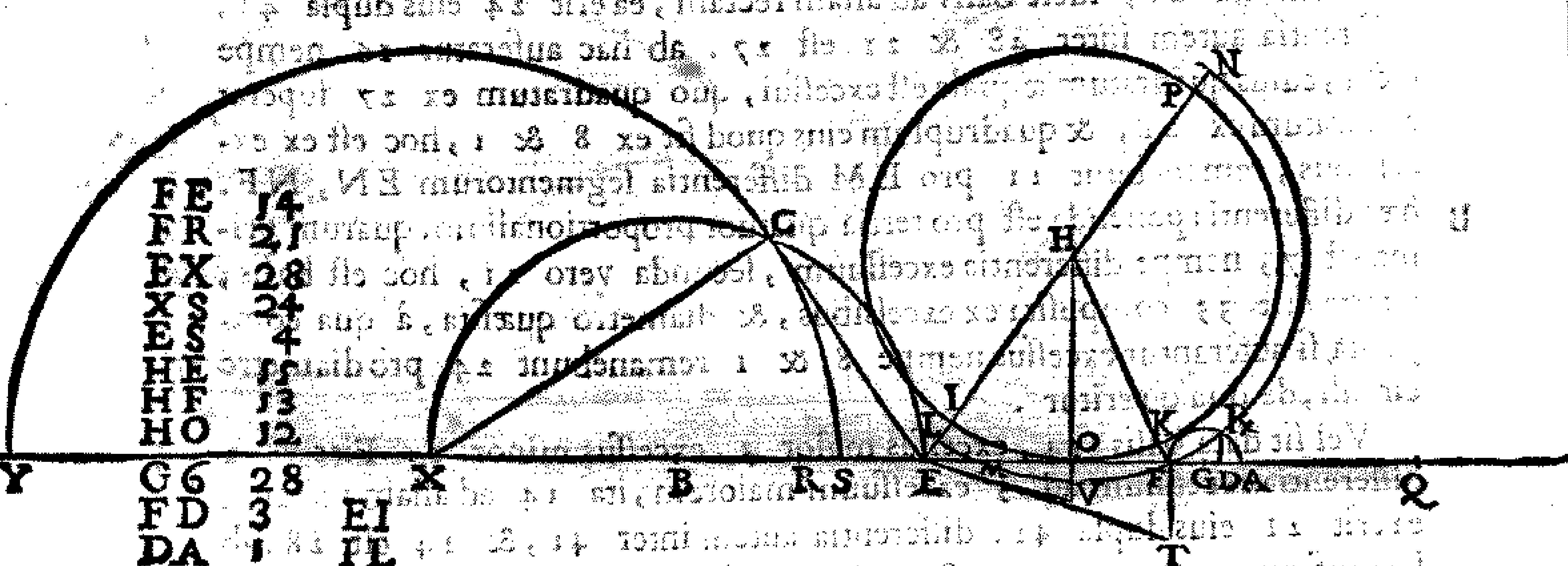
Ratio hæc inueniendi diametrum terræ eadem est quæ ratio supra exposita. licet operatione differant. nam quadruplum rectangulum F R E sub recta inuenta F R & R E; differentia ipsius F R, & basis E F superat quadruplum rectangulum E I L sub excessibus, eodem excessu, quo quadratum x E superat quadratum basis E F, & quadruplum rectangulum E I L. idque sic demonstrabitur.

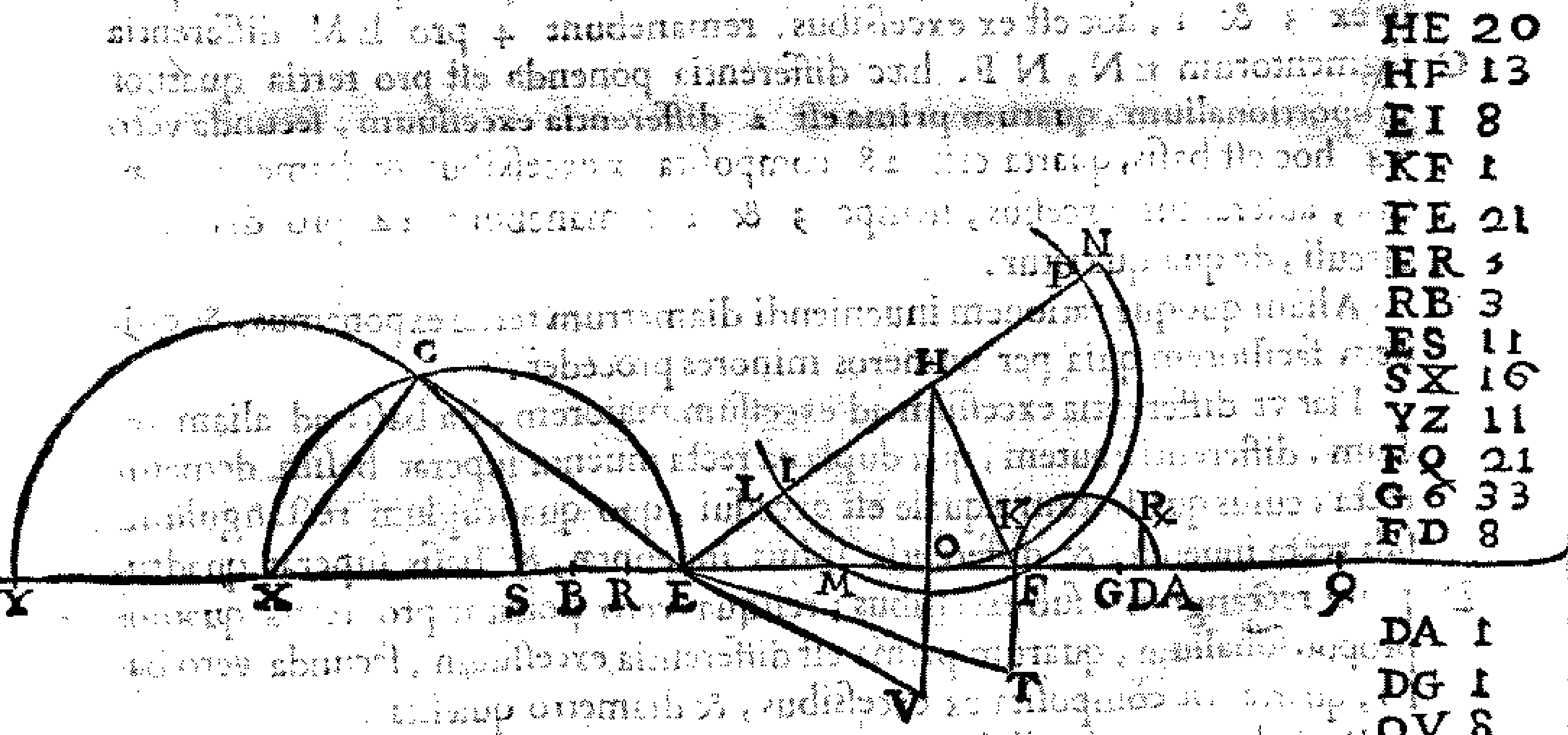
Quoniam enim quadratum x E superat quadratum C E, vel E T, seu

qua-

quadrata E F, F T, quadrato x C; quadratum autem F T æquale est quadruplo rectangulo F D A, vel E I L. ergo ipsum quadratum x E superabit quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L quadrato x C.

Et quoniam quadruplum rectangulum f R e, vna cum quadrato e f æ-
8 secund. quale* est quadrato compositæ ex f R, R e, hoc est quadrato x e; quod quidem quadratū superat quadratū e f, & quadruplum rectangulum e I L quadra-





to x C, vt demonstrauimus. ergo & quadruplum rectangulum f R e, vnà cum quadrato e f, superabit quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L eodem quadrato X C. auferatur commune quadratum E F, ergo quadruplum rectangulum F R E itidem superabit quadruplum rectangulum E I L, quadrato X C. sed & quadratum X E superat quadratum E F, &

qua-

A quadruplum rectangulum E I L quadrato X G, ergo quadruplum rectangulum F R E superat quadruplum rectangulum E I L eodem excessu, quo quadratum X E superat quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L; quod erat ostendendum.

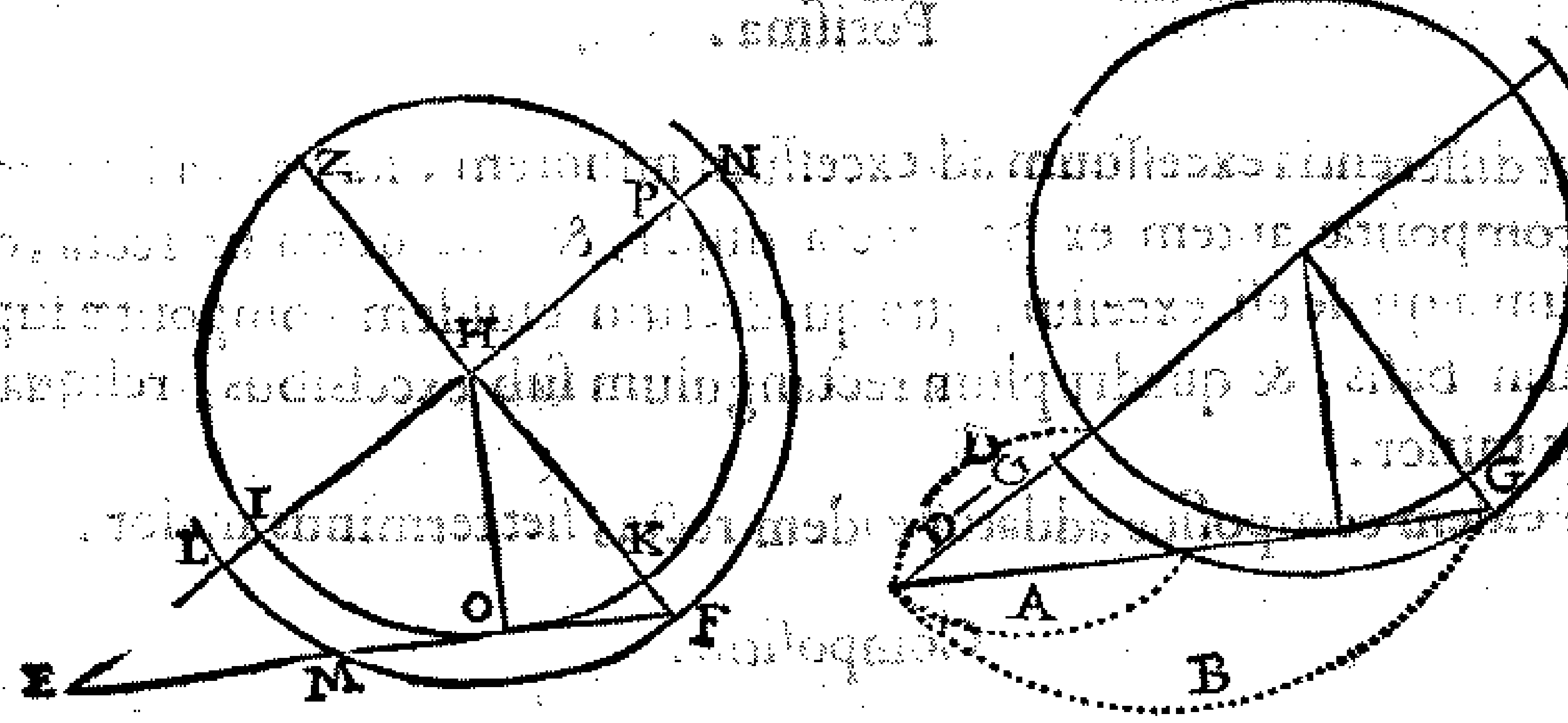
Sit data basis trianguli 21 excessus maior 8, excessus minor 1. Fiat vt 7 differentia excessuum, ad 8 excessum maiorem, ita 21 hoc est basis, ad aliam rectam, ea erit 24, eius dupla 48 differentia autem inter 48, & 21, est 27. ab hac auferatur 16, nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub 3, & 24, hoc est, sub recta inuenta, & differentia eiusdem inuentæ, & basis, superat rectangulum ex 8 & 1. hoc est ex excessibus; remanebunt 11 pro E M differentia segmentorum E N, N F. hæc differentia ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 7 differentia excessuum, secunda vero 21. B idest basis, quarta erit 33 composita ex excessibus, & diametro quæsita, demptis excessibus nempe 8, & 1, remanebit diameter, eaque erit 24.

Eundem Casum Problematis alia via & resoluam, & componam quamuis in hac quoque, quæ sequitur Resolutione idem quæsitum erit.

Alia Resolutio primi Casus.

Sit data basis trianguli, vt in antecedenti Resolutione B, excessus vero quo crus maius superat altitudinem trianguli D. excessus autem, quo crus C minus eamdem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulum. Factum iam sit, & resumantur antecedentis Resolutionis figuræ, & quæ-

D



ratur, vt prius E M differentia segmentorum E O, O F. esto illa A. ergo B — A erit M F, & consequenter F O erit $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$.

Et quoniam rectangulum L E N æquale est rectangulo M E F; erit vt L E ad E M, ita E F ad E N. hoc est in figura resolutionis, vt D — G ad A, ita B ad $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$. itaque $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$ erit ipsa E N à qua si auferatur I E, hoc est D; reliqua I N erit $\frac{B \text{ in } A}{D - G} - D$.

Pro-

Producatur autem F H vſque ad circumferentiam O I P in Z; erit F Z æqualis I N, atque adeo & ipſa F Z erit $\frac{B \text{ in } A}{D - G} - D$. A

35 tertij Et quoniam rectangulum K F Z * æquale eſt quadrato O F, hoc eſt rectangulum ſub G, & $\frac{B \text{ in } A}{D - G} - D$ æquale quadrato ex $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$

$$\frac{G \text{ in } B \text{ in } A}{D - G} - G \text{ in } D, \text{ æquabitur } BQ\tfrac{1}{4} + AQ\tfrac{1}{4} - B \text{ in } A\tfrac{1}{2}$$

Quadruplicentur omnia, vt Poteſtas æquationis integra fiat, ergo

$$\frac{g \text{ in } B \text{ in } A\,4}{d - g} - G \text{ in } D\,4 \text{ æquabitur } BQ + AQ - B \text{ in } A\,2$$

Addatur vtrique parti B in A 2, & G in D 4. auferatur autem A Q, vt cognita ab incognitis ſeparentur; ergo

$$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\,4}{d - g} + B \text{ in } A\,2 - AQ, \text{ æquabitur } BQ + G \text{ in } D\,4$$

Vt autem æquatio facilius explicetur, tranſmutetur fractio $\frac{g \text{ in } b}{d - g}$ in integram magnitudinem, ea eſto F. nam ſi fiat vt D — G ad G, ita B ad aliam, quæ ſit f; erit f eadem quæ $\frac{g \text{ in } b}{d - g}$. atque adeo planum f in A 4 idem erit, quod planum $\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\,4}{d - g}$. tranſmutata igitur in magnitudinem integram fractione. B

$$E \text{ in } A\,4 + B \text{ in } A\,2 - AQ \text{ æquabitur } BQ + G \text{ in } D\,4$$

Vel quod idem eſt $f\,4 + B\,2 \text{ in } A - AQ$ æquabitur $BQ + G \text{ in } D\,4$.

Et explicata Æquatione,

$$F\,2 + B - L.\,V.\,F\,2 + BQ - BQ - G \text{ in } D\,4, \text{ æquabitur } A$$

Vel $F\,2 + B + L.\,V,\,F\,2 + BQ - BQ - G \text{ in } D\,4$ æquabitur A.

In hac Æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum minor tantum indicat quæſitam E M differentiam ſegmentorum baſis, maior enim terminus maior eſt ipſa differentia, immo etiam tota baſe, vt in conſtructione manifeſtum fiet. C

Poriſma.

Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum minorem, ita baſis ad aliam rectam, compoſitæ autem ex hac recta dupla, & baſe dematur recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem compoſitæ ſuperat quadratum baſis, & quadruplum rectangulum ſub exceſsibus, reliqua erit terminus minor.

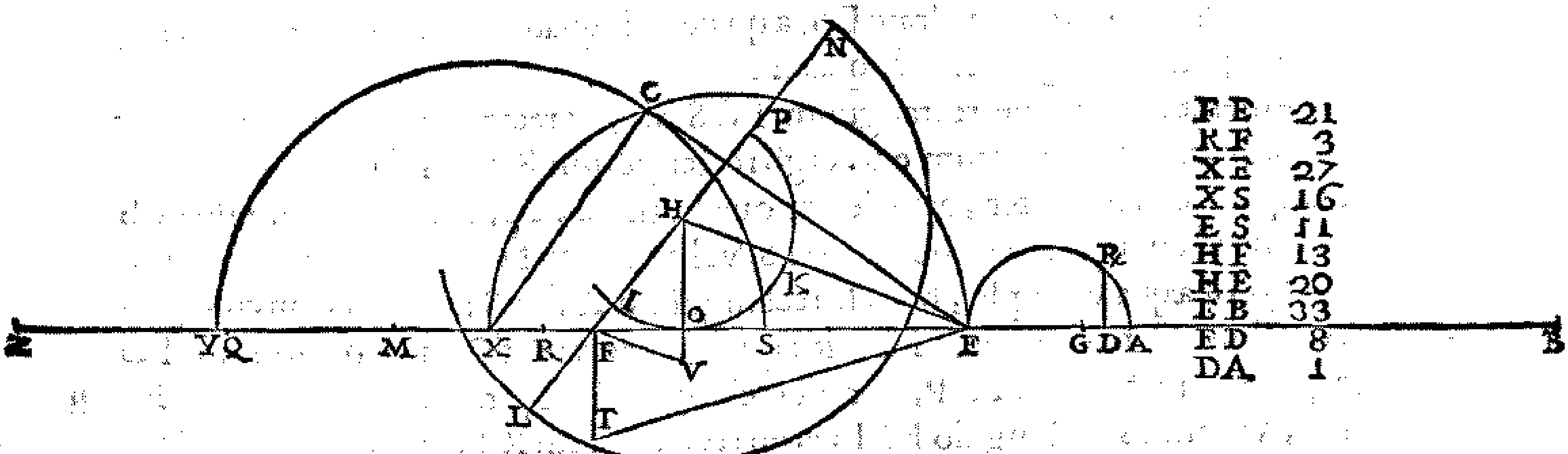
Vel ſi eidem compoſitæ addatur eadem recta, fiet terminus maior. D

Compoſitio.

Sit data trianguli baſis E F; exceſſus vero, quo crus maius ſuperat altitudinem trianguli e D: exceſſus autem, quo crus minus eamdem altitudinem ſuperat D A. ex quibus exceſsibus compoſita e A ſit minor baſe e f. Oportet inuenire triangulum. Erigatur ex puncto D perpendicularis D ℞, quam ſemicirculus in e A deſcriptus ſecet in ℞. ex puncto autem f demittatur perpendicularis f T, dupla ipſius D ℞, & connectatur e T. quadratum igitur f T quadruplum erit quadrati D ℞, vel rectanguli e D A.

Dein-

A Deinde e D sumatur D G æqualis D A, & fiat vt E G ad G D, ita E F ad aliam, quæ sit F R. eaque duplicetur in X, & in E X describatur semicirculus



F E	21
R F	3
X E	27
X S	16
E S	11
H F	13
H E	20
E B	33
E D	8
DA	1

B X C E, in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonstrauimus minorem esse diametro E X; & connectatur X C, & centro X interuallo X C describatur circulus secans diametrum E X productam in y. is circulus secabit quoque rectam E E, quia x C maior est, quam x F. vt infra ostendetur, secet ergo in S, termini igitur, de quibus A in Æquatione explicabilis est sunt S E minor, E y maior. & manifestum est terminum E y maiorem esse quæsita differentia segmentorum basis; immo tota base. secetur ergo F S bifariam, & ad rectos angulos in O à recta H O V, & fiat O V æqualis D A, quam demonstrabimus minorem esse recta, O F. & connectatur f V. angulus igitur O V f maior erit angulo O f V: fiat angulo o V f æqualis angulus V f H occurrens recta f H, rectæ O H in H, & connectatur E H. Trian-
C gulum igitur constructum est H e f, cuius basis est data E f, crus vero, H f excedit altitudinem trianguli H O excessu O V æquali ipsi D A datæ: sunt enim æquales H f, H V, propter æqualitatem angulorum H f V, H V f. superest igitur vt crus H E excedat altitudinem H O, excessu æquali datæ E D: id autem ita fit manifestum.

Centro H interuallo H O describatur circulus O I, P k secans crura H f, H E in punctis I K; & producatur f H secans circumferentiam in P, vt sit P N æqualis E D, cui æqualis sumatur quoque I L. ergo cum sit I L æqualis E D & I f æqualis D A, vel D G: erit & reliqua f L æqualis reliquæ E G. Producatur quoque E y in Z, vt sit x Z æqualis X E, & sumatur f Q æqualis f E. atque f M æqualis S E. Quoniam igitur X e superat F E excessu X F du-
D pla X E, hoc est Z E superabit duplam f E, quæ est Q E excessu X F duplo: sed Z E superat Q E excessu Z Q: ergo Z Q dupla erit ipsius X E, & consequenter quadrupla rectæ R f.

Et quoniam rectus est angulus x C e in semicirculo: recta C e tangit circulum Y C S. quare rectangulum Y e S æquale erit quadrato C e, vel e T, seu quadratis e F, F T: sed rectangulum y e S, vel Z S E æquale est rectangulo z e S, minus quadrato e S, rectangulum autem z e S æquale est rectangulis Z Q, E S, Q E S, hoc est rectangulo R E, E S quater, & rectangulo f E S bis; Z Q enim ostensa est quadrupla ipsius R E. ipsa autem Q E dupla est ipsius f E, ex constructione. ergo rectangulum f R, E S quater, plus rectangulo f E S bis, minus quadrato E S, æquale erit quadrato f E, plus quadrato f T, hoc est plus rectangulo E D A quater. A

Auferatur vtrinque rectangulum f E S bis, & rectangulum e D A quater addatur autem quadratum e S. ergo rectangulum R f, e S quater, minus rectangulo e D A quater, æquale erit quadratis f e, e S, minus rectangulo f e S bis. hoc * est æquale erit quadrato f S, vel quadrato f O quater, quare & simplum erit æquale simplo, hoc est rectangulum R f, e S minus rectangulo e D A, vel minus rectangulo f I L erit æquale quadrato f O. sed quadratum f O æquale est rectangulo I F P, hoc est rectangulo I F N, minus rectangulo I E, P N, vel minus rectangulo F I L; ergo rectangulum R f, E S, minus rectangulo F I L, æquale erit rectangulo I F N, minus rectangulo F I L; addito communi rectangulo F I L; rectangulum R F, E S, hoc est R F M rectangulo I F N æquale erit. vt igitur F M ad F N, ita erit f I, ad f R; sed cum sit vt E G ad G D, hoc est vt L f ad f I, ita e f ad f R; est quoq; permutando vt L f ad f E, ita f I ad f R. ergo vt f M ad f N, ita erit f L ad f E; vnde rectangulum M f E sub extremis æquale erit rectangulo N f L sub medijs. quare puncta M N, E L in circulo erunt, cuius quidem circuli centrum est in recta H V secante rectam M E bifariam, & ad rectos angulos in O; cum sint æquales M f, f O ipsis E S, S O, vtraque vtrique, ex constructione; atque ipsa V H secat rectam N L bifariam in H, cum sint æquales N P, I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate, quod huic Problemati præmissum est, punctum H; erit centrum circuli M N, E L, idemque quod centrum circuli P k I, atque adeo æquales erunt H E, H L: sunt autem æquales & H K, H I; ergo & reliqua k E, reliquæ I L, hoc est E D, æqualis erit. quod erat ostendendum. ad datam igitur basim e f constitutum est triangulum H e f, cuius crura H e, H f superant altitudinem. H O, excessibus k e, I f æqualibus datis e D, D A. quod erat faciendum. B

Corol. prop 1 tertij

C

Rectam autem e T minorem esse diametro e X. ita ostendam.

Quoniam enim est vt e G ad G D, ita e f ad f R, ex constructione; & e S minor quam e f, erit & G D minor, quàm f R; atque tota e D minor, quam tota e R. vnde & rectangulum e D G, vel e D A minus erit rectangulo e R f, & consequenter quadruplum rectangulum e D A, hoc est quadratum f T, minus erit quadruplo rectangulo e R f. atque addito vtrique parti quadrato f e, quadrata f T, f e, hoc * est quadratum e T, minus erit quadruplo rectangulo e R f, vnà cum quadrato e f; hoc * est minus erit quadrato compositæ ex e R, R f, idest quadrato e X; quare & recta e T minor erit, quam recta e X. quod erat ostendendum. D

47 primi

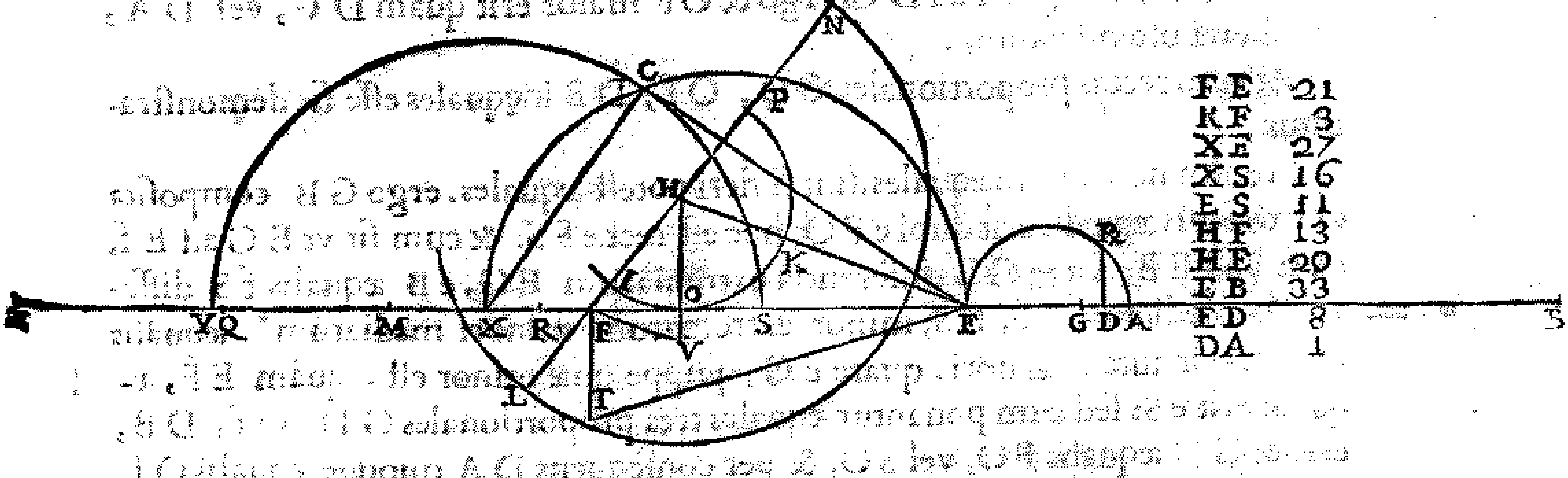
8 secundi

Rectam vero X C maiorem esse quam X f. ita fiet manifestum.

Quoniam enim f R ostensa est maior, quam G D; & f e maior est quã e D;

tota

A tota enim e A minor est quàm f e, ex Determinatione Problematis; rectangulum e f R maius erit rectangulo e D G, vel e D A. & consequenter qua-



B druplum E F R, maius quadruplo E D A, hoc est quadrato F T. atque addito vtrique parti quadrato F e, quadruplum rectangulum e f R vnà cũ quadrato f E maius erit quadratis f T, f e, hoc est quadrato e T, vel quadrato E C.

Et quoniam quadratum E f, vnà cum rectangulo e R f quater, vel cum rectangulo e f R quater, & quadrato f R quater,* æqualia sunt quadrato compositæ ex e R, R f, hoc est quadrato e X, seu quadratis X C, C e; ablato ab vna parte quadrato e f, & rectangulo e f R, quater; ab altera vero quadrato C e, quod ostensum est minus rectangulo e f R quater, vna cum quadrato e f; reliquum quadratum f R quater, hoc est quadratum X F, reliquo quadrato X C minus erit. quare & recta X F minor quam recta X C. quod erat ostendendum. 8 secundi

C Rectam denique D A minorem esse recta O F. sic demonstrabitur.

Quoniam enim est vt E G ad G D, ita E F ad F R ex constructione, erit permutando vt E G ad E F, ita G D ad F R, fiat autem vt E g ad E F, ita E S ad aliam, quæ sit E B. ergo vt G D ad F R, ita erit E S ad E B. quare rectangulum sub extremis G D, E B æquale erit rectangulo sub medijs F R, E S, sed rectangulum F R, E S, minus rectangulo E D A, vel e D G ostensum est in demonstratione Problematis æquale quadrato F O. ergo & rectangulum G D, e B, minus rectangulo E D G, hoc est rectangulum G D B, æquale erit quadrato F O. vnde proportionales erunt G D, F O, D B; sunt autẽ & inæquales, vt postea demonstrabimus, ergo G B composita ex extremis maior erit quam dupla media F O, hoc est quam recta F S.

D Et quoniã est vt e G ad e f, ita e S ad e B, G B autem differentia extremarũ e G, e B ostensa est maior, quàm F S, differentia mediarum e f, e S. ergo altera extremarum e G, e B minima erit, altera maxima. sed e G non est maxima, cum sit minor, quàm E f. ergo minima erit, & per consequens minor quam e S. sed & e A minor est quàm e F, ex determinatione. ergo cõposita ex e A, & e G, hoc* est dupla e D minor erit quàm cõposita ex e f, & e S. hoc est quam dupla e O. quare & simpla e D minor erit, quàm simpla theo.2.li.4 Corol.1 Prob.8 lib. primi

 E O:

E O: & cum sit E G minima, & extrema quatuor proportionalium E G, E f, e S, e B; erit altera extrema E B maxima. vnde maior quam e F. sed e D ostensa est maior, quam e O. ergo reliqua D B maior erit, quam reliqua O f. sed vt B D ad O F, ita est O f ad D G. ergo & O f maior erit quam D G, vel D A, quod erat ostendendum. A

At vero rectas proportionales G D, O f, D B inęquales esse sic demonstrabitur.

Si enim non sunt inæquales, sint si fieri potest æquales. ergo G B composita ex extremis æqualis erit duplæ F O, hoc est rectæ F S. & cum sit vt E G ad E f, ita E S ad E B, atque G B differentia extremarum E G, e B æqualis f S differentiæ mediarum e F, E S, minor extremarum minori mediarum* æqualis erit, maior autem maiori. quare E G, quippe quæ minor est, quàm E F, æqualis erit e S: sed cum ponantur æquales tres proportionales G D, O f, D B, erit & G D æqualis F O, vel S O, & per consequens D A quoque æqualis O f. ergo tota e A æqualis erit toti e f, quod est absurdum; ponitur enim e A minor quam e f, ex determinatione Problematis. inæquales igitur sunt G D, O F, D B, quod erat ostendendum.

th. 3 lib. 4 | B

Ex hac constructione Problematis, inuenitur diameter tertæ hoc modo.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam, compositæ autem ex hac recta dupla, & base, demätur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem compositæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus; reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit æqualis compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur. C

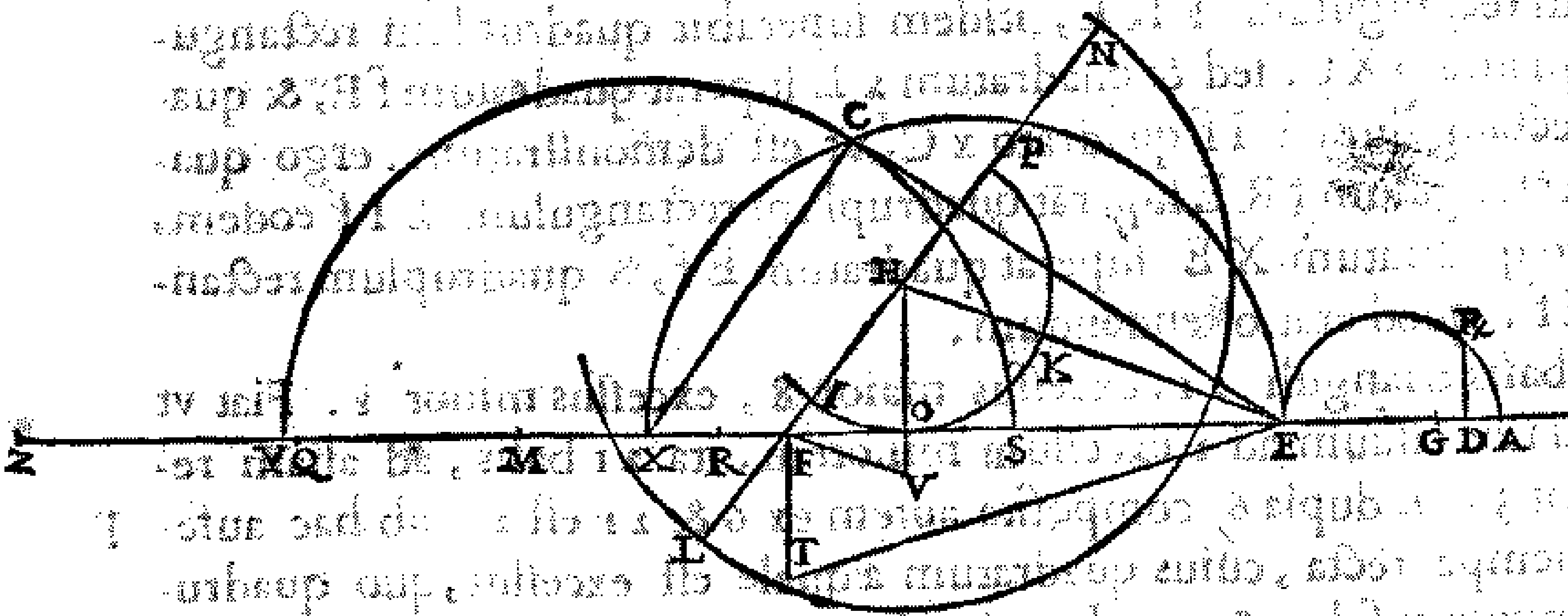
Est enim ex constructione, vt e G ad G D, hoc est, vt L f ad f I, ita e f ad R R, cuius dupla est f X composita autem ex X f, & fe est X e. eius quadratum superat quadratum C e quadrato X C. quadratum autem C e, vel e T* æquale est quadrato e f, vna cum quadrato f T, hoc est vna cum rectangulo B D A quater, vel L I f quater. itaque quadratum x C erit excessus, quo quadratum x e superat quadratum e f, & quadruplum rectangulum L I f, à recta autem x e dempta est x S æqualis x C; reliqua vero S e facta est differentia segmentorum e O, O f; quam quidem seu ipsi æqualem f M ponendam esse diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est L f differentia excessuum k e, I f. secunda vero basis fe, quartam autem futuram esse diximus æqualem compositæ ex excessibus. & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum est, nam vt L f ad fe, ita est f M ad f N compositam ex excessibus f I, P N, & diametro I P.

47 primi | D

In numeris sit data basis trianguli 21. excessus vero maior 8. excessus autem minor 1. Fiat vt 7 differentia excessuum ad 1 excessum minorem, ita 21, hoc est basis, ad aliam rectam. ea erit 3. eius dupla 6 composita autem ex 6, & 21 est 27. ab hac auferatur 16 recta videlicet, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 27 superat

qua-

A quadratum ex 21, & quadruplum eius, quod fit ex 8 & 1, hoc est ex excessibus remanebunt 11. pro tertio quatuor proportionalium termino, quorum



FE	21
RF	3
XE	27
XS	16
ES	11
HF	13
HE	20
EB	33
ED	8
DA	1

B primus est 7 differentia excessuum, secundus vero 21 basis, quartus erit 33, hoc est composita ex excessibus, & diametro quæsita. & ablatis excessibus 8 & 1, remanebit diameter 24.

Et hic quoque exponam rationem inueniendi diametrum terræ faciliorem nimirum per numeros minores progredientem.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam. compositæ autem ex hac recta dupla, & base, dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub recta inuenta, & composita ex eadem inuenta, & base superat quadruplum rectangulum sub excessibus; reliqua verò ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis; quar-
C ta erit composita ex excessibus, & diametro de qua quæritur.

Hæc ratio inueniendi diametrum terræ non est dissimilis ab ea, quæ supra exposita est ratione. nam recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum FRE sub recta inuenta FR, & RE composita ex ipsa FR, & base FE superat quadruplum rectangulum EDA sub excessibus, vel LIF: eadem est, quæ recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum XE superat quadratum FE, & quadruplum rectangulum LIF. Quadruplum enim rectangulum FRE superat quadruplum rectangulum LIF eodem excessu, nempe quadrato XC, quo etiam quadratum XE superat quadratum EF, & quadruplum rectangulum LIF. vt mox demonstrabimus.

D Quoniam enim quadratum XE superat quadratum CE, vel ET, seu quadrata EF, FT, quadrato XC; quadratum autem FT æquale est quadruplo rectangulo EDA, vel LIF. ergo ipsum quadratum XE superabit quadratum EF, & quadruplum rectangulum LIF, quadrato XC.

Et quoniam quadruplum rectangulum FRE vna cum quadrato FE *æquale est quadrato compositæ ex FR, RE, hoc est quadrato XE, quod quidem quadratum superat quadratum FE, & quadruplum rectangulum LIF quadra- 8 secundi

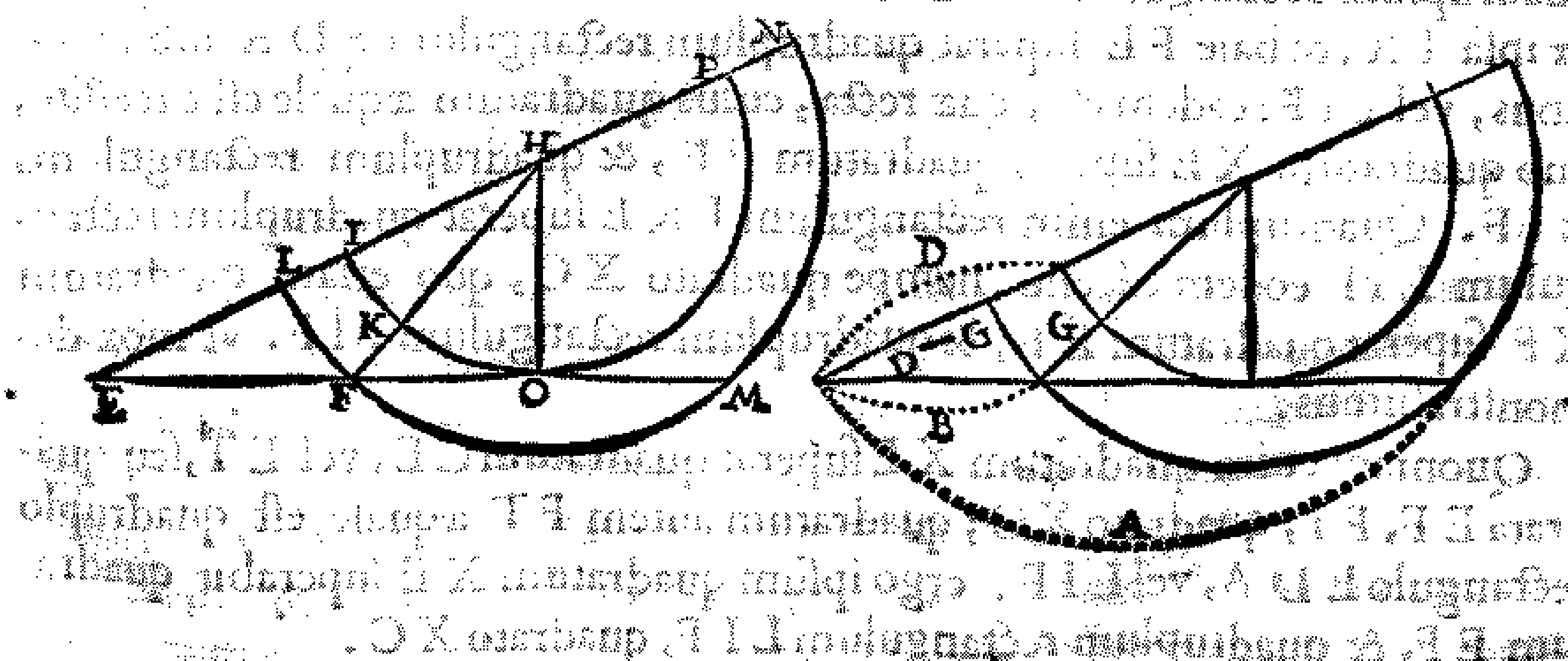
drato X C; vt demonstrauimus. ergo & quadruplum rectangulum F R E A
vna cum quadrato f E superabit quadratum f E, & quadruplum rectãgulum L I f eodem quadrato X C. & ablato vtrinque quadrato f E, reliquum, hoc est quadruplum rectangulum F R E, itidem superabit quadruplum rectangulum L I f, quadrato X C. sed & quadratum x E superat quadratum f E, & quadruplum rectangulum L I f quadrato x C, vt est demonstratum. ergo quadruplum rectangulum f R E superat quadruplum rectangulum L I f eodem excessu, quo quadratum X E superat quadratum E f, & quadruplum rectangulum L I f. quod erat ostendendum.

Sit data basis trianguli 21. excessus maior 8, excessus minor 1. Fiat vt 7 differentia excessuum ad 1 excessum minorem, ita 21 basis, ad aliam rectam, ea erit 3 eius dupla 6. composita autem ex 6 & 21 est 27. ab hac auferatur 16, nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub 3 & 24, hoc est sub recta inuenta, & composita; ex eadem inuenta & base superat quadruplum rectangulum ex 8 & 1, hoc est ex excessibus. remanebunt 11 pro tertio quatuor proportionalium termino, quorum primus est 7 differentia excessuum, secundus vero 21, idest basis, quarta erit 33 composita ex excessibus, & diametro, de qua quæritur, atque adeo ablatis excessibus 8. & 1 remanebit ipsa diameter 24. B

Resolutio secundi casus.

SEd cadat perpendicularis trianguli extra triangulum, & sit data basis B; excessus vero, quo crus maius superat altitudinem D, excessus autem, quo crus minus eandem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulum. C

Factum iam sit, & sit illud triangulum H E f, in cuius basim productam cadat perpendicularis H O; & centro H interuallo H O describatur circulus I O P secans crura H E, H f in punctis I K. productum vero crus maius



D

E H in P, erunt igitur I E, k F excessus, quibus crura H E, H f superant perpendicularem H O. quoniam igitur dantur basis E f, excessus maior I E, & excessus minor k f. sit basis B, excessus vero maior D, excessus autem

tem

A rem minor G, vt in figura ad resolutionem pertinente designatum est.

Rursus centro H interuallo autem H f, alius circulus describatur secans productam basim E F in M, crus vero E H in L, ipsamque productum in N. differentia igitur rectarum E O, O M, erit basis E F. sunt enim * æquales f O, O M; differentia autem crurum H E, H f erit E L, ea ipsa quæ est excessuum I E, K f, eaq. in figura Resolutionis erit D -- G. Quæratur E M composita ex base, & dupla continuatione basis, vsque ad perpendicularem, hoc est composita ex E f, & dupla f O; esto illa A, ergo A ✢ B * erit duplum segmentum E O. vnde simplum segmentum E O erit A $\frac{1}{2}$ ✢ B $\frac{1}{2}$. 2 tertij; co. 2 prob. 1 lib. primi;

Et quoniam rectangulum L E N * æquale est rectangulo F E M, erit vt L e ad E f. ita E M ad E N, hoc est in figura ad resolutionem pertinente, erit vt 36 tertij

B D — G ad B, ita A ad $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$. itaque $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ erit ipsa E N, ex qua si abscindatur P N hoc est G; reliqua P E erit $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G.

Et quoniam rectangulum I E P * æquale est quadrato E O, hoc est rectangulum sub D, & $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G æquale quadrato ex A $\frac{1}{2}$ ✢ B $\frac{1}{2}$. ibid.

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — D in G æquabitur A Q $\frac{1}{4}$ ✢ B Q $\frac{1}{4}$ ✢ B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Potestas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\ 4}{d\text{-}g}$ — D in G 4 æquabitur A Q ✢ B Q ✢ B in A 2.

Auferantur vtrinque B in A 2, & A Q: addatur autem D in G 4. vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\ 4}{d\text{-}g}$ — B in A 2 — A Q æquabitur B Q ✢ D in G 4.

Vt autẽ æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{d \text{ in } b}{d\text{-}g}$ in integrã

C magnitudinẽ; ea esto F. si enim fiat vt D — G ad D, ita B ad aliã, quæ sit F. erit F eadem quæ $\frac{d \text{ in } b}{d\text{-}g}$. atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\ 4}{d\text{-}g}$. transmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 — B in A 2 -- A Q, æquabitur B Q † D in G 4.

Seu quod idem est F 4 -- B 2 in A -- A Q æquabitur B Q † D in G 4.

Et explicata Æquatione.

F 2 - B ✢ L. V. (F 2 - B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

Vel F 2 - B - L. V. (F 2 B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

Porisma.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam

D rectam; differentiæ autem, qua dupla ea recta superat basim addita recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus, fiet terminus maior.

Vel si eidem compositæ addatur eadem recta, fiet terminus minor.

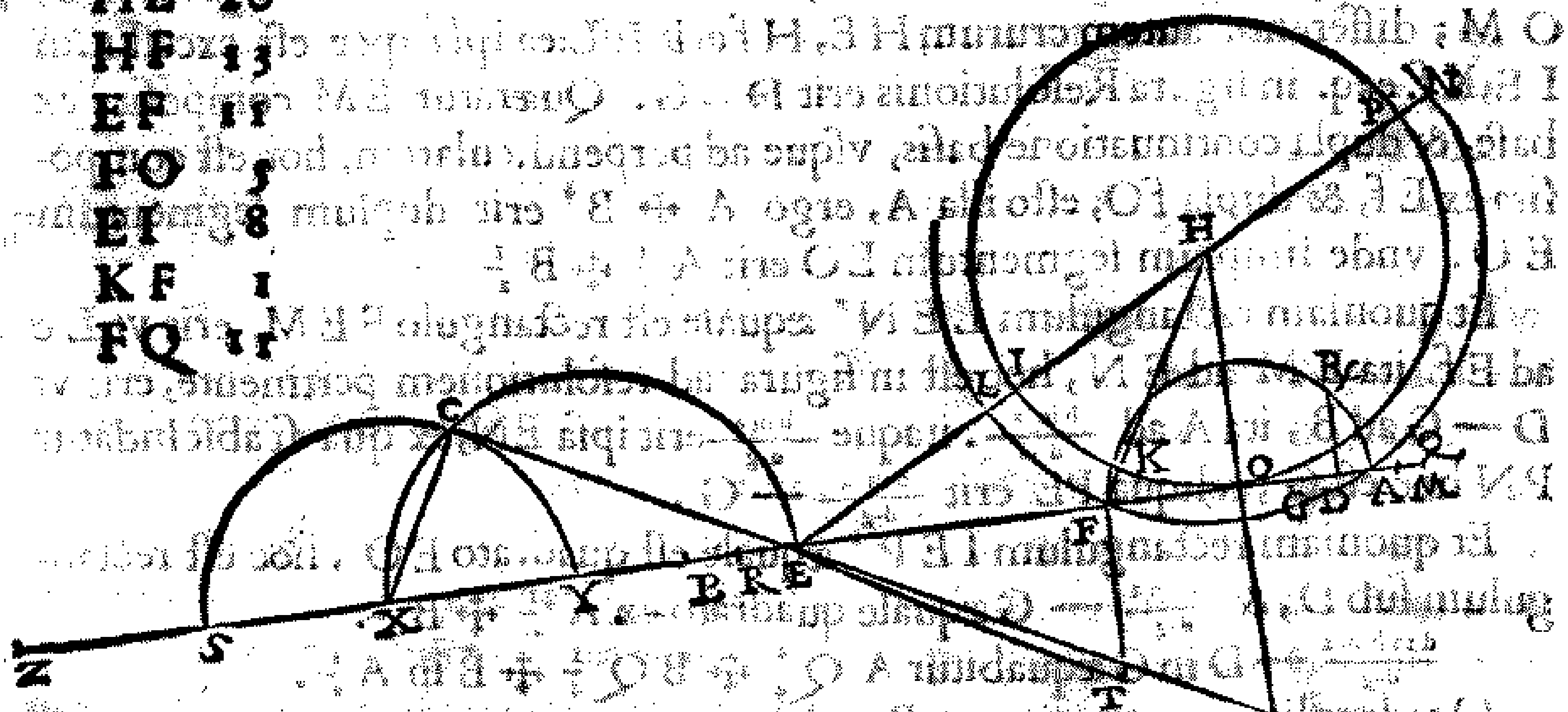
In hac quoque Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, sed maior tantum indicat quæsitam E M.

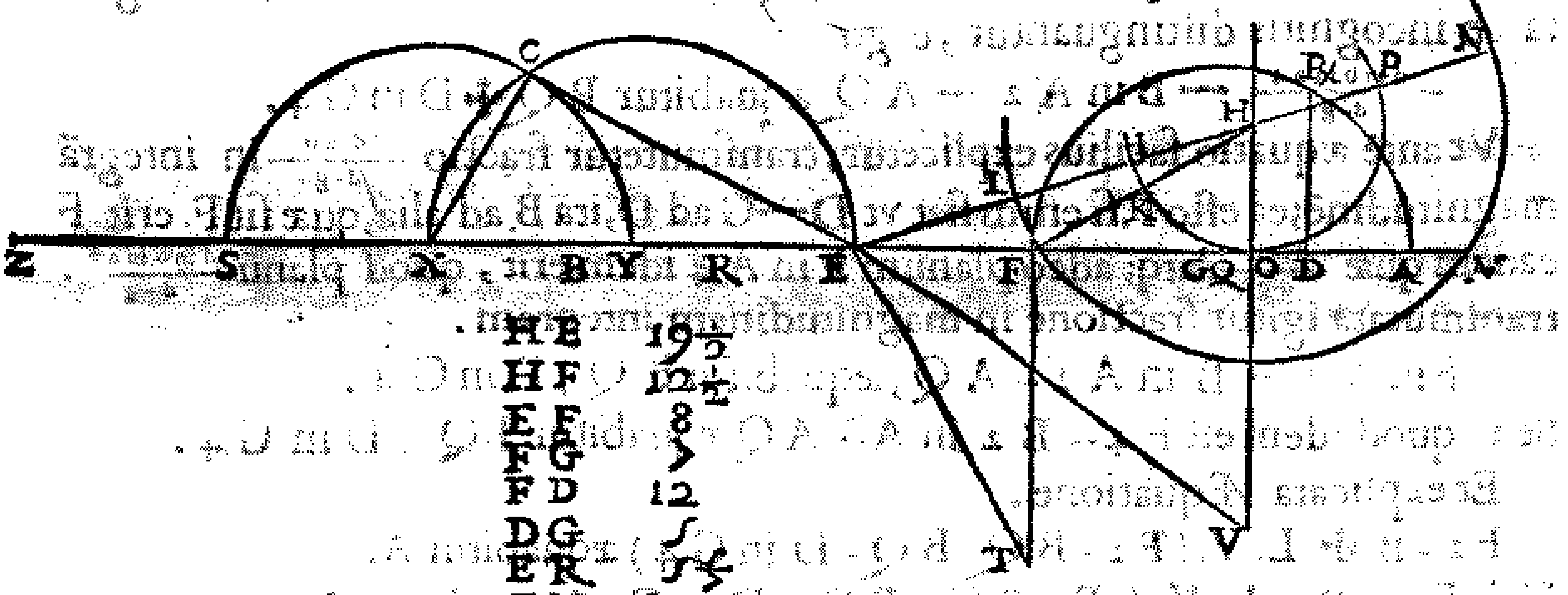
hic deest aliquid.

Compositio secundi Casus. A

Sit data trianguli basis E F, excessus vero, quo crus maius superat altitudi-

HE	20
HF	13
EF	11
FO	5
EI	8
KF	1
FQ	11





HE	$19\frac{1}{2}$
HF	$12\frac{1}{2}$
EF	8
FG	5
FD	12
DG	5
ER	$5\frac{4}{5}$
FM	22
ES	28
EY	$10\frac{6}{5}$

nem trianguli F D: excessus autem quo crus minus eandem altitudinem superat D G, quorum excessuum differentia F G sit minor base E F. Oportet inuenire triangulum. Producatur F D, in A, vt sit D A æqualis D G, & in ipsa F A describatur semicirculus quem ducta ex D perpendicularis D R secet in R. ex puncto autem F demittatur perpendicularis F T dupla ipsius D R, & connectatur E T, quadratum igitur F T quadruplum erit quadrati D R vel rectanguli F D A. Deinde fiat vt F G ad F D, ita F E ad aliam, quæ sit F R. eaque duplicetur in X, & in E X describatur semicirculus, in quo accommodetur recta E C æqualis E T quam demonstrabimus minorem esse diametro E X, & connectatur X C, & centro X inter-

ter-

A teruallo X C describatur circulus secans diametrum E X in Y, productam vero in S. termini igitur de quibus in Æquatione explicabilis est A sunt E S maior, E y minor.

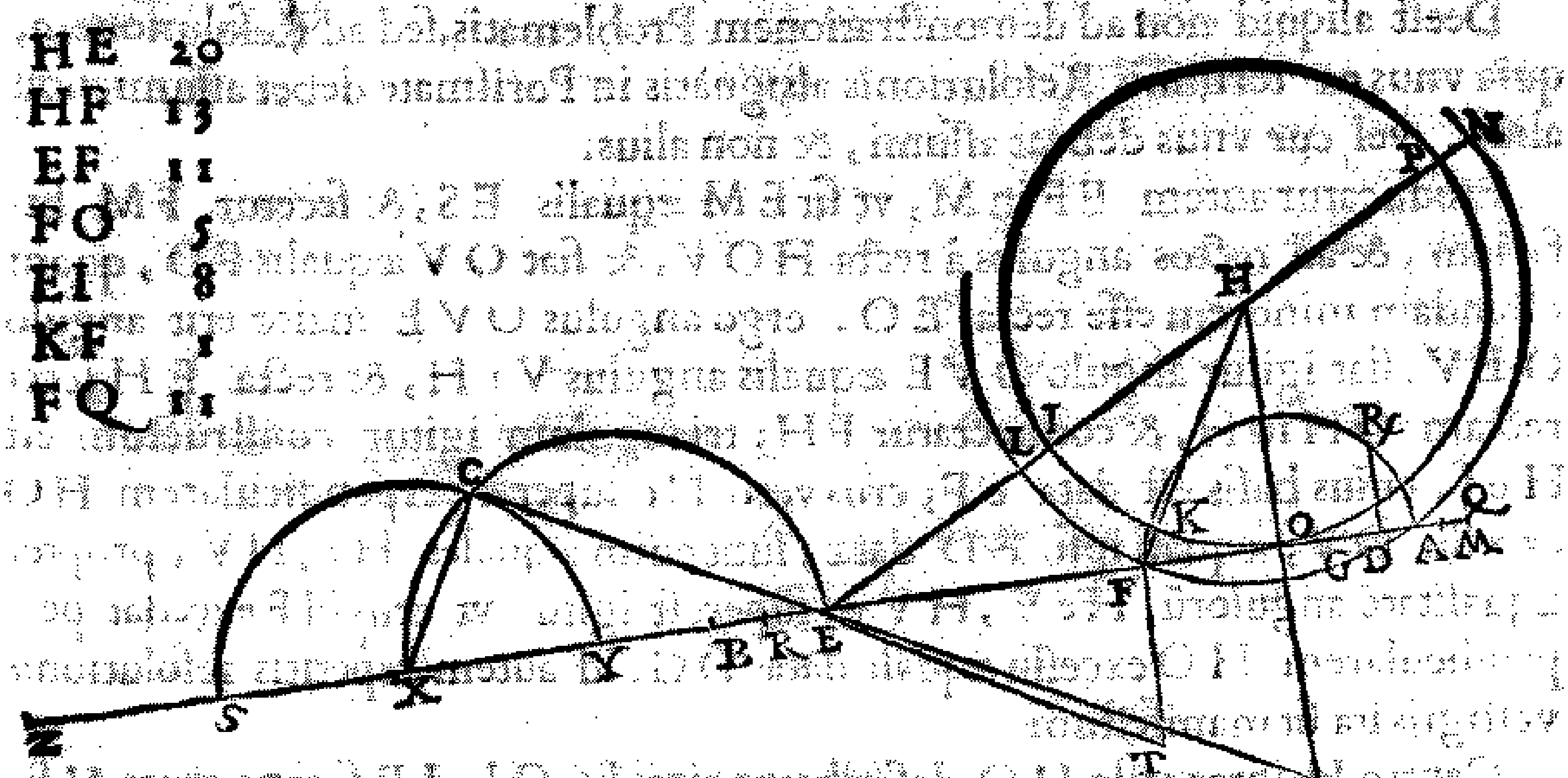
Deest aliquid non ad demonstrationem Problematis, sed ad Resolutionem; quia vnus ex terminis Resolutionis assignatis in Porismate debet assumi, non alius, vel cur vnus debeat assumi, & non alius.

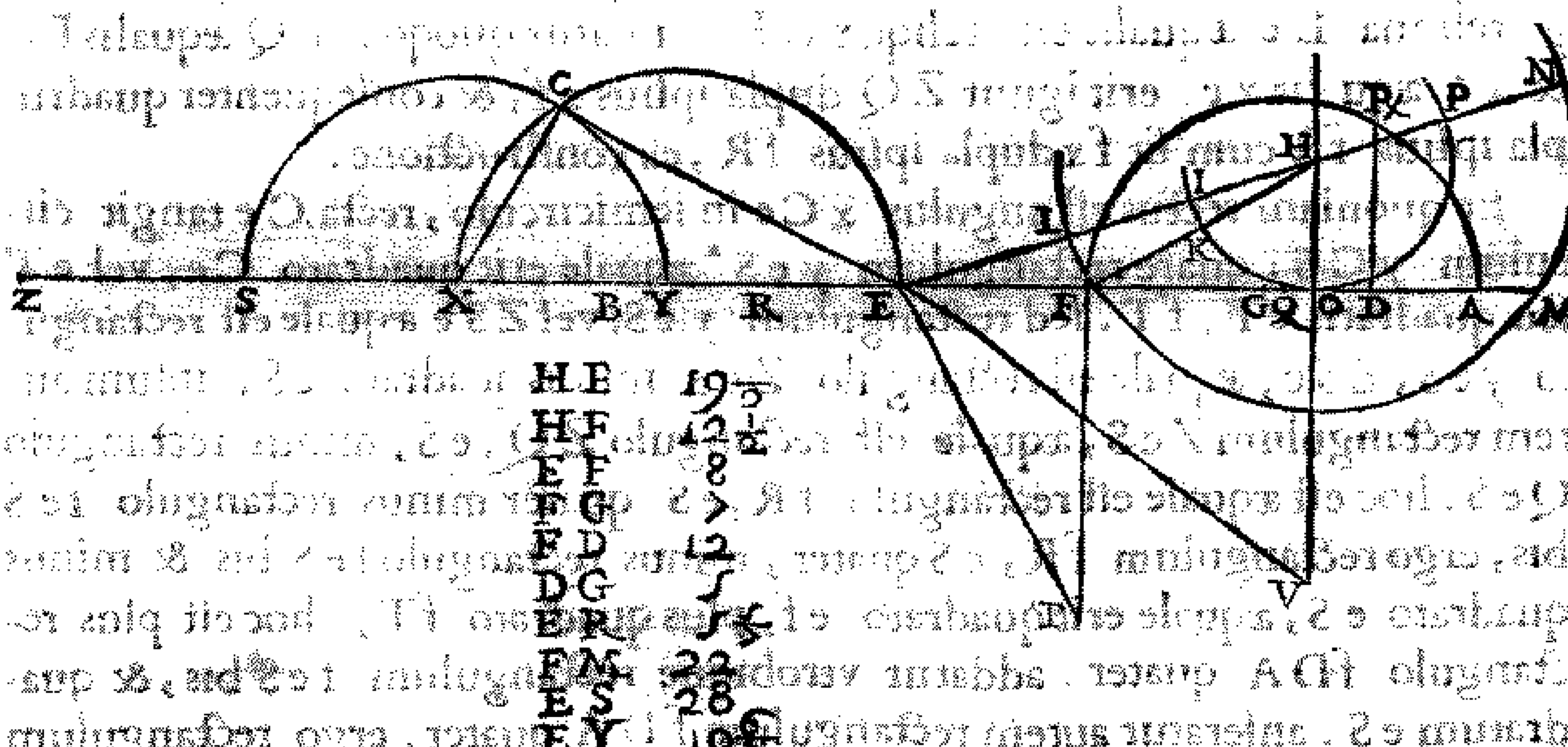
Producatur autem E F in M, vt sit E M æqualis E S, & secetur F M bifariam, & ad rectos angulos à recta H O V, & fiat O V æqualis F D, quam ostendam minorem esse recta E O. ergo angulus O V E maior erit angulo O E V. fiat igitur angulo O V E æqualis angulus V E H, & recta E H secet rectam O H in H, & connectatur F H; triangulum igitur constructum est
B H e f, cuius basis est data e F; crus vero H e superat perpendicularem H O excessu O V, æquali ipsi F D datæ; sunt enim æquales H e, H V, propter æqualitatẽ angulorũ H e V, H V e. superest igitur vt crus H F excedat perpendicularem H O excessu æquali datæ D G. id autem repetitis resolutionis vestigijs ita fit manifestum.

Centro H interuallo H O describatur circulus O k, I P secans crura H F, H e in punctis k I, & producatur e H vltra circumferentiam circuli K I P secans eam in P, & fiat P N æqualis G D, cui æqualis sumatur quoque I L. ergo reliqua L e æqualis erit reliquæ G F. sumatur quoque F Q æqualis F e, & x Z æqualis x e. erit igitur Z Q dupla ipsius x f, & consequenter quadrupla ipsius f R cum sit f x dupla ipsius f R, ex constructione.

C Et quoniam rectus est angulus x C e in semicirculo, recta C e tangit circulum y C S; quare rectangulum y e S * æquale erit quadrato C e, vel e T 35 tertii
seu quadratis e F, f T. sed rectangulum y e S; vel Z S e æquale est rectangulo y e S, Z S e, æquale est rectangulo Z e S minus quadrato e S; ipsum autem rectangulum Z e S, æquale est rectangulo Z Q, e S, minus rectangulo Q e S. hoc est æquale est rectangulo f R, e S quater minus rectangulo f e S bis, ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis & minus quadrato e S, æquale erit quadrato e f, plus quadrato f T, hoc est plus rectangulo f D A quater. addatur vtrobique rectangulum f e S bis, & quadratum e S. anferatur autem rectangulum f D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f D A quater; æquale erit quadratis e f,
D e S, & rectangulo f e S bis. hoc est * æquale erit quadrato f S, vel quadrato 4 secundi
e O quater; recta enim f S dupla est rectæ e O, cum sit ipsa f S æqualis composita ex M e, & f. sunt enim æquales e S, e M, ex constructione. Cum igitur quadruplum æquale sit quadruplo, erit & simplum æquale simplo hoc est rectangulum f R, e S, vel f R, e M, minus rectangulo f D A, æquale erit quadrato e O, sed quadrato e O æquale est rectangulum I e P, hoc est rectangulum I e N, minus rectangulo e I, P N, vel minus rectangulo e I L, ergo rectangulum f R, e M, minus rectangulo f D A, vel minus rectangulo e I L, æquale erit rectangulo I e N, minus rectangulo e I L; addito communi rectangulo e I L, rectangulum f R, e M, æquale erit

16 sexti erit rectangulo I e N. vt igitur e M ad e N, ita erit e I ad f R. sed cum sit A
vt F G ad F D: hoc est vt E L ad E I, ita F E ad F R; est quoque permutando, vt E L ad E F, ita E I ad F R; ergo vt E M ad E N, ita erit E L ad E F





quare rectangulum F E N sub extremis æquale erit rectangulo L e N sub B
medijs. puncta igitur L F, M N in circulo erunt, cuius quidem circuli centrum est in recta H V, secante rectam F M bifariam, & ad rectos angulos in O atque ipsa V H secat rectam N L bifariam in H, cum sint æquales N P, I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos; ergo ex præmisso Lemmate punctum H erit centrum circuli L F, M N, atque adeo idem, quod centrum circuli I O P. vnde æquales erunt H F, N L: sunt autem æquales & H K, H I. ergo & reliqua K F, idest excessus, quo crus H F superat H O altitudinem trianguli; reliquæ I L, hoc est D G datæ, æqualis erit. Ad datam igitur basim E F

con-

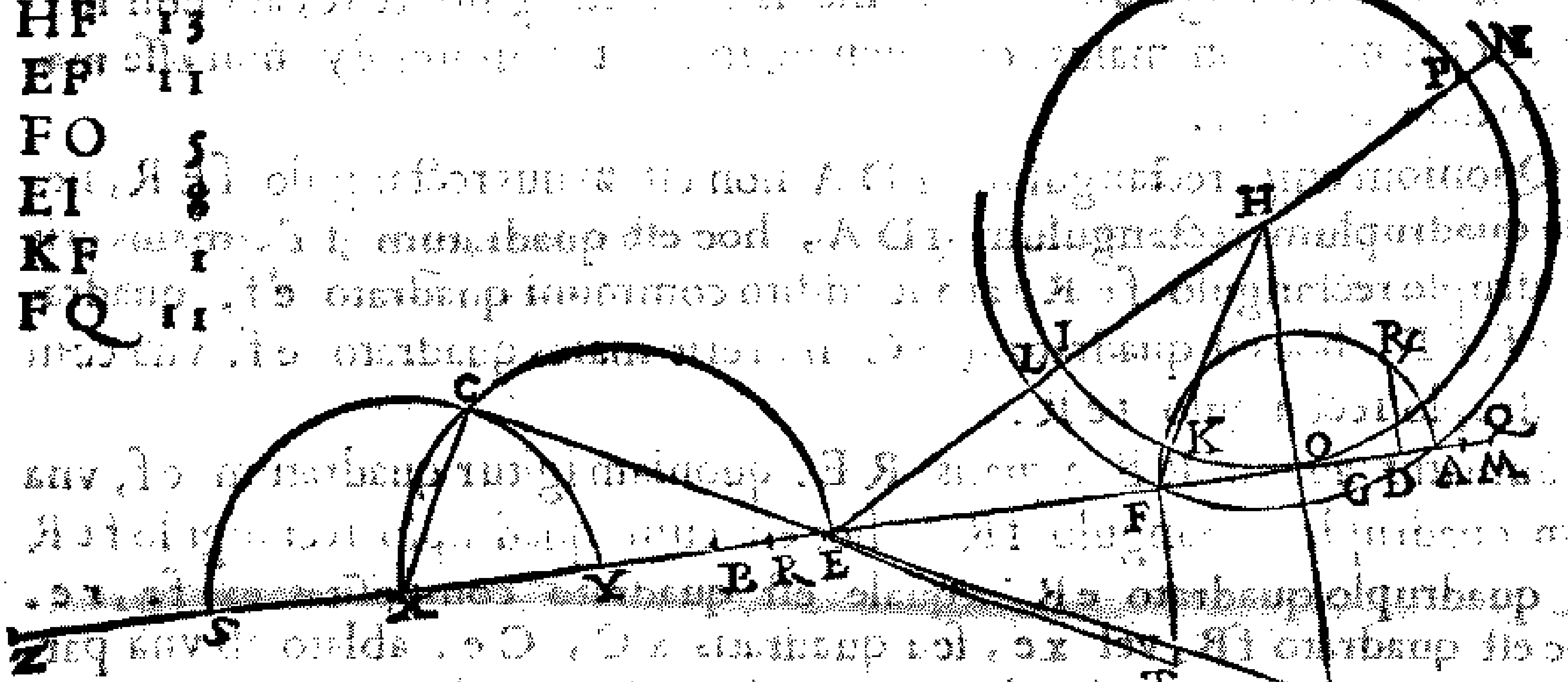
A constitutum est triangulum HEF, cuius crura HE, HF superant altitudinem HO excessibus æqualibus datis fD, DG. quod facere oportebat.

At vero rectam ET minorem esse diametro Ex. sic demonstrabimus.

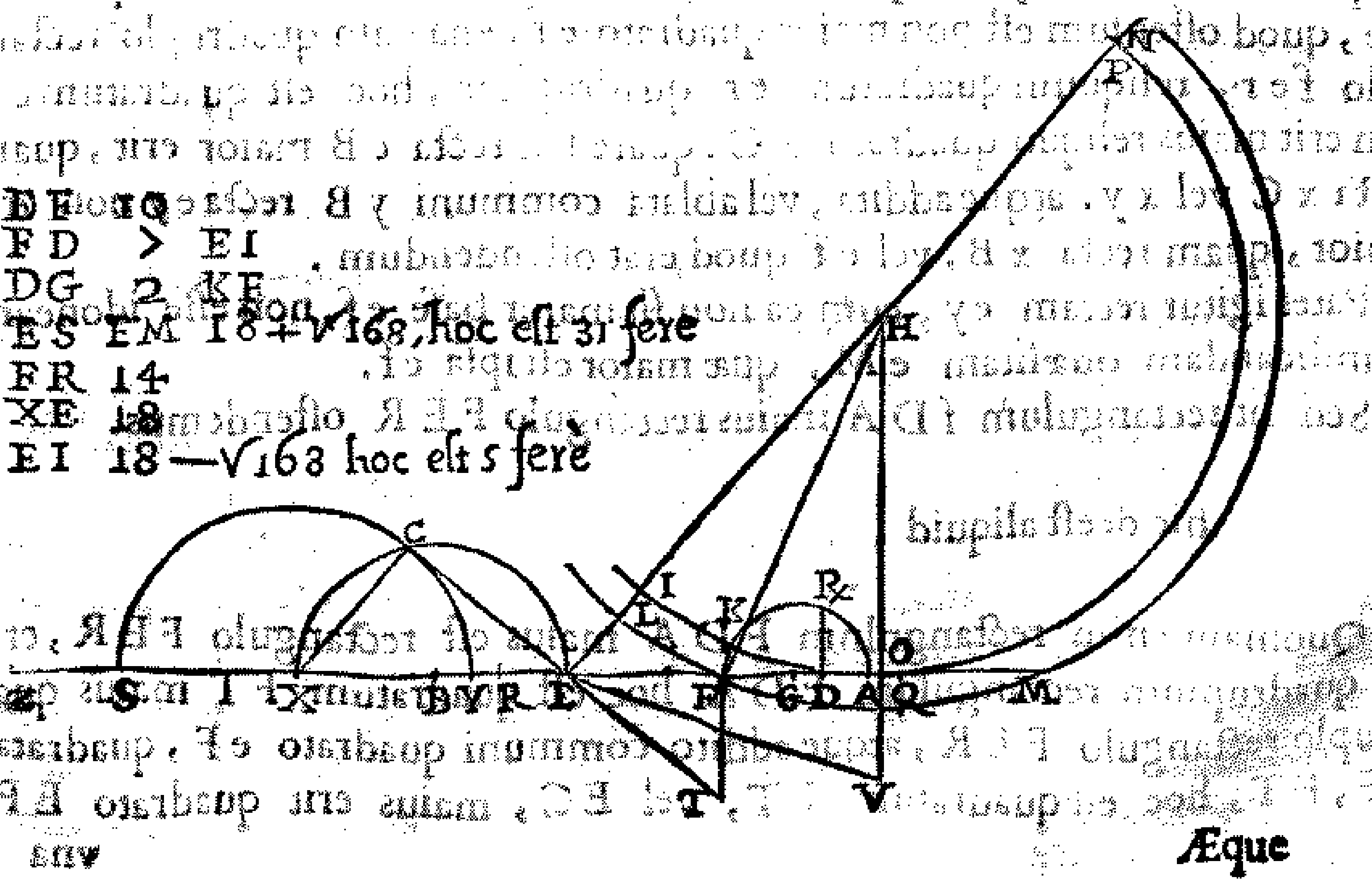
Quoniã enim est vt fG ad fD, ita fE ad fR, ex constructione, erit per diuisionem rationis vt fG ad GD, ita fe ad ER: sed fG minor est quam fE, ex determinatione ergo & GD minor erit, quam ER. atque adeo tota fD minor quam tota fR. quare & rectangulũ fDG, vel fDA, minus erit rectangulo fRE, & consequenter rectangulum FDA quater minus erit rectangulo FRE quater, atque addito communi quadrato EF, quadratum EF, vna cum rectangulo FDA quater, hoc est cum quadrato FT, seu quod idem est quadratum eT minus erit quadrato FE, vna cum rectangulo FRE quater,

B hoc est minus, erit quadrato compositæ ex fR, RE, hoc est quadrato xe; 8 secundi sunt enim æquales FR, Rx ex constructione; quare & recta ET minor erit, quam recta xE, quod erat ostendendum.

HE	20
HF	13
EF	11
FO	5
EI	8
KF	1
FQ	11



DE 10
FD > EI
DG 2 KF
ES EM 18 + √168, hoc est 31 fere
FR 14
XE 18
EI 18 — √168 hoc est 5 fere



Æque

Æque rectam fD minorem esse recta E O, hoc modo ostendemus. A

Quoniam enim rectangulum fD A quater, æquale est quadrato F T, vt demonstrauimus, quadratum autem fG minus est quadrato E f, cum recta fG minor sit, quam recta e f ex determinatione. ergo rectangulum f D A
8 secundi quater, vnà cum quadrato fG, hoc est quadratum fA minus erit quadratis f T, f e, hoc est quadrato e T. quare & recta f A minor erit quam recta e T, vel e C. & consequenter multo minor, quam E x. atque multo minor quá e S, vel e M. sed & f G minor est quam e f ex determinatione. ergo composita ex A f, f G minor erit, quam composita ex M e, e f sed composita ex
Coro.1.prob. 1.lib.1 A f, f G dupla * est ipsius f D; composita vero ex M e, e f dupla ipsius e O. ergo dupla f D minor erit, quam dupla e O. & simpla f D, minor quam simpla e O. quod erat ostendendum. B

Nunc ostendemus e y terminum minorem è duobus e y, e S, de quibus in Æquatione est explicabilis, non esse idoneum ad indicandam e M quæsitam.

Aut enim rectangulum f D A maius est rectangulo fe R, aut non maius. Sit primum non maius. ostendemus ipsum terminum e y non esse maiorem data base e f.

Quoniom enim rectangulum f D A non est maius rectangulo f E R, neque quadruplum rectangulum f D A, hoc est quadratum f T. maius erit quadruplo rectangulo f e R, atque addito communi quadrato e f, quadrata e f, f T, hoc est quadratum e C non erit maius quadrato e f, vna cum quadruplo rectangulo f e R. C

Sumatur autem R B æqualis R E. quoniam igitur quadratum e f, vna cum quadruplo rectangulo f R e, hoc est cum quadruplo rectangulo f e R
8 secundi & quadruplo quadrato e R * æquale est quadrato compositæ ex f r, r e. hoc est quadrato f B, vel x e, seu quadratis x C, C e. ablato ab vna parte quadrato e f, & quadruplo rectangulo f e R: ab altera vero quadrato C e, quod ostensum est non maius quadrato e f, vna cum quadruplo rectangulo f e r, reliquum quadratum e r quadruplum, hoc est quadratum e B non erit maius reliquo quadrato x C. quare nec recta e B maior erit, quam recta x C vel x y. atque addita, vel ablata communi y B recta e y non erit maior, quam recta x B, vel e f quod erat ostendendum.

Patet igitur rectam e y, cum ea non sit maior base e f, non esse idoneam ad indicandam quæsitam e M, quæ maior est ipsa e f. D

Sed sit rectangulum f D A maius rectangulo F E R ostendemus.

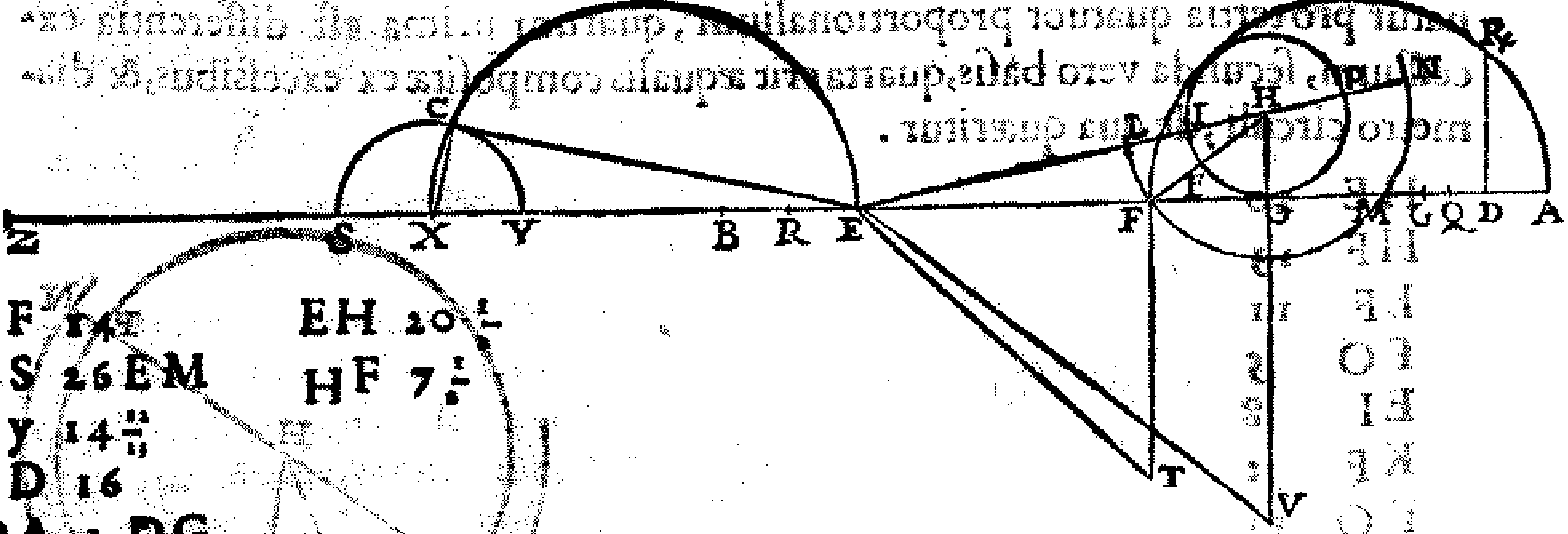
hic deest aliquid

Quoniam enim rectangulum F D A maius est rectangulo F E R, erit & quadruplum rectangulum F D A hoc est quadratum F T maius quadruplo rectangulo F E R, atque addito communi quadrato e F, quadrata F F, F T, hoc est quadratum E T, vel E C, maius erit quadrato E F,

vna

A vna cum quadruplo rectangulo F E R.

Et quoniam quadratum E F vna cum quadruplo rectangulo F E R, hoc eſt cum quadruplo rectangulo F E R, & quadruplo quadrato E R, æquale eſt quadrato compoſitæ ex f R, R E, hoc eſt quadrato X E, ſeu quadratis 8 ſecundi



EF 14

ES 26 EM

Ey $14\frac{12}{13}$

FD 16

DA 3 DG

EH $20\frac{1}{2}$

HF $7\frac{1}{8}$

X C, C E, ablato ab vna parte quadrato E f, & quadruplo rectangulo f E R, ab altera vero quadrato C E, quod oſtenſum eſt maius quadrato E f, vna cum quadruplo rectangulo f E R, reliquum quadratum E R quadruplum hoc eſt quadratum E B, maius erit reliquo quadrato X C. quare & recta E B
B maior erit, quam recta X C, vel X y. atque ablata vel addita communi y B recta E y maior erit, quam X B vel E f.

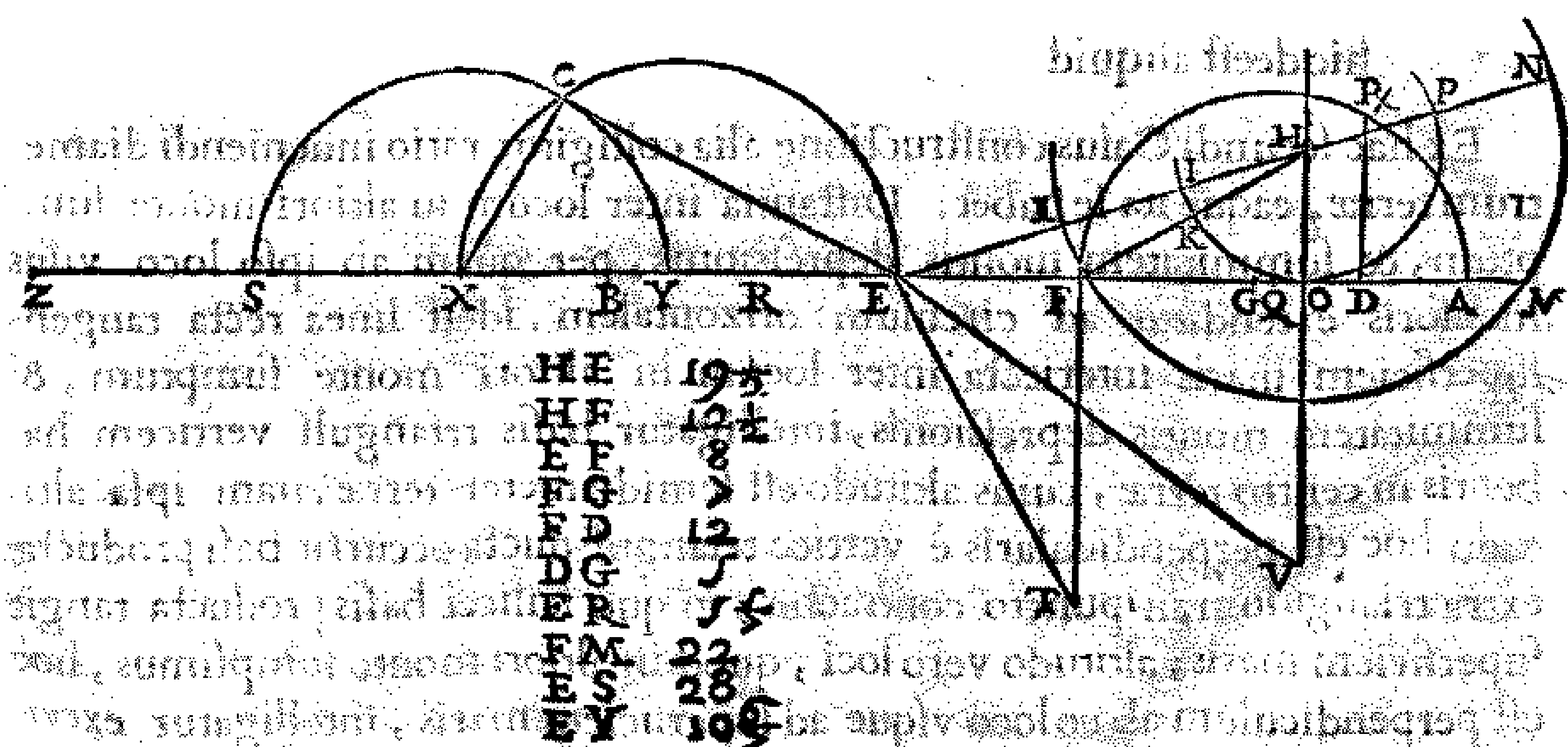
hic deeſt aliquid

Ex hac ſecundi Caſus conſtructione alia colligitur ratio inueniendi diametrum terræ, eaque ita ſe habet. Diſtantia inter locum in altiori monte ſumptum, & ſummitatem montis depreſsionis, per quam ab ipſo loco viſus menſoris extenditur ad circulum orizontalem. ideſt linea recta tangens ſuperficiem maris interiecta inter locum in altiori monte ſumptum, & ſummitatem montis depreſsionis, intelligatur baſis trianguli verticem ha-
C bentis in centro terræ, cuius altitudo eſt ſemidiameter terræ. nam ipſa altitudo hoc eſt perpendicularis è vertice trianguli ducta occurrit baſi productæ extra triangulum in puncto contractus, in quo ſcilicet baſis producta tangit ſuperficiem maris; altitudo vero loci, quod in altiori monte ſumpſimus, hoc eſt perpendiculum ab eo loco vſque ad ſuperficiem maris, intelligatur exceſſus, quo crus maius trianguli ſuperat eius altitudinem, altitudo autem montis depreſsionis nempe perpendiculum ab eius apice, vſque ad ſuperficiem maris intelligatur exceſſus, quo crus minus trianguli ſuperat eius altitudinem, & ſic ex data baſe, & huiuſmodi exceſsibus dabitur triangulum; quare & eius altitudo, hoc eſt ſemidiameter terræ.

Ratio igitur inueniendi diametrum [illegible] hæc erit. A

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam: differentia autem qua dupla ea recta superat basim aucta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus; ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit æqualis compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur.

B



C

Est enim ex cõstructione vt F G ad F D, hoc est vt E L ad E I, ita F e ad f R, B
cuius dupla est f X: differencia autem qua ipsa x F superat basim E F est X E: huius quadratum excedit quadratum C E quadrato X C: quadratum autẽ C E, vel E T æquale est quadrato E F, E T; hoc est quadrato e F, & quadruplo rectan-

gulo

A gulo F D G, vel E I L. itaque quadratum X C est excessus, quo quadratum X E superat quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L, recta autem E S compositæ ex E X, & X S æquali X C, facta est æqualis E M compositæ ex E F, & dupla F O, hoc est ex base, & dupla continuatione basis, vsque ad perpendicularem; quam quidem E M ponendam esse diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est E L differentia excessuum E I, F k. secunda vero basis E F, quartam autem futuram esse diximus æqualem compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum est. nam vt E L ad E F, ita est E M ad E N compositam ex excessibus E I, P N, & diametro I P.

In numeris sit data basis trianguli E F 4; excessus vero E I 3; excessus autem F K 1. Fiat vt 2 differentia videlicet excessuum ad 3 excessum maiorem, ita 4 nempe basis, ad aliam rectam. ea erit 6, eius dupla 12, differentia autem inter 12, & 4 est 8. huic addatur 6. nempe recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 8 superat quadratum ex 4, & quadruplum eius, quod fit ex 3, & 1. hoc est ex excessibus, fiet 14. pro recta E M composita ex base E F, & dupla F O continuatione basis, vsque ad perpendicularem O H. hæc composita ponenda est pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 2 nempe differentia excessuum 3, & 1, secunda vero 4, idest basis, quarta erit 28 composita ex excessibus, & diametro quæsita, à qua composita si auferantur excessus. nempe 3, & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

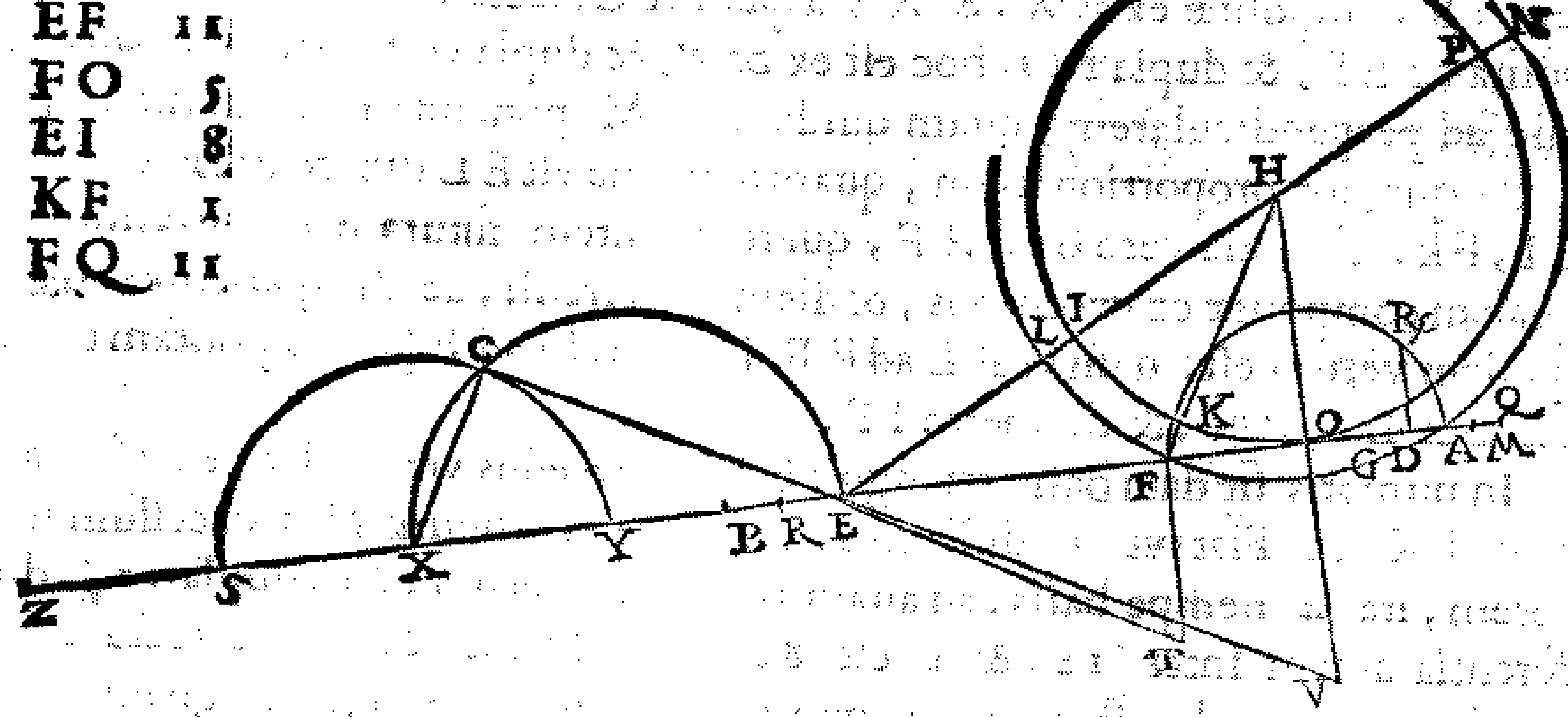
C Aliter eandem diametrum terræ inueniemus in hunc modum.

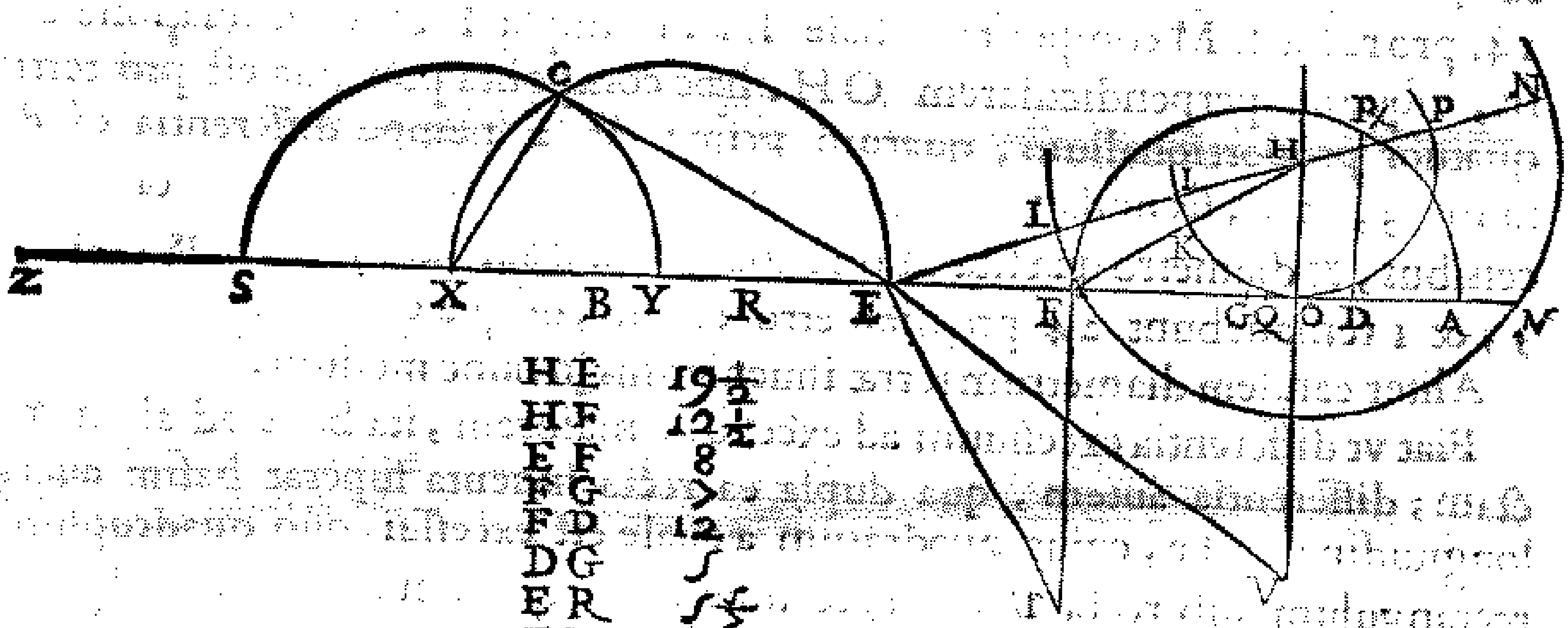
Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam; differentia autem, qua dupla ea recta inuenta superat basim aucta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub recta inuenta, & differentia ipsius inuentæ, & basis, superat quadruplum rectangulum sub excessibus, ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit composita ex excessibus, & diametro quæsita.

Neque hæc ratio conueniendi diametrum terræ dissimilis est ab ea, quæ supra exposita est ratione. Nam recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum f R E sub recta inuenta f R, & R E differentia ipsius f R, & basis E f, superat quadruplum rectangulum E I L sub excessibus, eadem est, quæ recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum X e superat quadratum basis e F, & quadruplum rectangulum e I L. Quadruplum enim rectangulum f R e superat quadruplum rectangulum e I L eodem excessu. nempe quadrato X C, quo etiam quadratum X e superat quadratum e f, & quadruplum rectangulum e I L, idque sic demonstrabitur.

Quoniam enim quadratum X e superat quadratum C e, vel e T, seu quadrata e f, f T quadrato X C, quadratum autem f T, æquale est quadruplo rectangulo f D G; vel e I L. ergo ipsum quadratum X e superabit

HE	20
HF	15
EF	11
FO	5
EI	8
KF	1
FQ	11





HE	$19\frac{1}{2}$
HF	$12\frac{1}{2}$
EF	8
FG	7
FD	12
DG	5
ER	$5\frac{4}{5}$
FM	22
ES	28
EY	$10\frac{4}{5}$

bit quadratum e f, & quadruplum rectangulum e I L quadrato x C. A

Et quoniam quadruplum rectangulum F R E vna cum quadrato E F, æquale est quadrato compositæ ex F R, R E, hoc est quadrato x E, quod quidem quadratum, superat quadratum E F, & quadruplum rectangulũ E I L, quadrato x C vt demonstraui. ergo & quadruplum rectangulũ F R E, vna cũ quadrato E F superabit quadratum E F, & quadruplũ rectangulum E I L eodem quadrato x C. auferatur commune quadratum E F. ergo quadruplũ rectangulum F R E itidem superabit quadruplum rectangulum E I L quadrato x C. sed & quadratum x E superat quadratum E F, & quadruplũ rectangulum E I L quadrato x C, vt demonstrauimus; ergo quadruplum rectangulum F R E superat quadruplum rectangulum E I L eodem excessu, quo quadratum x E superat quadratum E F, & quadruplum rectangulum e I L. quod erat ostendendum. B

Sit

A Sit vt prius data trianguli basis 4, excessus vero maior 3, excessus autem minor 1 fiat vt 2 differentia excessuum ad 3 excessum maiorem, ita 4 nempe basis ad aliam rectam, ea erit 6. eius dupla 12 differentia autem inter 12, & 4 est 8. huic addatur 6 nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub 6, & 2 hoc est sub recta inuenta, & differentia eiusdem inuentæ, & basis superat quadruplum rectangulum sub 3 & 1 hoc est sub excessibus. & fiet 14 pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 2, secunda vero 4, quarta erit 28 composita ex excessibus, & diametro quæsita, ablatis igitur excessibus 3 & 1, remanebit ipsa diameter 24.

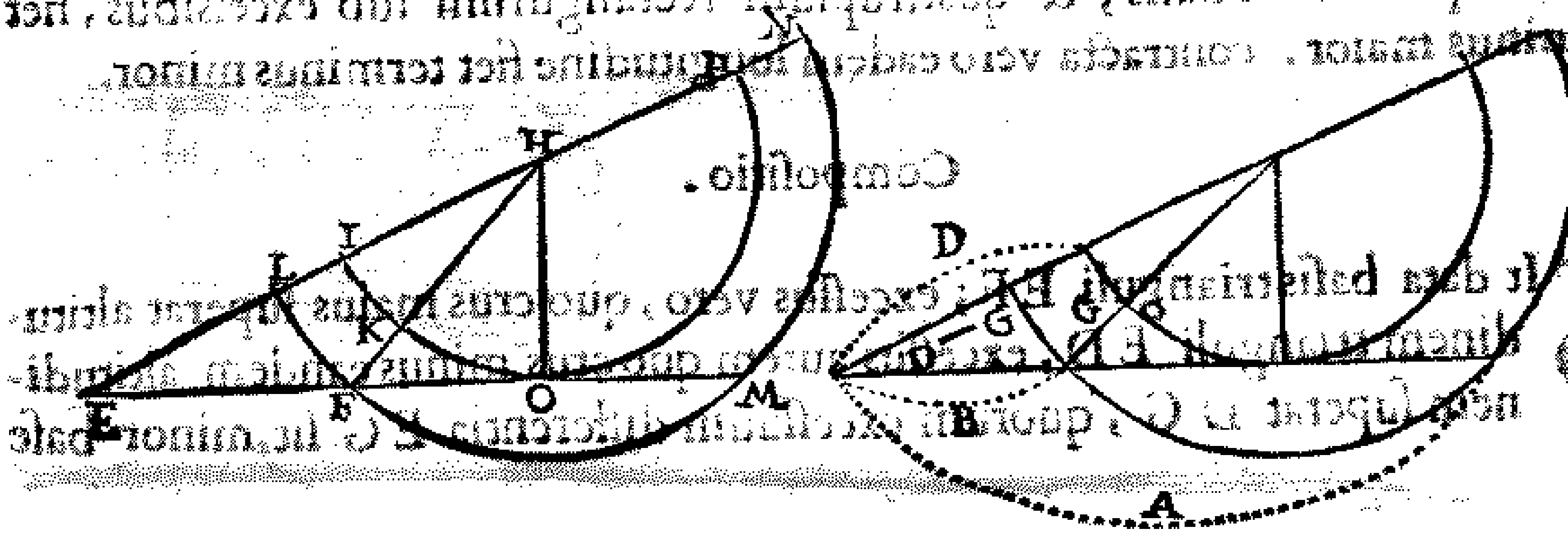
Alia via eundem Casum Problematis & resoluam, & componam.

B

Alia Resolutio secundi Casus.

Sit data basis trianguli, vt in antecedenti Resolutione B. excessus vero, quo crus maius superat altitudinem trianguli D, excessus autem, quo crus minus eandem altitudinem superat G. Oportet inuenire trianguli

C



Factum iam sit, & resumantur antecedentis Resolutionis figuræ, & quæratur vt prius E M composita ex base E F, & dupla F O continuatione basis. esto illa A, ergo A -- B erit ipsa F M, & per consequens ipsa F O erit A $\frac{1}{2}$ -- B $\frac{1}{2}$

D Et quoniam rectangulum L E N æquale est rectangulo F E M; erit vt L e ad E f, ita E M ad E N. hoc est in figura ad resolutionis, vt D — G ad B, ita A ad $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}G}$. itaque $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ -- D.

Producatur autem F H vsque ad circumferentiam I O P in Z: erit F Z æqualis I N, atque adeo ipsa F Z erit $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ -- D.

Et quoniam rectangulum K F L * æquale est quadrato F O, hoc est rectangulum sub G, & $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ -- D æquale quadrato ex A $\frac{1}{2}$ -- B $\frac{1}{2}$.

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G in D æquabitur A Q $\frac{1}{4}$ + B Q $\frac{1}{4}$ -- B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Potestas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d\text{-}g}$ — G in D 4 æquabitur A Q + B Q — B in A 2.

 Ad-

Addatur vtrique parti G in D 4. & B in A 2, auferatur autem A Q: vt cognita ab incognitis separentur, ergo A

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } A\,4}{d-g}$ † B in A 2 — A Q æquabitur B Q † G in D 4.

Et vt æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{g \text{ in } b}{d-g}$ in integrã magnitudinẽ, ea esto F nam si fiat vt D — G ad G, ita B ad aliã, quæ sit F: erit F eadem quæ $\frac{b \text{ in } g}{d - g}$; atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\,4}{d-g}$, transmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 † B in A 2 — A Q, æquabitur B Q † G in D 4.

Seu quod idem est F 4 † B 2 in A — A Q æquabitur B Q † G in D 4.

Et explicata Æquatione.

F 2 † B † L. V. (F 2 † B Q - B Q - G in D 4) æquabitur A.

Vel F 2 † B - L. V. (F 2 † B Q - B Q - G in D 4) æquabitur A. B

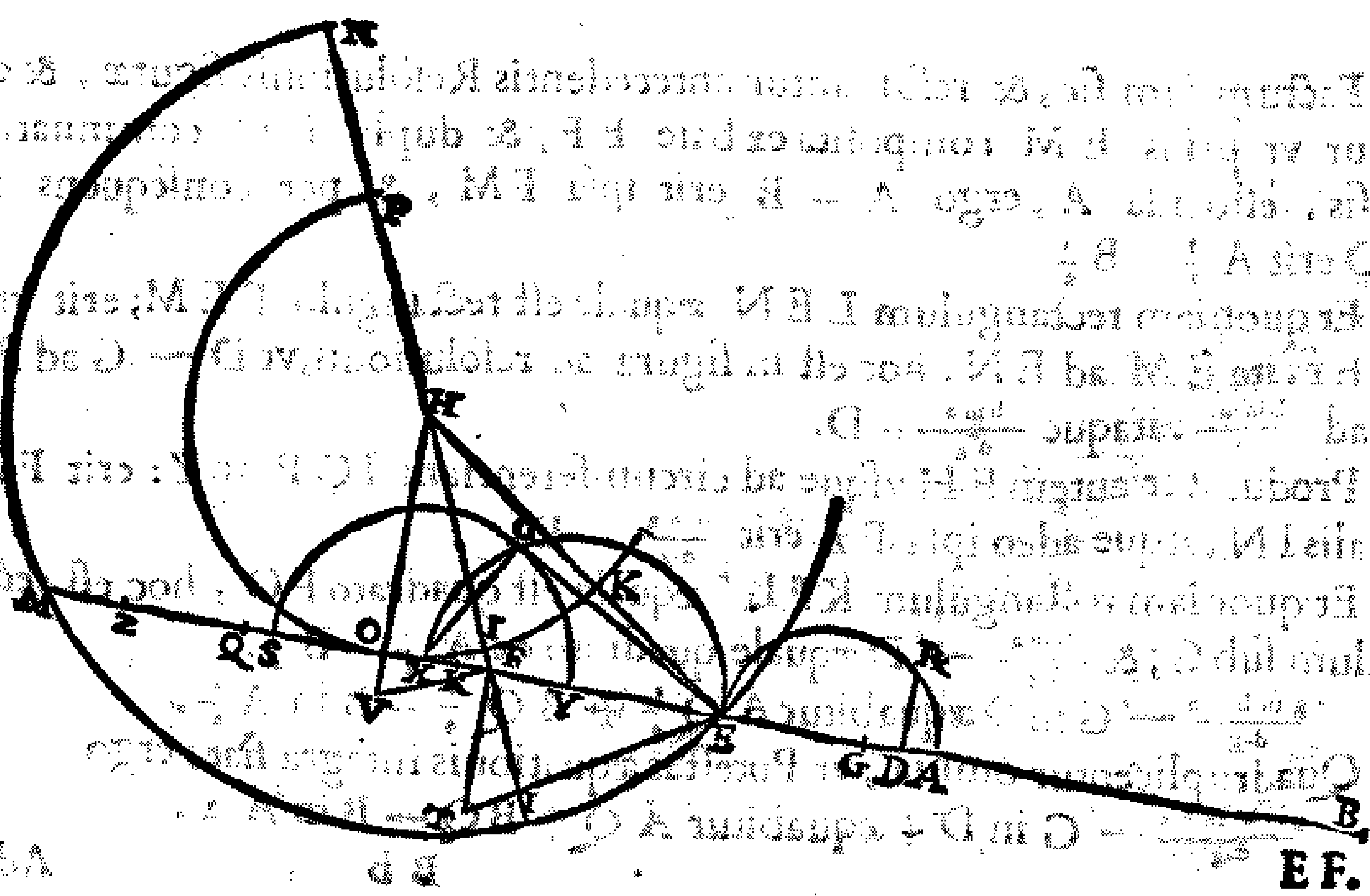
In hac Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, sed maior.

Porisma.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam; composita autem ex dupla ea recta, & base, aucta longitudine rectæ cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem compositæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus, fiet terminus maior. contracta vero eadem longitudine fiet terminus minor.

Compositio.

Sit data basis trianguli E F; excessus vero, quo crus maius superat altitudinem trianguli E D, excessus autem quo crus minus eandem altitudinem superat D G, quorum excessuum differentia E G sit minor base C

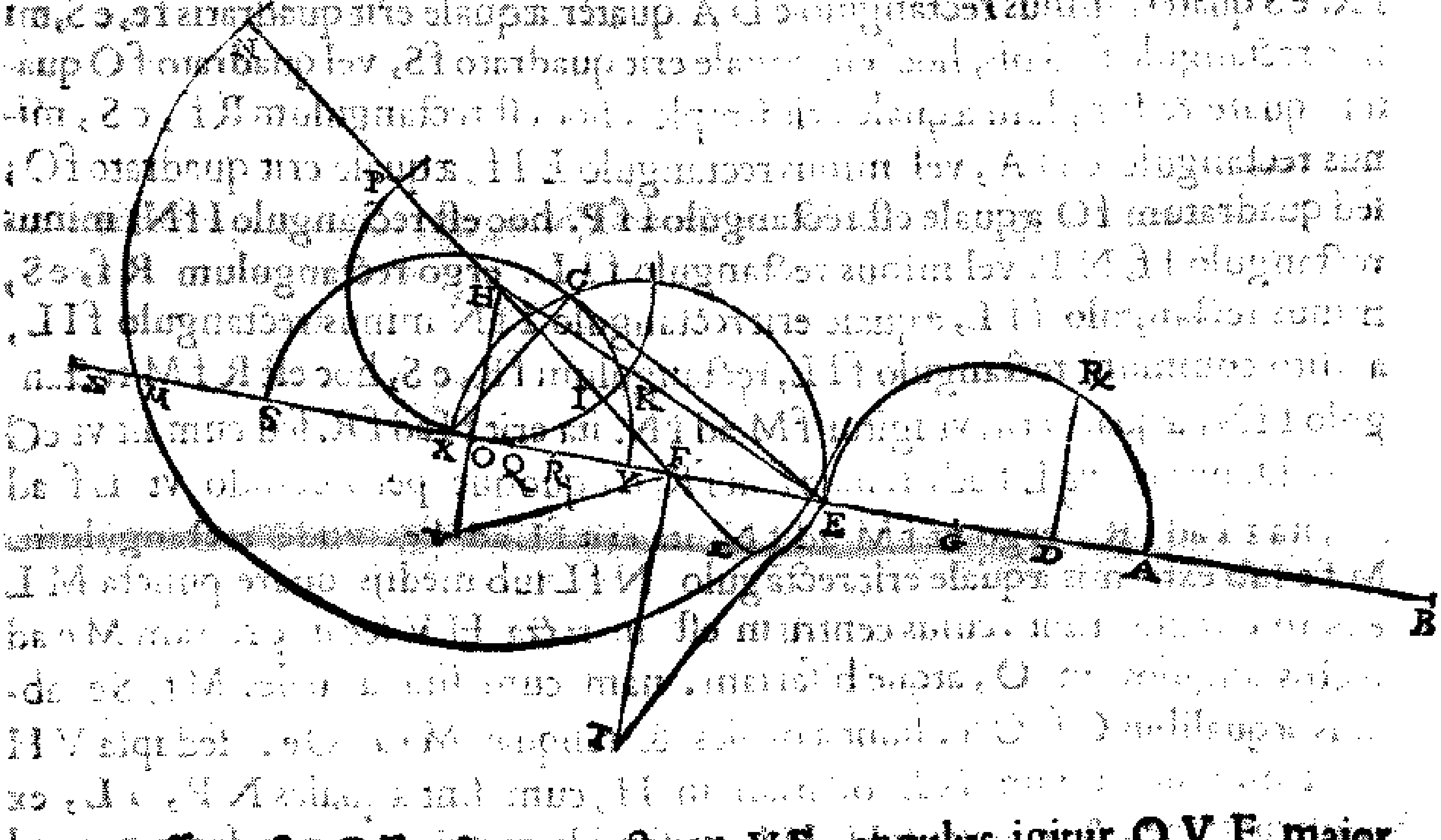


E F.

A EF. Oportet inuenire triangulum. Producatur E D in A, vt sit D A æqualis D G, & in ipsa E A describatur semicirculus, quem ducta ex D perpendicularis D ℞ secet in ℞. ex puncto autem F demittatur perpendicularis F T dupla ipsius D ℞, & connectatur E T, quadratum igitur F T quadruplum erit quadrati D ℞, vel rectanguli E D A. Deinde fiat vt E G ad G D, ita E F ad aliam, quæ sit F R, eaque duplicetur in X, & in E X describatur semicirculus, in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonstrabimus minorem esse diametro E X, & connectatur X C. & centro X interuallo X C describatur circulus secans diametrum E X in y, productam vero in S. Termini igitur, de quibus A in Æquatione explicabilis est sunt E S maior, E y minor.

B Secetur S F bifariam in O, per quod punctum ducatur ad rectos angulos recta H O V, & fiat O V æqualis D G, quam demonstrabimus mi-

C



norem esse recta O F, & connectatur V F, angulus igitur O V F maior erit angulo O F V, fiat angulo O V F æqualis angulus V F H occurrens recta F H rectæ O H in H, & connectatur E H. Triangulum igitur con-

D structum est H E F, cuius basis est data E F; crus vero H F excedit altitudinem trianguli H O excessu O V æquali ipsi D G datæ; sunt enim æquales H F, H V propter æqualitatem triangulorum H F V, H V f. superest igitur, vt crus H E excedat altitudinem H O excessu æquali datæ E D. id autem ita fit manifestum.

Centro H interuallo H O describatur circulus O I, k P, secans crura H F, H E in punctis I K, & producatur F k secans circumferentiam in P, vt sit P N æqualis E D, cui æqualis sumatur quoque I L; ergo cum sit I L æqualis E D, & I f æqualis D G, erit & reliqua f L æqualis reliquæ

E G.

E G. Producatur quoque E S in Z, vt sit X Z æqualis X E, & sumatur F Q A
æqualis F E, atque F M æqualis S E. Quoniam igitur X E superat F E excessu X F, dupla X E, hoc est Z E superabit duplam F E, quæ est Q E duplo excessu X F; sed Z E superat Q E excessu Z Q, ergo Z Q dupla erit ipsius x F, & consequenter quadrupla rectæ R F.

Et quoniam rectus est angulus X C E in semicirculo, recta C E tangit circulum Y C S. quare rectangulum Y E S, æquale erit quadrato C E, vel E T, seu quadratis E E, E T; sed rectangulum Y E S, vel Z S E æquale est rectangulo Z E S, minus quadrato e S; rectangulum autem Z e S, æquale est rectangulis Z Q, e S, & Q e S, hoc est rectangulo R F, e S quater, & rectangulo f e S bis: Z Q enim ostensa est quadrupla ipsius R f, Q e autem dupla est ipsius
f e, ex constructione, ergo rectangulum f R, e S quater, plus rectangulo f e S B
bis, minus quadrato e S, æquale erit quadrato f e, plus quadrato f T, hoc est plus rectangulo e D A quater; addatur vtrobique quadratum e S, auferatur autem rectangulum f e S bis, & rectangulum e D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo e D A quater, æquale erit quadratis f e, e S, minus rectangulo f e S bis, hoc* est æquale erit quadrato f S, vel quadrato f O quater. quare & simplum æquale erit simplo, hoc est rectangulum R f, e S, minus rectangulo e D A, vel minus rectangulo L I f, æquale erit quadrato f O; sed quadratum f O æquale est rectangulo I f P. hoc est rectangulo I f N, minus rectangulo I f, N P, vel minus rectangulo f I L. ergo rectangulum R f, e S, minus rectangulo f I L, æquale erit rectangulo I f N minus rectangulo f I L,
addito communi rectangulo f I L, rectangulum f R, e S, hoc est R f M rectan- C
gulo I f N, æquale erit. vt igitur f M ad f N. ita erit f I ad f R. sed cum sit vt e G ad G D, hoc est vt L f ad f I, ita e f ad f R, est quoque permutando vt L f ad f e, ita f I ad f R. ergo vt f M ad f N, ita erit f L ad f e. vnde rectangulum M f e sub extremis æquale erit rectãgulo N f L sub medijs. quare puncta M L e N in circulo erunt, cuius centrum est in recta H V secante rectam M e ad rectos angulos in O, atque bifariam. nam cum sint æquales M f, S e ablatis æqualibus O f, O S, fiunt æquales & reliquæ M O, O e. sed ipsa V H secat quoque rectam N L bifariam in H, cum sint æquales N P, I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate huic Problemati præmisso punctum H erit
centrum circuli M L, e N, idemque quod centrum circuli O I, K P; atque D
adeo æquales erunt H e, H L; sunt autem æquales & H k, H I. ergo & reliqua K e reliquæ I L, hoc est e D æqualis erit, quod erat ostendendum. Ad datam igitur basim e f constitutum est triangulum H e f, cuius crura H e H f superant altitudinem H O excessibus K e, I f æqualibus datis e D, D G. quod erat faciendum.

At vero rectam e T minorem esse diametro e X, ita ostendemus.

Quoniam enim est, vt e G ad G D, ita e f ad f R, ex constructione, & e G minor, quàm e f ex determinatione erit & G D minor, quàm f R. atq; tota e D minor quam tota e R. vnde & rectangulum e D G, vel e D A minus erit

re-

A rectangulo E R f, & consequenter quadruplum rectangulum E D A, hoc est quadratum f T, minus erit quadruplo rectangulo E R f. atque addito vtrique parti quadrato f E, quadrata f T, f E, hoc * est quadratum E T, minus erit quadruplo rectangulo E R f, vnà cum quadrato E f, hoc * est, minus erit quadrato compositæ ex e R, R f, idest quadrato E X. quare & recta E T minor erit, quàm recta E X, quod erat ostendendum. 47 primi 8 secundi

Item rectam D G minorem esse, quam O f. sic demonstrabitur.

Quoniam enim rectangulum E D A quater, æquale est quadrato f T; quadratum autem E G, minus est quadrato e f, cum recta e G minor sit, quam recta e f, ex determinatione. ergo rectangulum e D A quater, vnà cum quadrato e G, hoc * est quadratum e A minus erit quadratis f T, f e. hoc est quadrato e T. quare & recta e A minor erit, quàm recta e T, vel e C, & consequenter multo minor, quàm e X. atque multo minor quam e S. sed & e G minor erit quam e f ex determinatione, ergo composita ex e A, e G, * hoc est dupla e D, minor erit, quàm composita ex e S, e f, hoc est, quàm dupla e O, quare & simpla e D minor erit, quam simpla e O. ibid. B Corol. 1. probl. 1. lib. 1.

Fiat vt e G ad e f, ita e S ad aliam, quæ sit e B, sed e G minor est, quàm e f ex determinatione. ergo & e S minor erit quam e B, sed e D ostensa est minor, quàm e O, ergo reliqua D B maior erit, quàm reliqua O S, vel O f.

Et quoniam est vt e G ad G D, ita e f ad f R, ex constructione, erit permutando vt e G ad e f, ita G D ad f R, sed vt e G ad e f, ita est quoque e S ad e B. ergo vt G D ad f R, ita erit e S ad e B, vnde rectangulum sub extremis G D, e B æquale erit rectangulo sub medijs f R, e S, sed rectangulum f R, e S, minus rectangulo e D A, vel e D G ostensum est in demonstratione Problematis æquale quadrato f O. ergo & rectangulum G D, e B, minus rectangulo e D G, hoc est rectangulum G D B, æquale erit quadrato f O. sed D B ostensa est maior, quam f O, ergo G D minor erit, quam ipsa f O, quod erat ostendendum. C

Finis Libri Quarti.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

LIBER QVINTVS.

HIC liber in quatuor capita diuiditur, quorum primo continentur Problemata, quæ constructione operaria non egent, sed solum postulant, vt quæsitum numero explicetur. Secundo vero continentur Problemata impossibilia, ex quorum Resolutionibus cognoscitur eorum impossibilitas. Tertio autem continentur Problemata vana, seu nugatoria, quorum Resolutiones indicant talia esse Problemata. Quarto denique continentur Problemata, quæ sub Algebram non cadunt, eaque resoluuntur, & componuntur Methodo, qua antiqui vtebantur. A

De Problematibus quæ constructione operaria non egent, sed solum postulant vt quæsitum numero explicetur. B
Caput primum.

PRoblemata quæ constructione operaria non egent, sed postulant quæsitum numero exhiberi, resoluuntur eadem ratione, qua Problemata constructionem operariam requirentia; verum Porismata ex eorum Resolutionibus deducta in formam Theorematis proponuntur, eorumque demonstratio procedit per vestigia Resolutionis, directo tamen ordine, vt in fine libri primi monuimus, quæ quidem Theoremata suggerunt rationem construendi ipsa Problemata, hoc est explicandi numero id quod quæritur.

Pro-

A **Problema primum.**

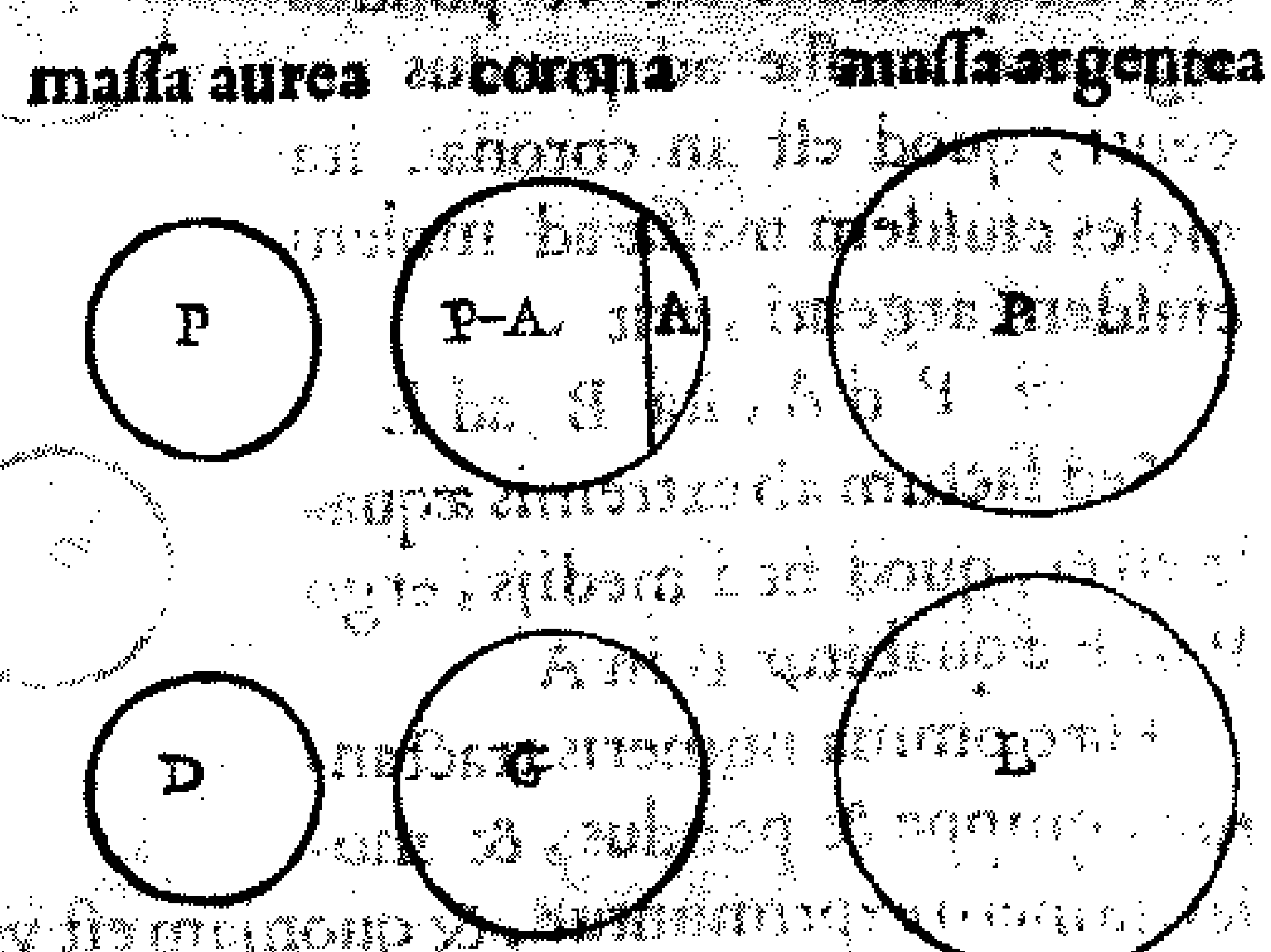
Quomodo Archimedes portionem argenti aureæ coronæ permixtam inuenerit.

REfert Vitruuius lib. 9. cap. 3 his verbis. Archimedem duas fecisse massas æquo pondere, quo etiam fuerat corona, vna ex auro alteram ex argento. cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra impleuit aqua, in quo demisit argenteam massam, cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantum aquæ effluxit. ita exempta massa quanto minus factum fuerat refudit sextario mensus, vt eodem modo quo prius fuerat ad labra æquaretur. ita ex eo inuenit quantum ad certum pondus argenti certa aquæ men-
B sura responderet. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter pleno vase demisit, & ea exempta, eadem ratione mensura addita inuenit ex aqua non tantum defluxisse, sed tanto minus, quanto minus magno corpore eodem pondere auri massa esset quam argenti. Postea vero repleto vase in eadem aqua ipsa corona demissa, inuenit plus aquæ defluxisse in coronam, quam in auream eodem pondere massam & ita ex eo quod plus defluxerat aquæ in corona quam in massa ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifestum furtum redemptionis.

Sed qua ratiocinatione Archimedes id furtum deprehenderit Resolutio docebit.

Resolutio.

C COronæ, quæ constat ex auro, & argento sit pondus P, pondus autem argenti quod est in ea esto A. ergo P - A erit pondus auri.



Deinde sumantur duæ massæ eiusdem ponderis cum corona, vna ex auro altera ex argento, & demittatur in aliquod vas aqua plenum aurea massa. ea eijciet è vase tantum aquæ, quanta est eius
D moles, sit igitur mensura aquæ electæ, seu moles aureæ massæ D, similiter demittatur, & massa argentea eijciens tantum aquæ, quanta est moles ipsius massæ, cuius quidem aquæ mensura seu moles massæ argenteæ sit B, atque eodem modo, demissa corona, effluet tantum aquæ quanta est moles ipsius coronæ, sit igitur mensura ipsius aquæ seu moles coronæ G. Quoniam igitur est vt P ad A, ita B ad $\frac{B \text{ in } A}{P}$, hoc est vt Pondus massæ argenteæ, ad pondus argenti, quod est in corona, ita moles eiusdem mas-

sæ ad molem eiusdem argenti, corpora enim eiusdem generis eamdem rationem habent in pondere quam in mole, vt demonstrauimus in nostro Archimede promoto, ergo $\frac{b \text{ in } a}{p}$ erit moles argenti, quod est in corona, seu mensura aquæ mole æqualis ipsi argento. A

Æque quoniam est vt P ad P — A, ita D ad $\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } a}{e}$ hoc est vt pondus massæ aureæ ad pondus auri, quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem auri, erit $\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } a}{p}$ moles auri, quod est in corona, seu mensura aquæ, mole æqualis ipsi auro, sed moles argenti est $\frac{b \text{ in } a}{p}$. ergo $\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } a}{p} + \frac{b \text{ in } a}{p}$ erit moles totius coronæ, sed moles coronæ est quoque G, ergo.

$\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } A}{p} + \frac{b \text{ in } a}{p}$ æquabitur G

Ducantur omnia in P. ergo

D in P — D in A + B in A æquabitur G in P B

Auferatur vtrimque D in P, vt cognita ab incognitis distinguantur ergo.

B in A -- D in A, æquabitur G in P -- D in P

Seu quod idem est B -- D in A æquabitur G -- D in P

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

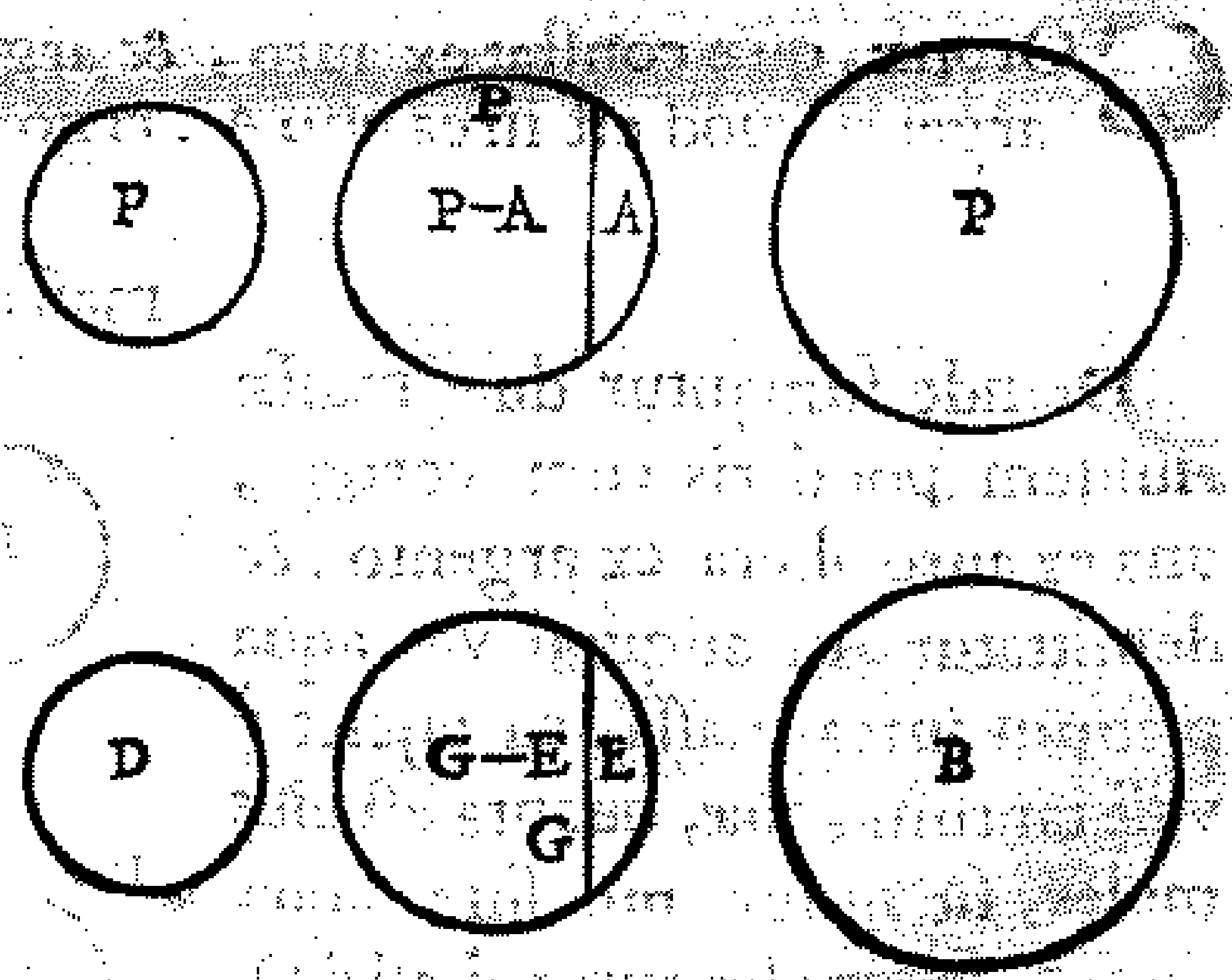
B -- D G -- D P A

Idem Problema aliter resoluam

Resolutio secunda.

Isdem positis, mensura autem aquæ, mole æqualis argento quod est in corona esto E. ergo G -- E erit mensura aquæ mole æqualis auro; ponitur enim G mensura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam est vt pondus argenteæ massæ ad pondus argenti, quod est in corona. ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem argenti, erit

massa aurea corona massa argentea C



vt P ad A, ita B ad E

Sed factum ab extremis æquale est ei, quod fit à medijs, ergo P in E æquabitur B in A D

Hæc omnia numeris tractantur, quippe & pondus, & moles numero exprimuntur. & quoniam est vt pondus aureæ massæ ad pondus auri, quod est in corona ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem auri erit.

vt P ad P -- A, ita D ad G -- E

Quod autem fit ab extremis, æquale est ei quod fit à medijs ergo

G in P -- E in P æquabitur D in P -- D in A.

Sed ostensum est P in E æquari B in A. ergo per additionem æqualium, æqualibus.

A G in P — D in P æquabitur D in P — D in A

Sed ostensum est P in E æquari B in A, ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in P æquabitur B in A + D in P -- D in A

Auferatur vtrimque D in P, vt cognita ab incognitis separentur, ergo

G in P - D in P æquabitur B in A - D in A

Seu quod idem est G - D in P æquabitur B - D in A.

Et reuocata ad proportionem æqualitate, proportionales erunt

B - D   G - D   P   A

Ea ipsa proportionalium series, quæ per antecedentem resolutionem inueniebatur.

B

Porisma.

Vt differentia inter mensuram aquæ defluxæ in massa argentea, & mensuram aquæ defluxæ in massa aurea, ad differentiam mensuræ aquæ defluxæ in corona & aquæ defluxæ in massa aurea, ita est pondus coronę ad pondus argenti, quod est in corona.

Vel sic. vt differentia inter moles massæ argenteæ, & massæ aureæ, ad differentiam inter moles coronæ, & massæ aureæ, ita est pondus coronæ, ad pondus argenti, quod est in corona.

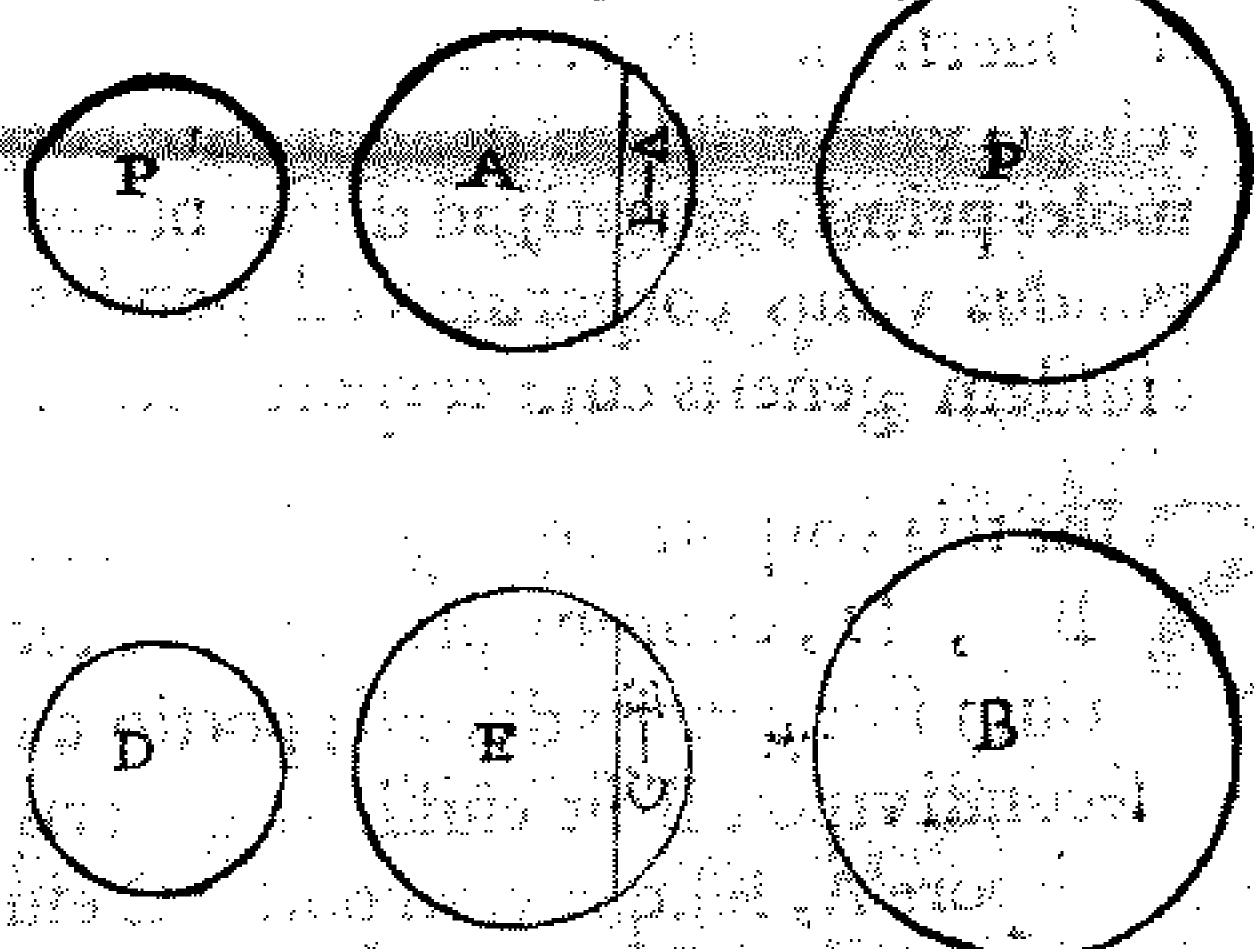
Porisma hoc postea in formam Theorematis vniuersalius propositum demonstrabimus.

C

Resolutio tertia.

Sed quæratur pondus auri, quod est in corona; id esto A. ergo pondus argenti erit P -- A. similiter mensura aquę mole æqualis auro, quod est in corona esto E. ergo G — E, erit mensura aquę mole ęqualis argento. Et quoniam est vt pondus aureę massę ad pondus auri, quod

D est in corona, ita moles eiusdem massę ad molem eiusdem auri, erit.



vt P ad A ita D ad E

Et factum sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs, hoc est

P in E ęquabitur D in A

Æquę quoniam est vt pondus massę argenteę ad pondus argenti, quod est in corona, ita moles eiusdem massę ad molem eiusdem argenti, erit

vt P ad P -- A, ita B ad G -- E

Et factum sub extremis ęquabitur facto sub medijs, hoc est

Et factum sub extremis æquabitur facto sub medijs, hoc est A

G in P -- E in P æquabitur B in P -- in A

Sed ostensum est E in P æquari D in A, ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in P æquabitur B in P ✠ D in A -- B in A.

Hic non potest auferri vtrimque B in P. nam cum B maior sit, quam G erit & B in P maius, quam G in P, ergo addatur vtrobique B in A & auferatur D in A. itaque

G in P † B in A -- D in A æquabitur B in P.

Auferatur quoque vtrinque G in P. ergo

B in A -- D in A æquabitur B in P -- G in P

Seu quod idem est B -- D in A æquabitur B -- G in P B

Et reuocata ad proportionem æqualitate erit

vt B -- D ad B -- G, ita P ad A

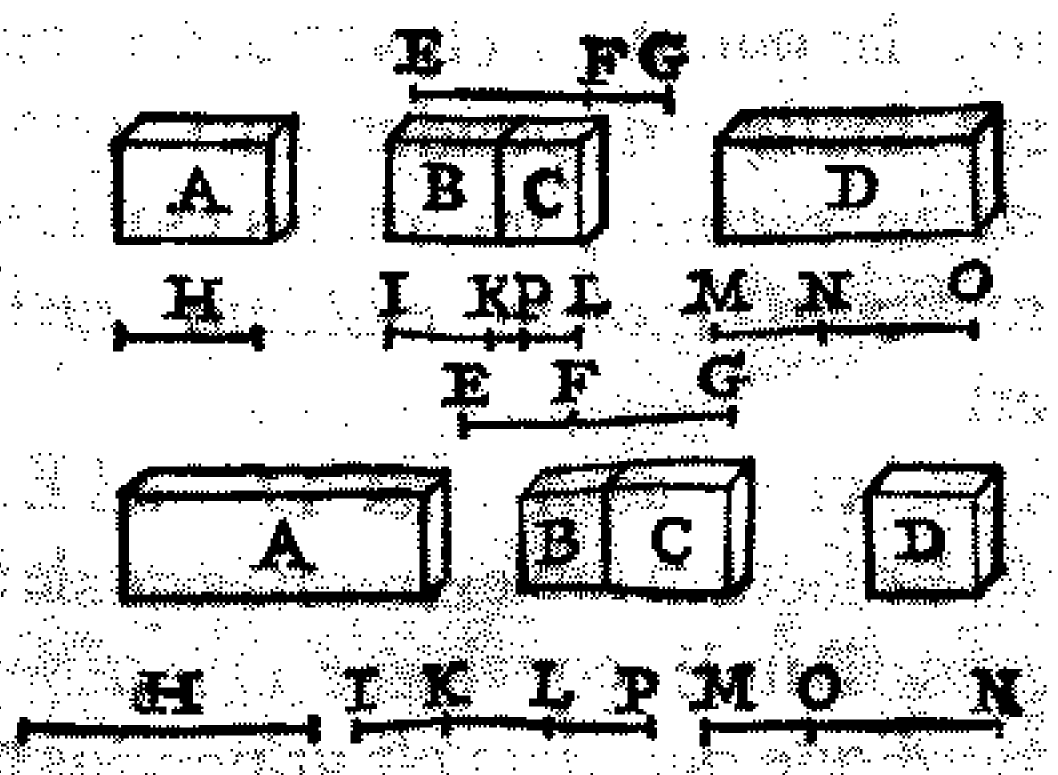
Porisma.

Vt differentia inter moles massæ argenteæ, & massæ aureæ ad differentiam inter moles massæ argenteæ, & coronæ, ita est pondus coronæ ad pondus auri, quod est in corona.

Ex hoc Porismate, & ex præcedenti proponam Theorema vniuersale quod est huiusmodi.

Theorema. C

Si trium corporum æque ponderantium primum, & tertium fuerint generis diuersi, secundi autem portio sit eiusdem generis cum corpore primo, reliqua vero eiusdem generis cum corpore tertio. erit vt differentia inter moles primi, & tertij ad differentiam inrer moles primi, & secundi, ita pondus vnius corporum, ad pondus portionis corporis secundi, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio.



D

Sint tria corpora æque ponderantia A, BC, D, quorum primum, & tertium sint generis diuersi; portio autem secundi vtpote B sit eiusdem generis, cum corpore A, reliqua vero portio C eiusdem generis cum corpore D. Dico vt differentia inter moles corporum A, & D, ad differentiam inter moles corporum A, & BC, ita esse pondus vnius corporum ad pondus portionis C.

Sit enim portionis B pondus EF, portionis autem C pondus FG; ergo totius corporis BC, vel ipsius A, aut D pondus erit EG. Deinde corporis A, sit moles H, portionis vero B moles

IK

A I K, portionis autem C moles K L, corporis vero D moles M O.

Quoniam igitur est vt pondus corporis D ad pondus portionis C, hoc est vt E G ad F G, ita moles ipsius D ad molem ipsius C hoc est ita M O ad K L, corpora enim eiusdem generis eamdem habent rationem in pondere, quam in mole, vt est demonstratum in nostro Archimede promoto; quare quod fit ab extremis E G, & k L, æquale erit ei quod fit à medijs F G, & M O.

Sumantur autem M N, I P. vtraque æqualis ipsi H. Quoniam igitur est vt pondus corporis A, ad pondus portionis B, hoc est vt E G ad E F, ita moles H ad molem I K; factum ab extremis E G, & I K æquale erit facto à medijs E F, & H. vel & M N. sed ostensum est id quod fit ex E G, & K L æquale esse ei quod fit ex F G, & M O. ergo per additionem æqualium

B æqualibus, quod fit ex E G, & I K, vna cum eo quod ex E G, & k L. hoc est id quod fit ex E G, & I L, æquale erit ei, quod fit ex E F, & M N, vna cum eo quod ex F G, & M O. sed quod fit ex E F, & M N, æquale est ei, quod ex E G, & M N, minus eo quod ex F G, & M N. ergo quod fit ex E G, & I L, æquale erit ei, quod fit ex F G, & M O, vna cum eo, quod ex E G, & M N, minus eo quod fit ex F G, & M N. In prima quidem figura demonstratio sic procedet. Auferatur vtrinque id quod fit ex E G, & M N ergo quod fit ex E G, & I L, minus eo, quod ex E G, & M N, vel & I P, hoc est id quod fit ex E G, & P L, æquale erit, quod ex F G, & M O, minus eo, quod fit, ex F G, & M N. hoc est ei quod fit ex F G, & N O; quare æqualitate ad proportionem reuocata, erit vt N O ad P L, ita E G ad F G, hoc est vt dif-

C ferentia inter moles corporum A, & D primi videlicet, & tertij ad differentia inter moles corporum A, & B C primi, & secundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quę est eiusdem generis cum corpore tertio D.

In secunda vero figura demonstratio procedet in hunc modum. Addatur vtrobique id quod fit ex F C, & M N, & auferatur id quod ex F G, & M O; fiet id quod fit ex E G, & I L, vna cum eo quod ex F G, & M N, minus eo quod ex F G, & M O, æquale ei quod fit ex E G, & M N. auferatur quoque id quod fit ex E G, & I L: ergo quod fit ex F G, & M N, minus eo, quod ex F G, & M O, hoc est id quod ex F G, & O N, ęquale erit ei, quod ex E G, & M N, vel I P, minus eo, quod ex E G, & I L, hoc est ei, quod fit ex E G, & L P. quare reuocata ad proportionem æqualitate, erit vt O N ad L P, ita E G ad F G. hoc est

D vt differentia inter moles corporum A & D primi videlicet, & tertij, ad differentiam inter moles corporum A & B C primi & secundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio D, quod erat ostendendum.

Sit corona mixta ex auro, & argento 50. librarum, & oporteat inuenire quantum sit in ea argenti, & quantum auri. Sumantur duæ massę eiusdem ponderis, atque corona. vna ex auro, altera ex argento. & ponatur in aliquod vas aqua plenum; massa aurea, quę eijciat 6. sextarios aquę. Similiter ponatur & corona: eaque eijciat septem sextarios, eodem modo posita & massa argẽtea eijciat 11. sextarios; massa igitur aurea æqualis erit mole sex sextarijs aquæ corona vero 7. se-

sextarijs ; massa autem argentea 11. sextarijs. Fiat igitur vt differentia molis massæ aureæ, & molis massæ argenteæ, hoc est vt S ad differentiam molium massæ aureæ, & coronæ, hoc est ad 1, ita pondus coronæ quod est 50. ad 10. erunt* igitur 10. lib. argenti in corona, auri vero 40. A

ex antec. theor.

Sed ponantur conuerso ordine prædictæ massæ nimirum prima in ordine sit massa argentea, tertia vero aurea. & fiat vt differentia molium massæ argenteæ, & massæ aureæ, hoc est vt S ad differentiam molium massæ argenteæ & coronæ, hoc est ad 4 : ita pondus coronæ quod est 50. lib. ad 40. erit igitur pondus auri, quod est in corona 40. lib. pondus vero argenti 10. lib.

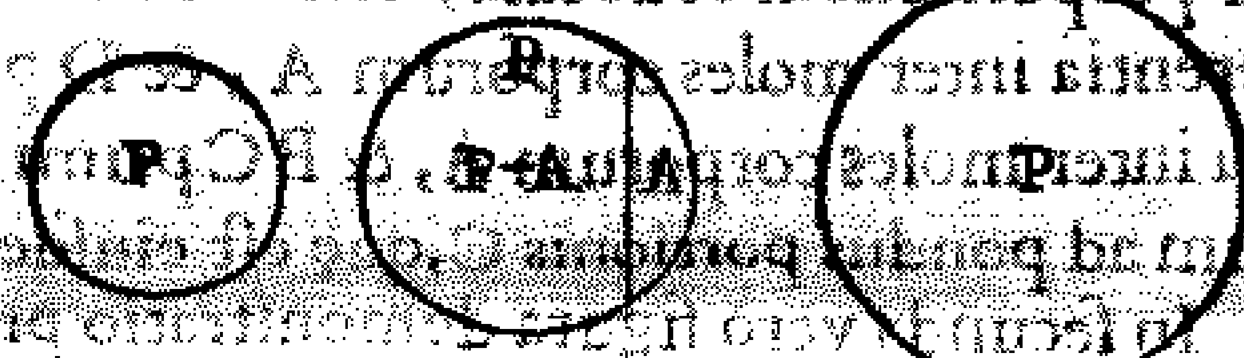
Eodem modo inuenietur pondus argenti, vel auri, quæ sunt in corona, si aquæ eiectæ è vase sumantur ad rationem ponderis, quemadmodum eas sumpsimus ad rationem mensuræ. corpora enim eiusdem generis eamdem habent rationem in pondere, quam in mole. eijciat enim massa aurea è vase tres libras aquæ; corona vero $3\frac{1}{2}$. massa autem argentea $5\frac{1}{2}$. Fiat igitur vt differentia inter 3, & $5\frac{1}{2}$ quæ est $2\frac{1}{2}$ ad differentiam inter 3 & $3\frac{1}{2}$, quæ est $\frac{1}{2}$; ita 50. lib. ad 10. libras, hoc est ad pondus argenti, quod est in corona. illud ipsum pondus quod supra inueniebatur. B

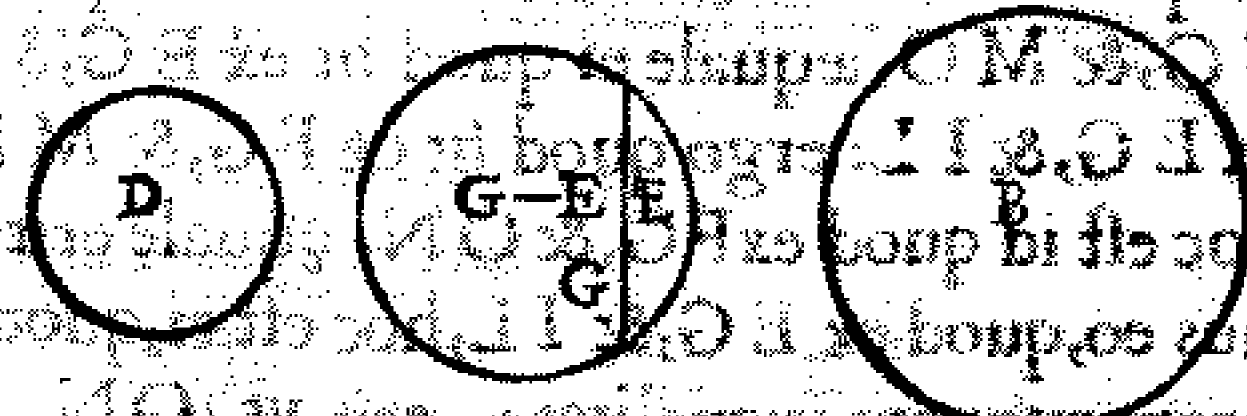
Aliter & Problema resoluam, & Theorema demonstrabo.

Resolutio quarta.

Iisdem positis quæratur pondus argenti, quod est in corona. illud esto A. ergo P − A erit pondus auri, mensura autem aquæ mole æqualis argento, quod est in corona esto E. ergo mensura aquæ mole æqualis auro erit G − E. ponitur enim G mensura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam est vt pondus massæ aureæ ad pondus auri, quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad moles eiusdem auri, erit C

massa aurea corona massa argentea





vt P ad P − A ita D ad G − E D

Nunc studium adhibendum est vt deueniamus ad aliquam proportionem cuius tres termini sint cogniti. id autem tali fiet argumentatione. ergo per conuersionem rationis erit vt P ad A ita D ad D − G + E

sed est vt P ad A ita B ad E

hoc est vt pondus massæ argenteæ ad pondus argenti quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem argenti; ergo erit

vt B ad E, ita D, ad D − G + E

& per mutando erit vt B, ad D, ita E ad D − G + E

& diuidendo vt B − D, ad D, ita G − D ad D − G + E

&

A & rursus permutando vt B -- D ad G -- D ita D ad D -- G ✣ E
sed ostensum est supra esse vt P ad A ita D ad D -- G ✣ E
ergo erit vt B -- D ad G -- D ita P ad A.

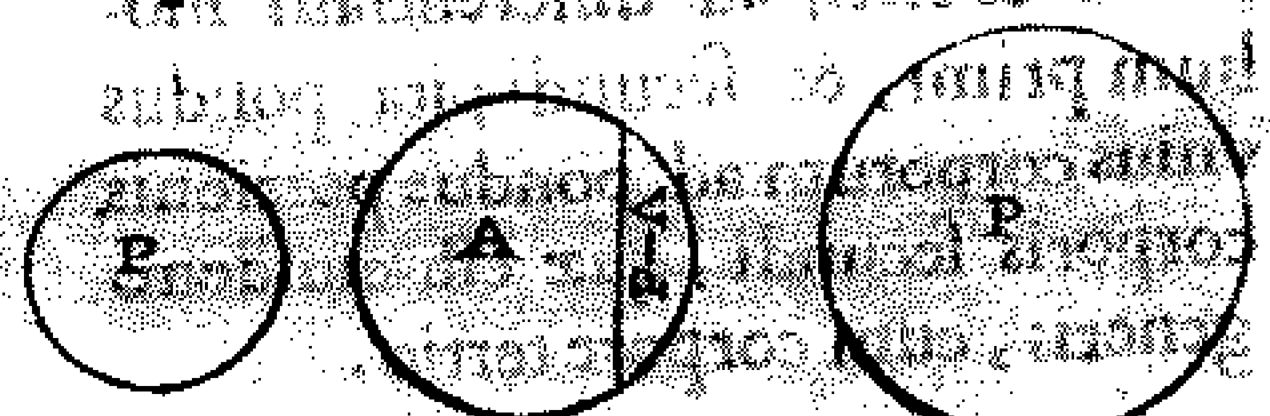
In hac igitur proportione cogniti sunt tres termini, atque est ea ipsa proportionalium series, quæ per antecedentes Resolutiones inuenta est, cum de pondere argenti, quod est in corona quærebatur. atque adeo idem Porisma deducitur.

Porisma.

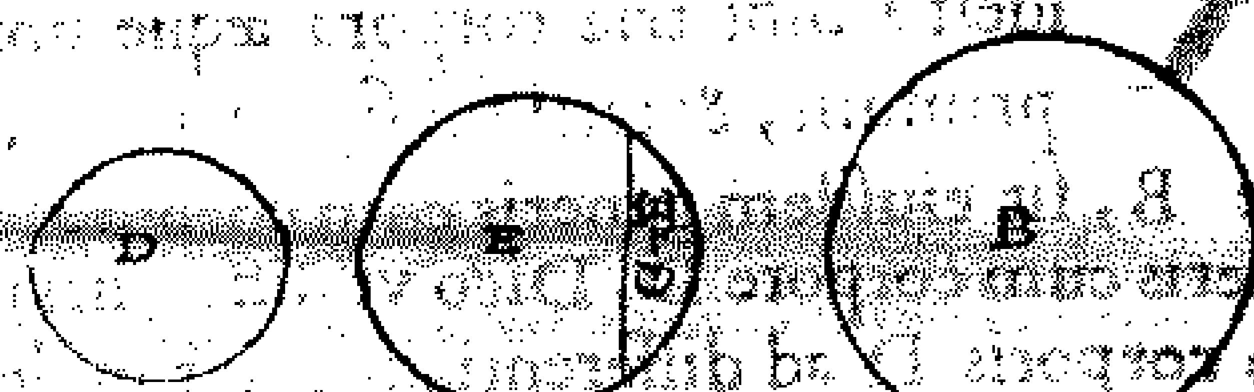
Vt differentia molis massæ argenteæ, & molis massæ aureæ ad differentiam molis coronæ, & molis massæ aureæ, ita est pondus coronæ ad pondus ar-
B genti; quod est in corona.

Resolutio quinta.

Sed quæratur pondus auri existentis in corona. id esto A. ergo pondus argenti erit P -- A; mensura autem aquæ mole æqualis auro, quod est in corona esto E. ergo mensura aquæ mole æqualis argento erit G -- E. ponitur enim G mensura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam est vt pondus massæ argenteæ ad pondus argenti, quod est in corona. ita moles eiusdem mas-
C sæ ad molem eiusdem argenti, erit



vt P ad P -- A
ita B ad G -- E
Et per conuersionem rationis
vt P ad A ita B ad B - G ✣ E
sed est vt P ad A ita D ad E



hoc est vt pondus massæ aureæ ad pondus auri, quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem auri, ergo erit
vt B ad B -- G ✣ E ita D ad E
et permutando vt B ad D ita B -- G ✣ ad E
D & diuidendo vt B -- D ad D ita B -- G ad E
& rursus permutando vt B -- D ad B — G ita D ad E
sed est vt D ad E ita P ad A
cum sit vt moles massæ aureæ ad molem auri, quod est in corona; ita pondus eiusdem massæ ad pondus eiusdem auri. ergo erit
vt B — D ad B -- G ita P ad A.

Dantur igitur tres proportionis termini, atque est ea ipsa proportionalium series, quæ per alias resolutiones inuenta est, cum de pondere auri, quod est in corona quærebatur. atque adeo idem porisma deducetur.

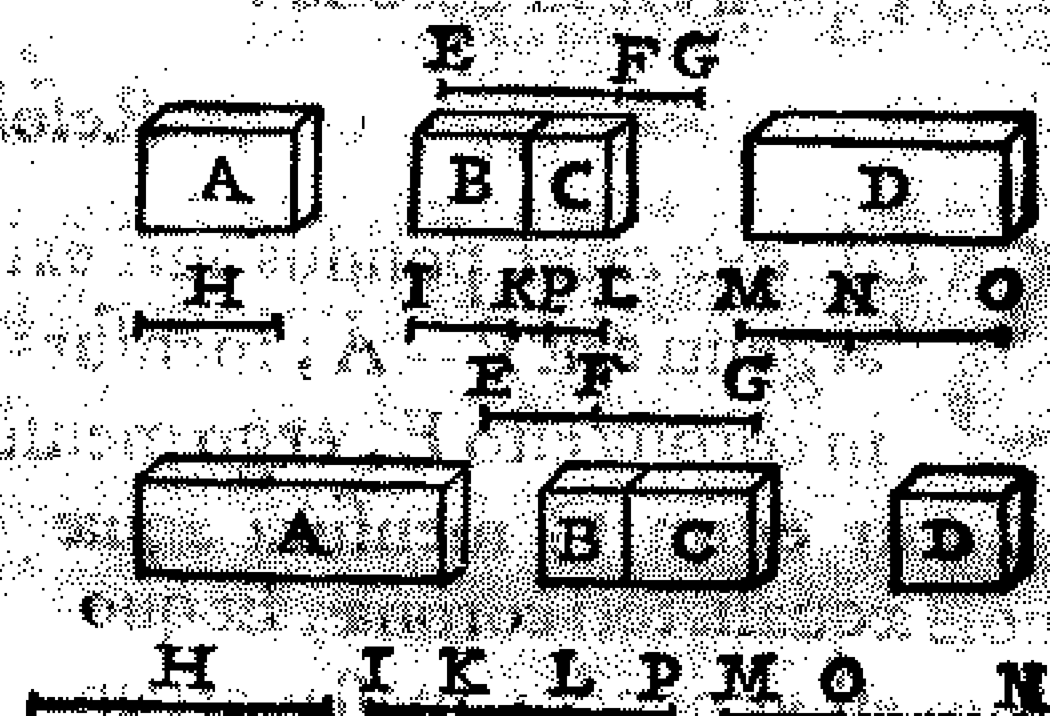
Porisma. A

Vt differentia molium massæ, argenteæ, & massæ aureæ, ad differentiam molium massæ argenteæ, & coronæ; ita est pondus coronæ ad pondus auri, quod est in corona.

Ex hoc, & antecedentes Porismata proponemus vnum Theorema vniuersale illud ipsum, quod supra proposuimus, sed alia via demonstratio procedet, cum & Resolutio alia via processerit.

Theorema.

Si trium corporum æque ponderantium primum, & tertium fuerit diuersi generis, secundi autem portio sit eiusdem generis cum corpore primo; reliqua vero eiusdem generis cum corpore tertio; erit vt differentia molium primi & tertij ad differentiam molium primi, & secundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis corporis secundi, quæ est eiusdem generis, cum corpore tertio. B



Resumantur superioris Theorematis figura, & repetantur eadem verba idest. Sint tria corpora æque ponderantia A, B C, D, quorum primum, & tertium sint generis diuersi; portio autem secundi, vtpote B, sit eiusdem generis cum corpore A: reliqua vero portio eiusdem generis cum corpore D. Dico vt differentia inter molem corporis A, & molem corporis D ad differentiam inter molem corporis A, & molem corporis B C, ita esse pondus vnius corporum ad pondus portionis C. C

Sit enim portionis B pondus E F portionis autem C pondus F G. ergo totius corporis B C pondus erit E G, quod quidem pondus erit & corporum A, & D. corporis autem A sit moles H: portionis vero B moles I K, & portionis C moles K L; corporis vero D moles M O. & sumantur M N, I P æquales ipsi H. Quoniam igitur est vt pondus corporis A ad pondus portionis B, hoc est vt E G ad E F, ita moles ipsius A ad molem ipsius B, hoc est, ita H, vel I P ad I K: erit per conuersionem rationis vt E G ad G F, ita I P ad P k. sed vt E G, ad G F, ita est quoque M O ad k L, est enim vt pondus corporis D ad pondus portionis C, ita moles ipsius D ad molem ipsius C. in prima quidem figura sic concludo; ergo vt M O ad K L, ita erit I P ad P k. & permutando vt M O ad I P, hoc est, ad M N, ita K L ad P K & diuidendo vt O N ad N M, ita L P ad P K. & rursus permutando erit O N ad L P, vt N M, vel I P ad P k; sed ostensum est supra esse & E G ad G F vt I P ad P K, ergo & O N ad L P, ita erit E G ad G F, hoc est vt diffe- D

ren-

A gentia inter moles corporum A D ad differentiam inter moles corporum A & B C, ita pondus vnius corporum, aut pondus portionis C, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio.

In secunda vero figura concludo in hunc modum. ergo vt I P ad P K, ita erit M O ad k L, & permutando vt I P vel N M ad M O, ita P k ad K L, & diuidendo vt N O ad O M, ita P L ad L k, & rursus permutando erit vt N O ad P L, ita O M ad L k. sed vt O M ad L k, ita est E G ad G F, hoc est vt moles corporis D ad molem corporis C, ita pondus eiusdem corporis G ad pondus eiusdem corporis C. ergo vt N O ad P L, ita erit E G ad G F. hoc est vt differentia inter moles corporum A D ad differentiam inter moles corporum A & B C, ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quæ est eiusdem
B generis cum corpore tertio, quod erat ostendendum.

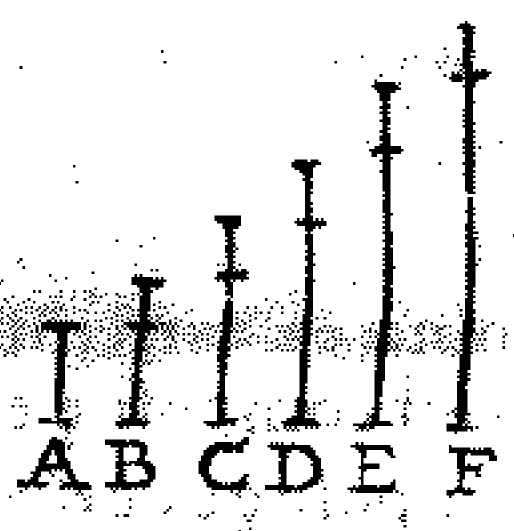
Sed facilius atque exactius deprehendetur portio argenti quod, est in corona si ipsa corona & massæ illæ ponderentur in aqua, quemadmodum in nostro Archimede promoto docuimus.

Lemma I.

Si fuerint lineæ quodcumque æqualiter sese excedentes. Composita ex extremis æqualis erit vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis, & si fuerit numerus linearum impar; mediæ duplæ æqualis erit.

Sint lineæ quodcumque æqualiter sese excedentes
C A B C D E F.

Dico compositam ex extremis A F æqualem esse vnicuique compositarum ex B E, vel ex C D, vel mediæ duplæ; si numerus linearum est impar.



Quoniam enim si ab extrema F auferatur. excessus quo superat, proximam E, reliqua æqualis erit E. similiter à secunda B, ablato excessu, quo superat primam A, reliqua æqualis erit A. Si igitur æqualibus A, & B multatæ addantur æquales F, multata & E composita ex A & F multata; æqualis erit compositæ ex B multata & E.

Restituantur excessus ablati tum ipsi B, tum ipsi F, qui quidem excessus sunt æquales, nam æqualiter lineæ sese excedunt. ergo composita ex A & F tota,
D æqualis erit compositæ ex B tota & E. Eadem ratione ostendemus compositam ex C D, æqualem esse compositæ ex B E. quare & compositæ ex A F.

Sed sit numerus linearum A B C impar. eadē ratione ostendemus compositam ex extremis A C æqualē esse mediæ duplæ. nam C contracta excessu, quo superat mediā B, æqualis est ipsi B; A vero protracta eodē excessu æqualis erit eidem B. quare composita ex A C æqualis erit B duplæ. quare constat propositum.

Idem aliter breuius ostendemus.

Sint lineæ quodcumque æqualiter sese excedentes, quarum prima sit B. excessus autem, quo sese excedunt A. ergo secunda erit B + A. tertia vero B + A 2, & sic deinceps. exponatur igitur series huiusmodi linearum. ec erunt? A

B B + A B + A 2 B † A 3 B † A 4 B † A 5

Manifestum est composita ex extremis æquale esse vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis. nam composita ex extremis B, & B † A 5, est B 2 + A 5. quanta etiam est composita ex secunda B + A & B + A 4, ac etiam quanta est composita ex tertia B + A 2 & B † A 3. Æque manifestum est si numerus linearum fuerit impar compositam ex extremis æqualem esse mediæ duplæ.

Lemma II.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. Dupla composita ex omnibus, multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum. B

NVmerus enim linearum erit par aut impar. sit par. Quoniam igitur composita ex extremis æqualis est vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis per antecedens Lemma, & æqualis quoque sibi ipsi: ideo composita ex omnibus, totuplex erit compositæ ex extremis, quot sunt binæ lineæ, & consequenter dupla composita ex omnibus, totuplex compositæ ex extremis; quot sunt lineæ.

Sed sit numerus linearum impar. Quoniam igitur composita ex extremis æqualis est vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis, & æqualis quoque sibi ipsi, ideo composita ex omnibus, excepta media, totuplex erit compositę ex extremis, quo sunt binę lineę, excepta media, & per consequens dupla composita ex omnibus, excepta media, totuplex erit compositæ ex extremis, quot sunt lineę, excepta media; sed dupla media* æqualis est compositę ex extremis. ergo dupla composita ex omnibus, totuplex erit compositę ex extremis, quot sunt lineæ. Itaque dupla composita ex omnibus multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum. quod erat demonstrandum. C

lem. i

Lemma III.

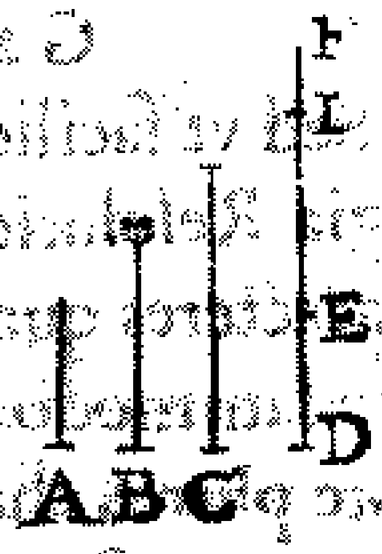
Si fuerit lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. Differentia extremarum continuata excessu, multiplex est ipsius excessus per numerum linearum. D

SInt lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D I, & ab extrema D I, quæ sit maxima auferatur D E æqualis minimæ A ergo differentia extremarum erit E I. producatur autem E I in F, vt sit I F æqualis excessui. Dico E F multiplicem esse ipsius I F per numerum linearum.

Quoniam enim A prima differt à secunda quidem B, per excessum æqualem I F, à tertia vero C per duplum excessum I F, à quarta autem D I per triplum excessum, ac denique ab extrema seu maxima per

ex-

A excessum multiplicem, per numerum linearum, dempta vna, hoc est differentia extremarum, multiplex est ipsius excessus per numerum linearum dempta vna, & consequenter differentia extremarum continuata excessu, multiplex est ipsius excessus per numerum linearum. quod erat ostendendum.



Lemma IV.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. Est vt dupla composita ex omnibus, ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum continuata excessu ad excessum.

B

Quoniam enim dupla composita ex omnibus * multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum, per quem numerum etiam differentia extremarum continuata excessu, * multiplex est ipsius excessus. ergo quotuplex est dupla composita ex omnibus, compositæ ex extremis, totuplex; erit differentia extremarum continuata excessu, ipsius excessus; quare vt dupla composita ex omnibus ad compositam ex extremis, ita erit differentia extremarum, continuata excessu ad excessum. quod erat ostendendum. lem. ii ex antec.

Problema II.

C Data minima & maxima linearum æqualiter sese excedentium & composita ex omnibus; inuenire singulas. Oportet autem duplam compositam ex omnibus multiplicem esse compositæ ex extremis per numerum binario maiorem.

Resolutio.

Sit data minima B, maxima vero D, composita autem ex omnibus G. Oportet inuenire singulas.

Quæratur excessus, is esto A. Quoniam igitur est vt dupla composita ex omnibus, ad compositam ex extremis; ita differentia extremarum continuata excessu, ad excessum; erunt proportionales.

D G 2 D + B D -- B + A A.

Sed factum sub extremis æquale est ei, quod fit sub medijs, ergo

G 2 in A æquabitur (D Q -- D in B + D in A
(+ D in B -- B Q + B in A

Hoc est G 2 in A æquabitur DQ + D in A -- BQ + B in A

Auferantur vtrinque D in A, & B in A, vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

G 2 in A -- D in A -- B in A æquabitur D Q -- B Q

Seu quod idem est G 2 -- D -- B in A æquabitur D Q -- B Q.

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

G 2 — D — B   D + B   D — B   A   A

Sed vt facilior reddatur via ad Theorematis demonstrationem, quę per vestigia Resolutionis progredi debet, curandum est, vt datarum magnitudinum characteres quam paucissimi existant; multitudo enim characterum obruit quodammodo ipsa vestigia, & inuoluit. Itaque cum in resoluendo Problemate plures characteris, (siue aggregatum datarum magnitudinum, siue differentiam significantes) simul semper, vel in vna æqualitatis parte, vel in vtraque existant; tunc ipsum aggregatum, vel differentia poterit vno tantum charactere designari. Igitur in superiori Resolutione quoniam characteris D + B vel D — B semper simul existunt; poterit pro D + B substitui F, & pro D — B substitui H. Substituantur & procedat Resolutio, vt supra. Quoniam

lem. 4 igitur* proportionales sunt   B

G 2   F   H + A   A

factum sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs; nempe

G 2 in A æquabitur F in H + F in A.

Auferatur vtrinque F in A, vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

G 2 in A — F in A æquabitur F in H.

Seu quod idem est   G 2 — F in A æquabitur F in H

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

G 2 — F   F   H   A

ea ipsa proportionalium series, quæ per antecedentem resolutionem inueniebatur.

Porisma.   C

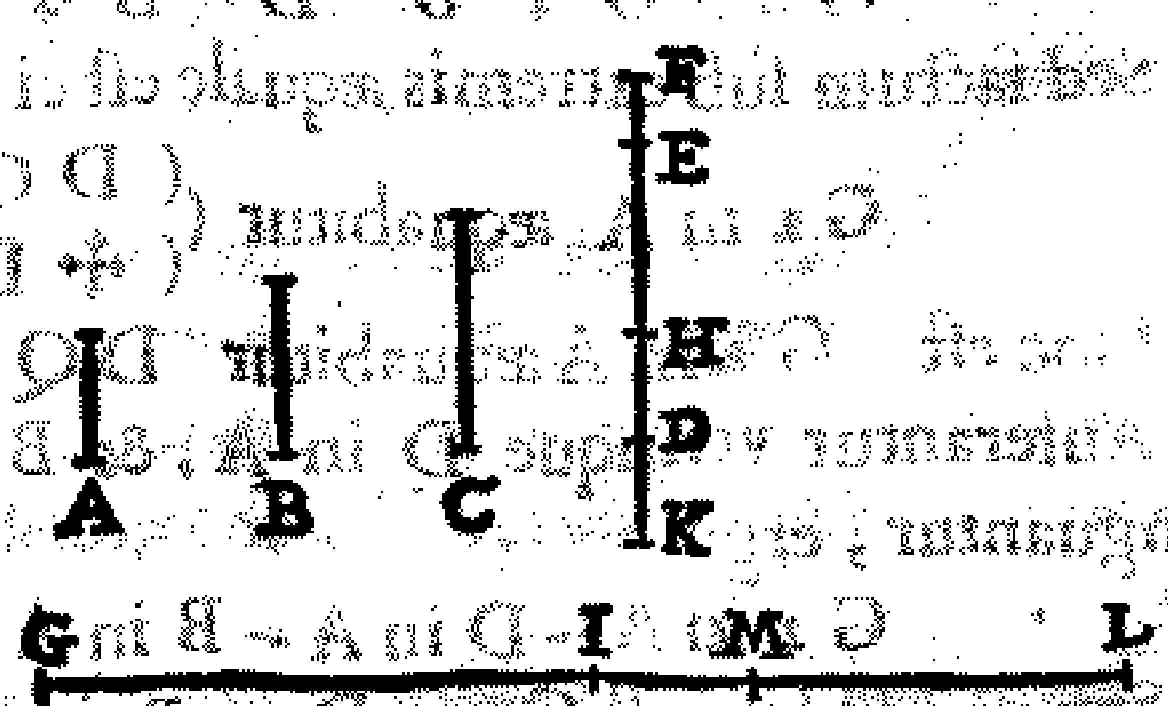
Vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis, ad compositam ex extremis; ita est differentia extremarum ad excessum.

Hoc Porisma in formam Theorematis ita proponetur.

Theorema.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes, est, vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & composiæ ex extremis, ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum ad excessum.

Sint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D E, sitque G I æqualis compositæ ex omnibus, & producatur maxima E D in k, vt sit D k æqualis minimæ A, cui quoque æqualis fiat D H. erit igitur E H differentia extremarum; E k vero composita ex extremis. Rursus producatur H E in F, vt sit E F æqualis   D



ex-

A excessui, quo lineæ sese excedunt. Dico differentiam duplæ G I, & rectæ E k ad ipsam E K esse, vt H E ad E F. Duplicetur enim G I in L. & ab ipsa auferatur L M æqualis k E. Quoniam igitur est * vt G L ad k E, ita H F ad F E, rectangulum sub G L, & F E * æquale erit rectangulo sub K E, & H F, hoc est rectangulis k E H, k E F; auferatur vtrinque rectangulum K E F. ergo rectangulum sub G L, & E F minus rectangulo K E F, hoc est minus rectangulo sub L M, & E F, æquale erit rectangulo k E H; sed rectangulum sub G L, & E F minus rectangulo sub L M, & E F æquale est rectangulo sub G M, & E F: ergo rectangulum sub G M, & E F, æquale erit rectangulo K E H; quare * vt G M ad K E ita erit H E ad E F. quod erat ostendendum. lem. 4 16 sexti 16 sexti

Alia breuiori, ac faciliori via & Problema resoluam, & Theorema demonstrabo.

B

Ijsdem datis. quæratur excessus vt in antecedenti.

Resolutione. is esto A. Et quoniam * proportionales sunt. lem. 4

$G\,2.\quad D + B.\quad D - B + A\quad A$

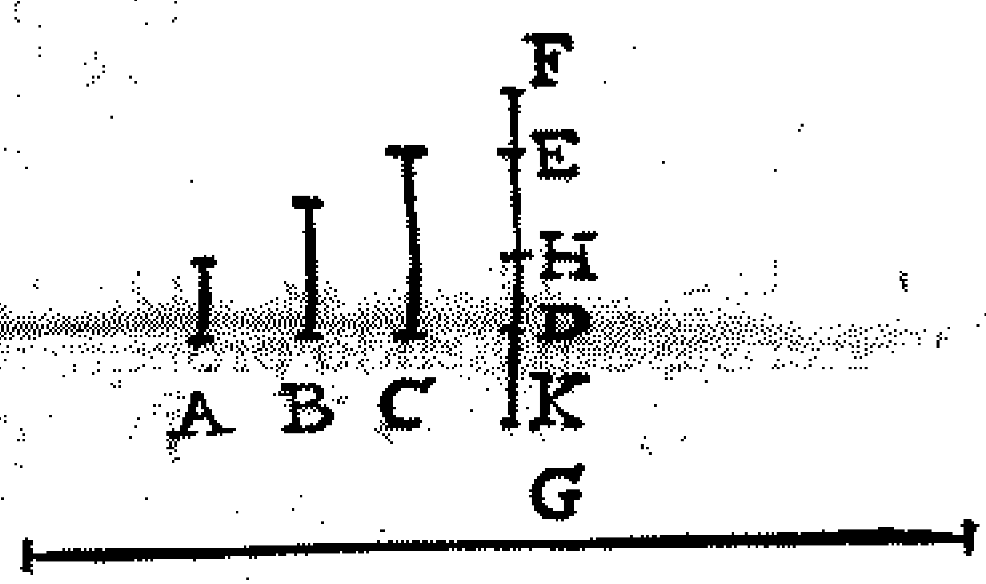
Et diuidendo proportionales erunt

$G\,2 - D - B\quad D + B\quad D - B\quad A$

Ea ipsa proportionalium series, quæ per priorem resolutionem inuenta est. itaque proponetur idem Theorema; sed alia ratione demonstrabitur.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes, est vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis; ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum ad excessum.

C Sint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D E; sitque G æqualis compositæ ex omnibus, & producatur maxima E D in k, vt sit D K æqualis minimæ A, cui quoque æqualis fiat D H. erit igitur E H differentia extremarum; E K vero composita ex extremis. Rursus producatur H E in F, vt sit E F æqualis excessui, quo lineæ sese excedunt. Dico differentiam inter duplam G, & rectam E K ad ipsam E k esse, vt H E ad E F. Quoniam enim est * vt dupla G ad E K, ita H F ad E F; erit diuidendo vt differentia, qua G dupla superat E K ad E k, ita H E ad E F; quod erat ostendendum. lem. 4



D

Sint numeri æqualiter sese excedentes, quorum minimus, idemque primus est 3; maximus vero 13; summa autem omnium 48, & oportet inuenire singulos. Fiet vt differentia summæ omnium duplæ, & summæ extremorum, ad summam extremorum, ita differentia extremorum, ad excessum, hoc est vt 80 ad 16, ita 10 ad 2. itaque 2 erit excessus; atque adeo progresio numerorum 3. 5. 7. 9. 11. 13. quorum summa est 48.

Pro-

Problema III.

Data secunda linearum æqualiter sese excedentium, & composita ex extremis, itemque composita ex omnibus. inuenire singulas. Oportet autem duplam compositam ex omnibus multiplicem esse compositæ ex extremis, per numerum binario maiorem. A

HOc Problema in duos Casus diuidam, primus erit cum dupla cōposita ex omnibus multiplex est compositæ ex extremis per numerū maiorem ternario, secundus autem cum ea multiplex est per ipsum ternarium.

Resolutio primi Casus.

SIt data secunda B; composita vero ex extremis D; composita autem ex omnibus G. sitque dupla G multiplex ipsius D per numerum maiorem ternario, ergo numerus linearum æqualiter sese excedentium ternario maior erit. quoniam dupla composita ex omnibus* multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum. B

lem. 1

Excessus igitur, de quo quæratur esto A, ergo B — A erit minima, quæ si auferatur à D composita ex extremis, reliqua D -- B ✠ A erit maxima; à qua si auferatur minima, quæ est B -- A, reliqua D — B 2 ✠ A 2 erit differentia maxmæ, & minimæ, hoc est extremarum.

Et quoniam ex antecedente Theoremate est, vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compoxtæ ex extremis ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum ad excessum; ideo proportionales erunt. C

G 2 — D, D, D — B 2 ✠ A 2, A

Et diuidendo proportionales erunt

G 2 — D 2 D D — B 2 ✠ A A

Iterum diuidendo proportionales erunt

G 2 -- D 3 D D -- B 2 A

Porisma.

Vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & triplæ compositæ ex extremis, ad compositam ex extremis; ita est differentia compositę ex extremis, & duplæ secundæ, ad excessum.

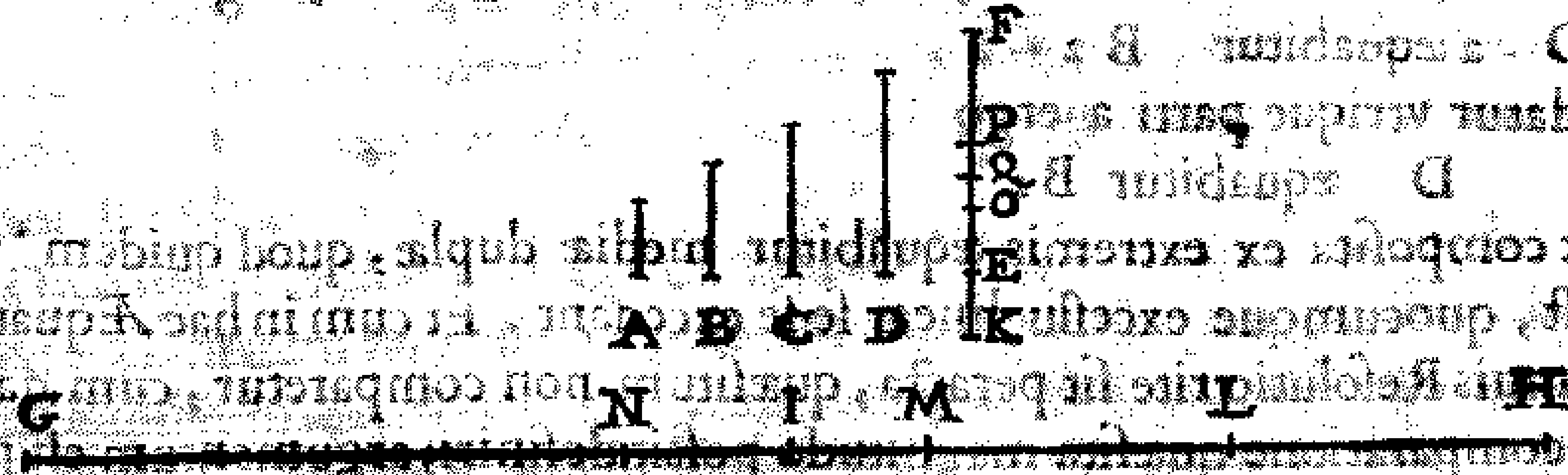
Ex hoc Porismate proponetur Theorema huiusmodi. D

Theorema.

Si numerus linearum æqualiter sese excedentium fuerit ternario maior, erit vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & triplæ co mpositæ ex extremis ad compositam ex extremis; ita differentia compositæ ez extremis, & duplæ secundæ ad excessum.

SInt lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D, E F, quarum numerus sit ternario maior, & ponatur G I æqualis compositæ ex om-

A omnibus, eaque duplicetur in H. ergo G H multiplex est compositæ ex extremis, per numerum ternario maiorem: quoniam dupla composita ex omni-



B bus multiplex est compositæ ex extremis, per numerum linearum. itaque ipsa G H maior est, quam tripla composita ex extremis. sumatur igitur in G H recta H L æqualis compositæ ex extremis; cui quoque æqualis sumatur L M, similiter eidem æqualis, sumatur M N. reliqua igitur G N erit differentia duplæ compositæ ex omnibus & compositæ ex extremis. Deinde sumatur E O æqualis primæ A vel E K, & fiat K P dupla secundæ B. cum igitur P K dupla secundæ superet O K duplam primam, excessu P O; simpla secunda superabit simplam primam dimidio excessu P O. Secetur ergo P O bifariam in Q, erit P Q, vel Q O excessus, quo lineæ sese excedunt. Dico igitur G H ad N M esse vt F P ad P Q, hoc est differentiã duplæ compositæ ex omnibus, & triplæ compositæ ex extremis ad compositam ex extremis, esse vt differentia compositæ ex extremis, & duplæ secundæ ad excessum. Quoniam enim ex antecedente Theoremate est, vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis ad compositam ex extremis, ita differentia extremorum ad excessum; hoc est vt G L ad L M; ita F Q ad O Q. erit diuidendo vt G M ad M L, hoc est ad M N, ita F Q ad Q O, hoc est ad Q P, & rursus diuidendo erit G N ad N M ita F P ad P Q. quod erat ostendendum. lem. 2

Sint numeri æqualiter sese excedentes, quorum secundus sit 5, summa autem extremorum 14. summa vero omnium 35. & oporteat inuenire singulos. Fiet vt differentia summæ omnium duplæ, & triplæ summæ extremorum ad summam extremorum; ita differentia summæ extremorum & duplæ

D secundæ ad excessum; hoc est vt 28 ad 14, ita 4 ad 2. itaque 2 erit excessus, atque adeo progresio numerorum 3 5 7 9 11, quorum secundus est 5 summa vero extremorum 14. summa autem omnium 35.

Resolutio secundi Casus.

Sit data secunda B composita ex extremis D, composita ex omnibus G, cuius dupla sit multiplex ipsius D per ternarium, hoc est sit tripla ipsius D. ergo tres erunt lineæ æqualiter sese excedentes. oporteat inuenire primam, & tertiam.

Prima esto A, ergo D -- A erit tertia, composita autem ex prima, & ter-

sia ponitur D. rursus quoniam prima quidem est A. secunda vero B, ex- A
cessus, quo secunda B superat A primam, erit B -- A. is excessus addatur
secundæ B, fiet tertia B 2 -- A, at eadem tertia est D -- A, ergo

D -- a æquabitur B 2 -- a

Addatur vtrique parti a ergo

D æquabitur B 2.

lem. 1 hoc est composita ex extremis æquabitur mediæ duplæ, quod quidem * verum est, quocumque excessu lineæ sese excedant. Et cum in hac Æquatione quamuis Resolutio rite sit peracta, quæsitum non comparetur, cum dato, vt tali comparatione quæsita magnitudo possit definiri, argumentum est primam linearum de qua quæritur cuiuscumque longitudinis exhibitam: modo ea minor sit, quam data secunda, Problemati satisfacere. idque B
ita fit manifestum.

Sit data secunda, hoc est media trium linearum æqualiter sese excedentium B; composita autem ex extre-
lem. 1 mis C D ea * erit dupla ipsius B, Oportet inuenire extremas. secetur C D vtcumque in F, & sit C F minor, quam F D. Dico lineas æqualiter sese excedentes, esse
lem. 1 C F B F D. Quoniam enim C D * æqualis est duplæ B, secta C D bifariam in E, erit vtraque ipsarum C E, E D æqualis ipsi B; sed C E superat C F primam excessu F E, quo etiam tertia F superat ipsam E D. ergo & secunda B superabit primam C F excessu F E, atque tertia C
F D B secundam. Itaque lineæ C F B F D æqualiter sese excedunt, atque earum media est ipsa B data, & composita ex extremis data C D. factum est igitur quod oportuit.

In numeris sit secundus numerus, hoc est medius 5. summa extremorum erit. 10. ponatur pro primo numero quilibet numerus quinario minor, vtpote 1 tertius erit 9, & numeri 1, 5, 9, æqualiter sese excedentes Problemati satisfaciunt.

Sed ponatur pro primo numero 2. tertius erit 8, & numeri 2 5 8 æqualiter sese excedentes problemati satisfaciunt.

Item ponatur pro primo numero $2\frac{1}{2}$, tertius erit $7\frac{1}{2}$, atque numeri $2\frac{1}{2}$
5 $7\frac{1}{2}$ æqualiter sese excedentes Problemati satisfaciunt. D

Quomodo Problemata impossibilia cognoscantur.

Caput II.

INterdum contingit, vt Problema propositum sit impossibile. Istam impossibilitatem Resolutio arguit exhibens impossibilem Aequationem. Nam quotiescumque Resolutio Problematis incidit in Aequationem impossibilem, argumentum est Problema impossibile esse. Aequationem autẽ impossibilem voco cũ in ea minor magnitudo proponitur æquari maiori,

quod

A quod quidem absurdum, vel aperte cernitur, vel arguitur ex eo, quod ipsa æquatio tunc inexplicabilis redditur; nam cum Æquatio explicari nequit, causa est ipsa Æquationis inæqualitas; idque sic demonstrabo.

Proponatur B in A -- A Q æquari B Q. hæc Æquatio non potest explicari; nam ad eam explicandam oportet à quadrato dimidiæ coefficientis B, quod est B Q $\frac{1}{4}$ auferre B Q, quod fieri non potest; cum sit B Q maius, quam B Q $\frac{1}{4}$.

Dico igitur B in A -- A Q, minus esse B Q, hoc est in proposita Æquatione æqualitatem non esse. Quoniam enim ponitur A Q auferri a B in A, & id quod remanet æquari B Q; erit A Q minus quam B in A: quare & A minor erit quam B. atque adeo B in A minus, quam B Q, & per con-
B sequens B in A -- A Q multo minus. In proposita igitur Æquatione non est æqualitas. quod erat ostendendum.

Problema I.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus vna cum quadrato differentiæ partium æquale sit quadratis partium.

Resolutio.

Sit data recta linea B 2, quam oportet secare, ita vt rectangulum sub partibus, vnà cum quadrato differentię partium æquale sit quadratis partium.

C Factum iam sit, & dimidia differentia partium esto a. ergo pars* maior erit B + A; pars autem minor B — a. Et quoniam rectangulum sub B + a & B -- a vna cum quadrato ex a 2 æquale est quadratis ex B + a, & B — a, sic enim ponitur secta data recta linea B 2, ideo co 2. probl. i lib. i

BQ -- a Q + a Q 4 æquabitur B Q 2 + a Q 2

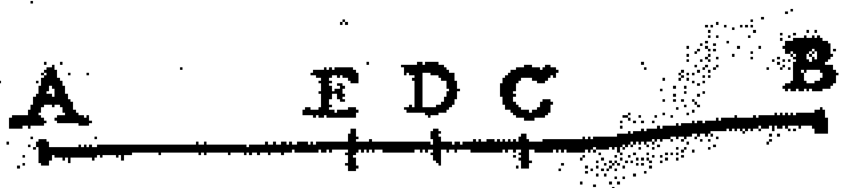
hoc est B Q + a Q 3 æquabitur B Q 2 + a Q 2

auferatur vtrinque B Q, & a Q 2; ergo

A Q æquabitur B q.

D vnde & A æquabitur B, pars toti, quod est absurdum. Cum igitur Resolutio incidat in Æquationem impossibilem, argumentum est Problema impossibile esse; quæ quidem impossibilitas repetendo Resolutionis vestigia ita ostendetur.

Sit enim si fieri potest recta a B secta in C, ita vt rectangulum sub partibus A C, C b vna cum quadrato differentiæ earundem æquale sit quadratis a C, C b, & sumatur A E æqualis C b. ergo differentia partium



a c, C B erit E C. secetur autem A B bifariam in D. Quoniam igitur re- A
ctangulum A C b, vnà cum quadrato E C, hoc est cum quadrato D C quater. æquale est quadratis A C, C B, sic ponitur secta A b; ipsum autem re-
5 secundi ctangulum A C b, vna cum quadrato D C* æquale est quadrato A D, vel quod idem est rectangulum A C B æquale est quadrato a D, minus quadrato D L; ideo quadratum a D minus quadrato D C, plus quadrato D C quater, hoc est quadratum a D, vnà cum quadrato D C ter, æquale erit quadratis a C
9 secundi c b, hoc est* duplo quadratorum a D, D c: auferatur vtrinque quadratum a D, & duplum quadrati D c; ergo reliquum quadratum D c reliquo quadrato a D æquale erit. vnde & recta D c æqualis rectæ a D, vel D b pars toti, quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium, æquale sit quadratis partium. B
Itaque Problema impossibile est, quod erat ostendendum.

Problema II.

Datum rectam lineam secare, vt triplum rectangulum, sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium, æquale sit quadrato totius rectæ.

Resolutio.

Sit data recta linea b 2 secunda vt petitur. Factum iam sit, & dimidia differentia partium esto A. ergo b + a erit pars maior b — a pars minor. Et quoniam triplum rectangulum sub b + a, & b — a vnà cum quadrato ex a 2 æquale est quadrato ex b 2, ergo. C

$$BQ\,3 - aQ\,3 + aQ\,4 \text{ æquabitur } bQ\,4$$

hoc est $bQ\,3 + aQ$ æquabitur $bQ\,4$

auferatur vtrinque $bQ\,3$; ergo

$$AQ \text{ æquabitur } bQ.$$

vnde & A æquabitur b pars toti, quod est absurdum. Cum igitur æquatio impossibilis sit; Problema quoque impossibile est. Idque sic demonstrabimus. D

Sit si fieri potest recta a b secta in c; ita vt triplum rectangulum a c b, vnà cum quadrato differentiæ partium a c, c b æquale sit quadrato totius a b, & sumatur a E æqualis C B. ergo differentia inter A C, C B erit E C, deinde secetur A B bifariam in D.

5 secundi ergo rectangulum A C B, vna cum quadrato D C* æquale est quadrato A D, vel D B. seu quod idem est rectangulum A C B, æquale erit quadrato D B,

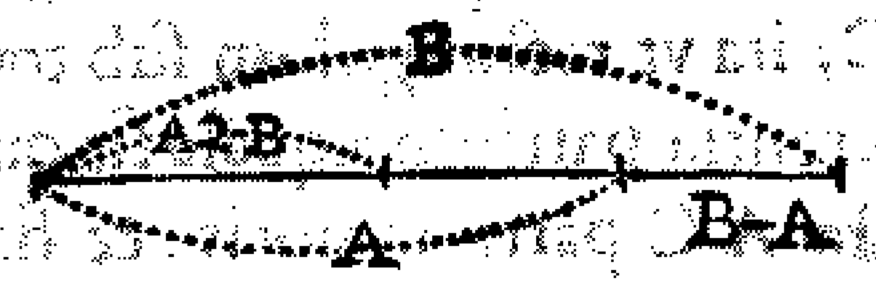
mi-

A minus quadrato D C. & consequenter triplum rectanguli A C B æquale triplo quadrati D B, minus triplo quadrati D C. sed ponitur triplum rectanguli A C B vnà cum quadrato E C, hoc est cum quadruplo quadrati D C æquari quadrato A B, ergo triplum quadrati D B, minus triplo quadrati D C, vna cum quadruplo quadrati D C, hoc est triplum quadrati D B, vna cum quadrato D C, æquabitur quadrato A B, hoc est quadruplo quadrati D B. auferatur vtrinque triplum quadrati D B. ergo reliquum quadratum DC reliquo quadrato D B æquale erit. quare & recta D C æqualis rectæ D B. quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt triplum rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale sit quadrato totius lineæ. Itaque Problema imposibile est quod era
B ostendendum.

Problema III.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium vna cum quadrato partis minoris æquale sit rectangulo sub tota, & parte maiore.

Resolutio.



SIt data recta linea B, quam oportet secare vt dictum est: Factum iam sit & pars maior esto A. ergo pars minor erit B -- A,
C atq; differentia partiũ erit A 2 -- B. Et quoniá rectangulum sub B, & A 2 - B vnà cum quadrato ex B - A æquale est rectangulo sub B, & A.

B in A 2 BQ ✠ BQ ✠ A Q -- B in A 2 æquabitur B in A hoc est A Q æquabitur B in A pars toti. quod est absurdum.

Problema igitur impossibile est, idque demonstrabimus hac ratione.

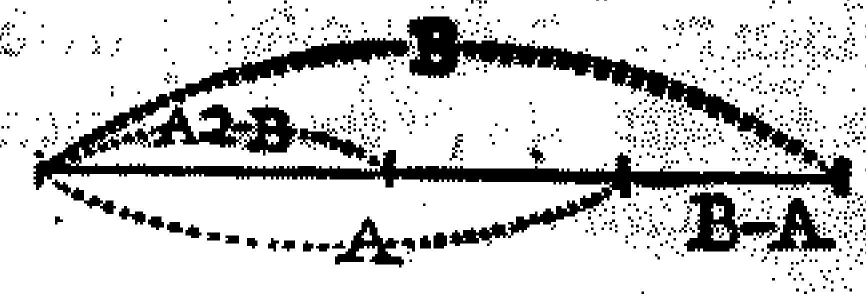
Sit si fieri potest recta A B secta in C, vt rectangulum sub tota A B & differentia partium A C, C B, vna cum quadrato partis minoris C B sit æquale rectangulo sub ipsa A B, & parte maiore A C. & sumatur C D æqualis C B. Quoniam igitur secta est A B in C, vt rectan-
D gulum B A D (hoc est sub tota & differentia partium) vna cum quadrato C B æquale sit rectangulo B A C; ipsum autem rectangulum B A D, vna cum quadrato C B, æquale est quadrato A C. hoc demonstratum est sub Theoremate primo libri primi, ideo quadratum A C, æquale erit rectangulo B A C pars toti; quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt rectangulum sub tota & differentia partium vna cum quadrato partis minoris æquale sit rectangulo sub tota & parte maiore. atque adeo Problema impossibile est. quod erat ostendendum.

Problema IV. A

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium æquale sit quadrato partis maioris.

Resolutio.

Sit data recta linea B secanda in duas partes, quemadmodum Problema iubet. Factum iam sit, & pars maior esto A, ergo minor pars erit B -- A atque differentia partium erit A 2 -- B. Et quoniam rectangulum sub tota, & differentia partium æquale est quadrato partis maioris. B



B in A 2 - B Q æquabitur A Q.

Addatur vtrique parti B Q, & auferatur A Q, vt cognita ab incognitis separentur. ergo

B in A 2 -- A Q æquabitur B Q

Et explicata æquatione.

B æquabitur A. totum videlicet parti, quod est absurdum.

Cum igitur Æquatio sit impossibilis; Problema quoque impossibile est, idque sic demonstrabimus.

Sit si fieri potest recta A B secta in C, ita vt rectangulum sub tota, & differentia partium æquale sit quadrato rectæ A C partis maioris. & fiat C D æqualis A C. ergo differentia partium A C, C B erit B D. Fiat quoque B E æqualis A B. C

Quoniam igitur rectangulum A B D, quod fit sub tota, & differentia partium ponitur æquale quadrato A C; ipsum autem rectangulum A B D, æquale est rectangulo D A B, minus quadrato A B; ideo rectangulum D A B, minus quadrato A B æquale erit quadrato A C. addatur vtrique parti quadratum A B. ergo rectangulum D A B, hoc est C A B bis (recta enim D A dupla est ipsius A C) seu quod idem est rectangulum C A E (est enim A E dupla ipsius A B) æquale erit quadratis A C, A B. deinde, auferatur vtrinque quadratum A C, ergo rectangulum C A E, minus quadrato A C, hoc est rectangulum A C E æquale erit quadrato A B. quod est absurdum; quadratum enim A B æquale est rectangulo A C E, vna cum quadrato C B. Non potest igitur secari recta linea, vt rectangulum sub tota, & differentia partium æquale sit quadrato partis maioris. Itaque Problema impossibile est. quod erat ostendendum. D

Pro-

A

Problema V.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota & dupla parte maiore æquale sit quadratis, quæ fiunt à tota, & à parte maiore.

Resolutio.

Sit data recta linea B secanda, vt petitur. Factum iam sit, & pars maior esto A. ergo minor pars erit B -- A, & quoniam rectangulum sub B, & A dupla, æquale est quadratis ex B & A

B in A 2 æquabitur B Q + A Q

B Auferatur vtrinque A Q, vt cognita ab incognitis separentur, ergo

B in A 2 -- A æquabitur B Q

Et explicata Æquatione B æquabitur A, totum parti, quod est absurdum. Problema igitur propositum impossibile est, idque, ita ostendetur.

Sit si fieri potest recta linea A B secta in partes A C, C B, quarum maior sit A C, ita vt rectangulum sub A B, & A C dupla, hoc est vt rectangulum B A C bis, æquale sit quadratis A B, A C,

& auferatur vtrinque quadratum A C, ergo rectangulum B A C bis, minus quadrato A C. æquale erit quadrato A B. sed rectangulum B A C bis, æquale est rectangulo B C A bis, vna cum quadrato A C bis, & consequenter

C rectangulum B A C bis minus quadrato A C æquale rectangulo B C A bis vna cum quadrato A C. ergo rectangulum B C A bis vna cum quadrato A C, æquale erit quadrato a B quod est absurdum. quadratum enim A B * æquale *4 secundi*

est rectangulo B C a bis, vna cum quadratis a C, C B. Non potest igitur secari recta, vt rectangulum sub tota, & dupla parte maiore æquale sit quadratis totius, & partis maioris. atque adeo Problema propositum impossibile est, quod erat ostendendum.

Problema VI.

Super data base triangulum constituere, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiæ crurum, atque differentia crurum sit dupla excessus,

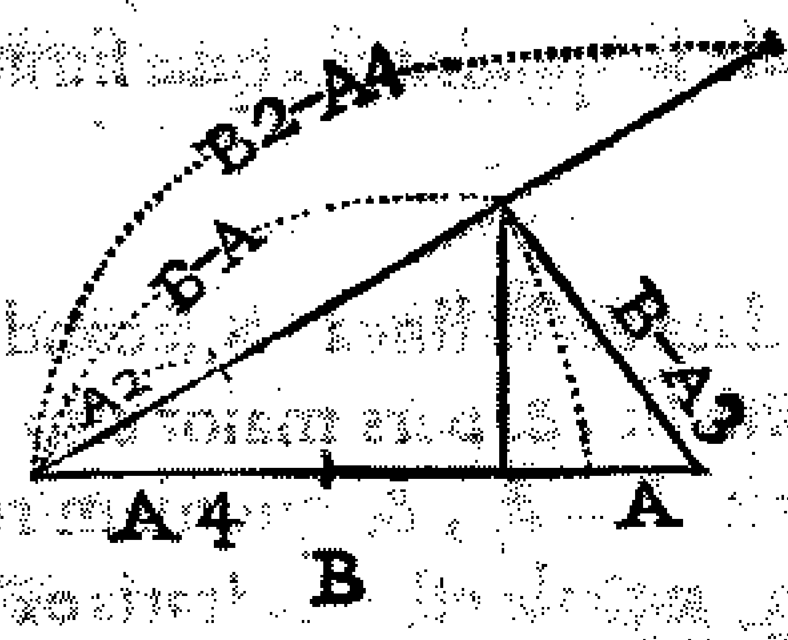
D **quo crus maius superatur à base.**

Resolutio.

Sit data basis trianguli, de quo quæritur B, & oporteat inuenire triangulum.

Factum iam sit, & excessus, quo basis superat crus maius esto a. ergo differentia crurum erit a 2, & consequenter differentiam segmentorum basis a 4. Et quoniã basis b superat crus maius excessu a; erit ipsum crus B -- a, sed crus maius superat crus minus excessu a 2. ergo crus minus erit B -- a 3; atque adeo aggregatum crurum erit B 2 -- a 4.

theor. 8 secundi Et quoniam est * vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, hoc est vt a 2 ad a 4, ita B ad B 2; erit B 2 aggregatum crurum; sed idem aggregatum crurum inuentum est esse B 2 -- a 4, ergo A

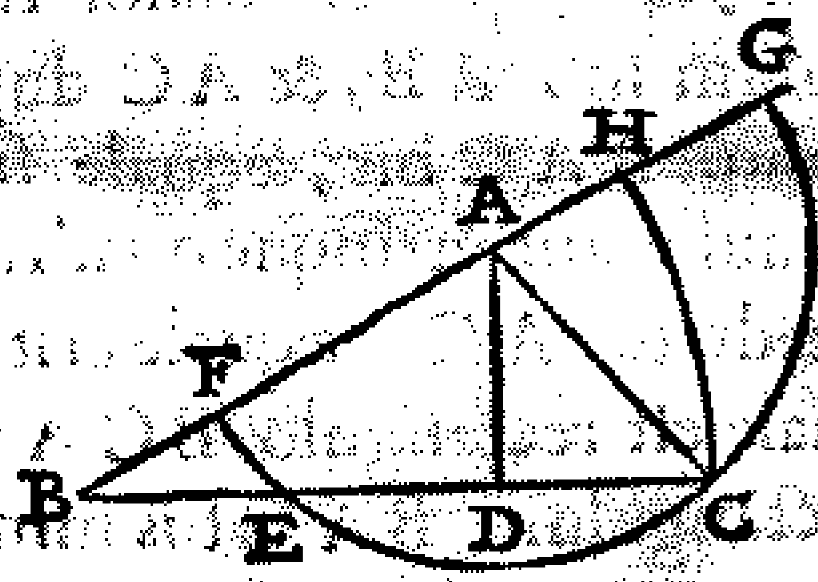


B 2 -- a 4 æquabitur B 2

Seu addito vtrobique a 4 B 2, æquabitur B 2 + a 4. quod est absurdum.

Cum igitur Æquatio sit impossibilis; Problema quoque impossibile est, idque ostendetur hac ratione. B

Sit triangulum a B C, in cuius basim B C, quæ sit maior crure maiore a B cadat perpendicularis a D. ex centro A, interuallo a C describatur circulus secans basim B C in E, crus vero a B in F, ipsumque productum in G. differentia igitur crurum a B, a C est B F: aggregatum vero B G, differentia autem segmentornm B D, D C est B E. Rursus centro B interuallo b C alius circulus describatur secans ipsam b G in H. excessus igitur, quo b C superat crus a b, erit a H. & sit si fieri potest b E dupla ipsius b F, itemque b F dupla ipsius a H. Quoniam igitur b C æqualis est compositæ ex b a, a H; ipsa vero a b æqualis compositæ ex a C, & b F, hoc est & a H dupla erit b C æqualis compositæ ex a C, & a H tripla; sed cum ipsa b C æqualis sit compositæ ex b a, & a H, dupla b E æqualis erit compositæ ex b a, a c, & quadrupla a H, hoc est ex b G & quadrupla a H, sed quoniam est, vt b F ad b E, ita b C ad b G, ipsa autem b E ponitur dupla ipsius b F: ideo & b G dupla erit ipsius b C hoc est erit b G æqualis duplæ b C; sed dupla b C ostensa est æqualis compositæ ex b G, & quadrupla a H. ergo b G æqualis erit compositæ ex eadem b G, & quadrupla a H. quod est absurdum. Non potest igitur inueniri triangulum, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiæ crurum. atque differentia crurum dupla excessus, quo basis superat crus maius. itaque Problema impossibile est. quod erat ostendendum. D



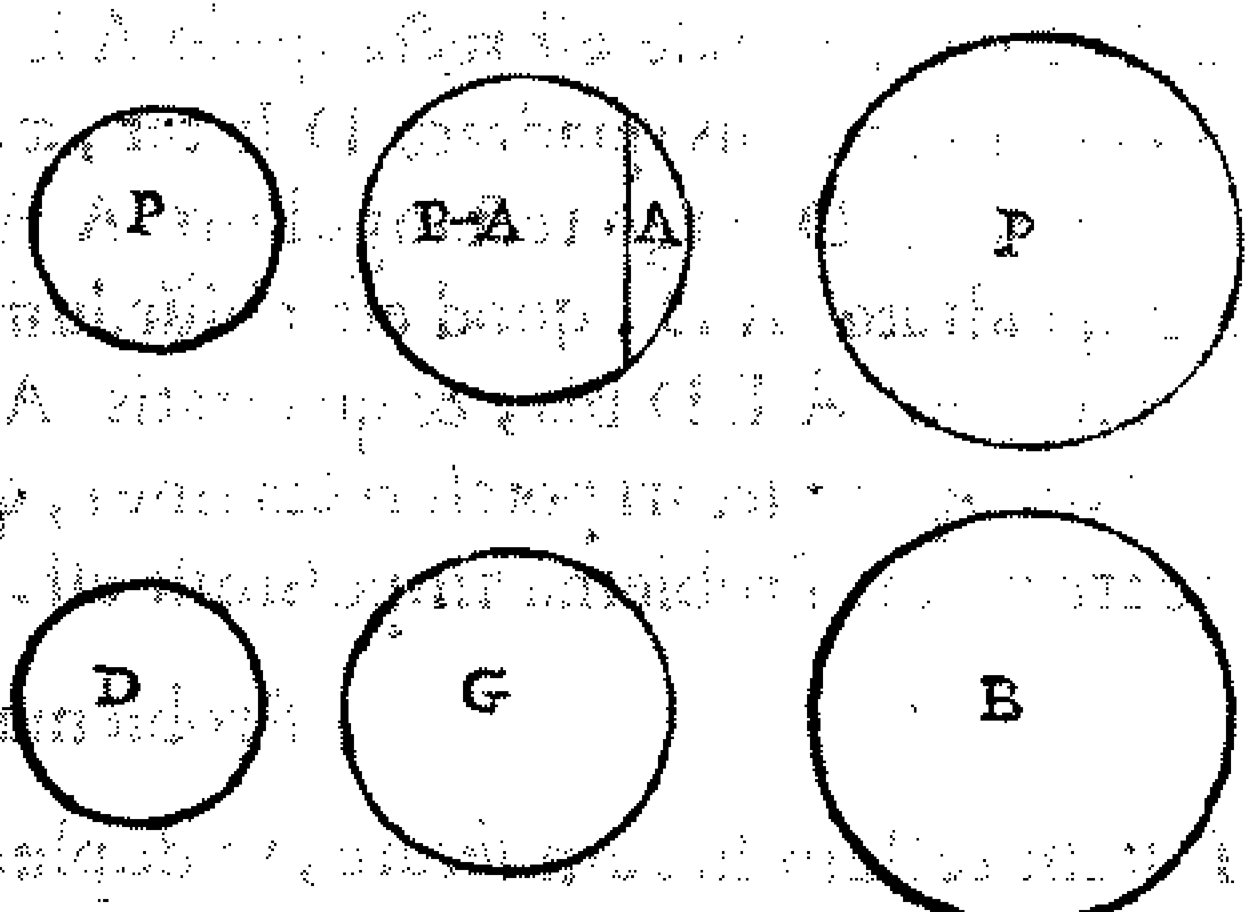
C

Problema VII.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota & dimidia differentia partium, vna cum rectangulo sub partibus æquale sit partium quadratis.

A

Resolutio.



Corol. 2 Probl. 1

SIt data recta linea B 2, quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit, & dimidia differentia esto A. ergo * B ✣ A erit pars maior, B -- A pars minor. Et quoniam rectangulum sub B 2, & A vna cum rectangulo sub B ✣ A, & B -- A æquale est quadratis ex B ✣

B A, & B -- A.

B 2 in A ✣ BQ -- AQ, æquabitur BQ 2 ✣ AQ 2

Dematur vtrinque AQ 2, & BQ. ergo

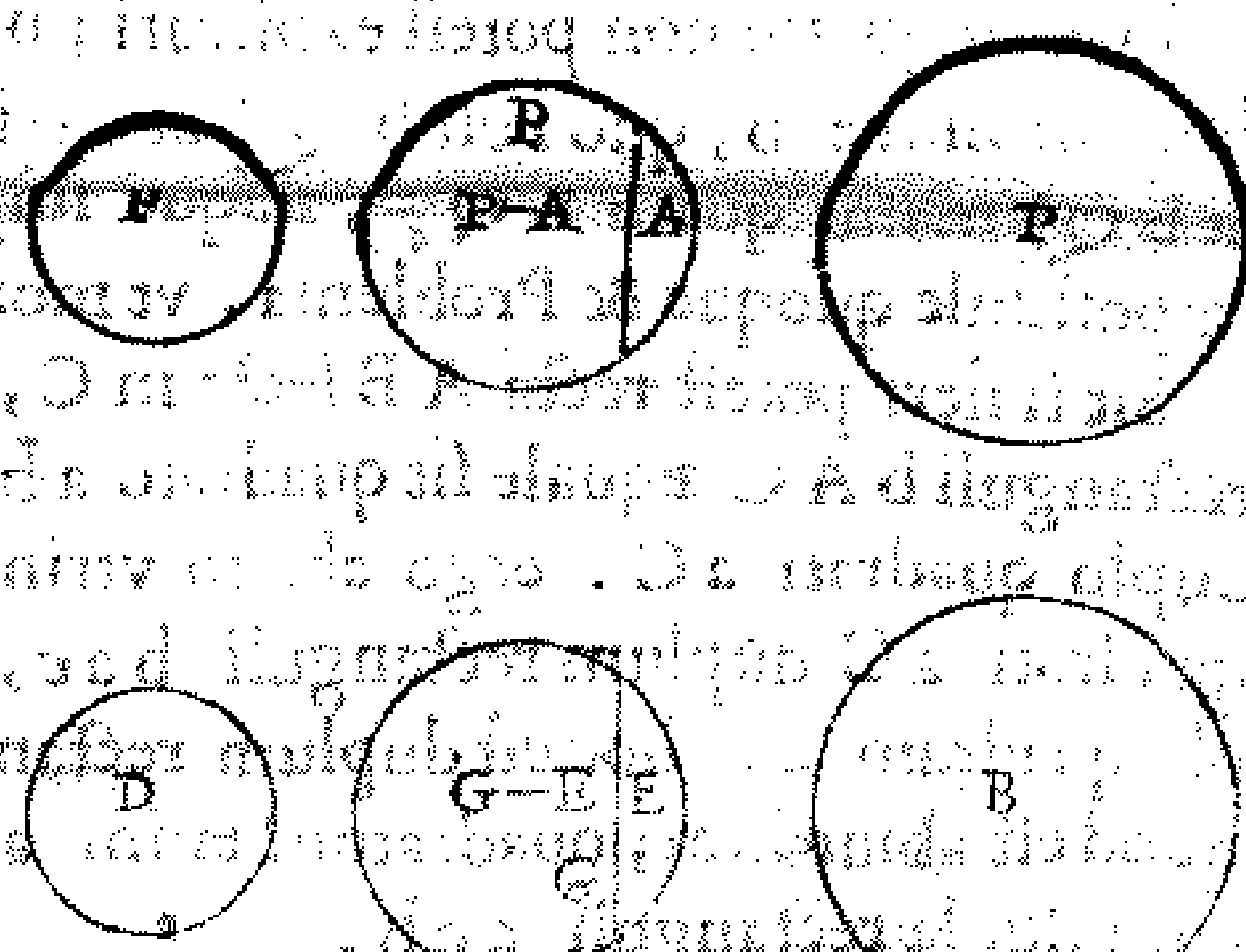
B 2 in A -- AQ 3 æquabitur BQ

& omnibus per 3 diuisis vt numerus quadratorum reducatur ad vnitatem

B $\frac{2}{3}$ in A -- AQ æquabitur BQ $\frac{1}{3}$.

Hæc Æquatio impossibilis est quoniam explicari non potest nam ad eam explicandam deberet BQ $\frac{1}{3}$ auferri ex BQ $\frac{1}{9}$ quod fieri non potest, maius enim est BQ $\frac{1}{3}$ quam BQ $\frac{1}{9}$. Cum igitur Resolutio incidat in Æquationem impossibilem, Problema quoque impossibile est. idque sic demonstrabimus.

C Sit si fieri potest recta AB secta in C, ita vt rectangulum sub tota AB & dimidia differentia partium AC, CB, vna cum rectangulo ACB sub partibus æquale sit quadratis partium AC, CB; & sumatur AE æqualis CB, ergo differentia partium AC, CB erit EC. quare secta EC bifariam in D, erit ED dimidia differentia partium AC, CB. Et quoniam rectangulum



D ACB, vna cum quadrato DC,* æquale est quadrato AD, dempto communi quadrato DC, rectangulum ACB æquale erit quadrato AD, minus quadrato DC, sed cum rectangulum sub AB, ED, vna cum rectangulo ACB, æquale sit quadratis AC, CB, sic enim ponitur AB secta, ideo si loco rectanguli ACB sumatur quadratum AD, minus quadrato DC, rectangulum sub AB, DE vna cum quadrato AD, minus quadrato DC, æquale erit quadratis AC, CB, hoc est * duplo quadratorum AD, DC. auferatur vtrinque duplum quadrati DC, & quadratum AD, ergo rectangulum AB, DE, minus 5 secundi

9 secundi

nus

nus quadrato D C, ter hoc eſt rectangulum A D E bis, minus quadrato D E **A**
ter æquale erit quadrato A D. ſed rectangulum A D E bis, minus quadrato D E bis, æquale eſt rectangulo A E D bis, & conſequenter rectangulum A D E bis, minus quadrato D E ter, æquale rectangulo A E D bis, minus quadrato E D. ergo rectangulum A E D bis, minus quadrato E D, æquale
4 ſecundi erit quadrato A D, quod eſt abſurdum. quadratum enim A D * æquale eſt rectangulo A E D bis, & quadratis A E, E D.

Non igitur ſecari poteſt recta linea, quemadmodum Problema fieri iubet. quare ipſum Problema impoſsibile eſt. quod erat oſtendendum.

Problema VIII.

Datam rectam lineam ſecare, vt duplum rectangulum ſub tota, & parte maiore; æquale ſit quadrato totius, & duplo quadrato partis maioris. **B**

Reſolutio.

Sit data recta linea B ſecanda vt petitur. Factum iam ſit & pars maior. eſto A. ergo pars minor erit B -- A. Et quoniam duplum rectangulum ſub B, & A æquale eſt quadrato ex b, & duplo quadrati ex A.

B in A 2 æquabitur b Q + A Q 2

Et ablato vtrinque A Q 2, vt cognita ab incognitis ſeparentur.

B in A 2 -- A Q 2 æquabitur B Q

& conſequenter b in A -- Q æquabitur b Q $\frac{1}{2}$ **C**

Hæc Æquatio non poteſt explicari; nam ad eam explicandam debet à quadrato dimidiæ b, quod eſt b Q $\frac{1}{4}$ auferri B Q $\frac{1}{2}$. quod fieri non poteſt cum ſit b Q $\frac{1}{2}$ maius quam b Q $\frac{1}{4}$, itaque impoſsibilis eſt hæc æquatio, atque adeo impoſſibile quoque & Problema, vt mox demonſtrabo.

Sit ſi fieri poteſt recta A B ſecta in C, vt duplum rectanguli b A C æquale ſit quadrato a b, vnà cum duplo quadrati a C. ergo ablato vtrinque duplo quadrati a C duplum rectanguli b a c, minus duplo quadrato a c, hoc eſt duplum rectanguli a c b; æquale erit quadrato a b.

4 ſecundi quod eſt abſurdum; quadratum enim a b * æquale eſt quadratis a c, c b, vna cum dupla rectanguli a c b. **D**

Non igitur poteſt ſecari recta linea, vt Problema iubet. itaque ipſum Problema impoſſibile eſt. quod erat oſtendendum.

Problema IX.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum triplum ſub partibus æquale ſit totius lineæ quadrato.

Re-

A Resolutio.

Sit data recta linea B, quam oportet secare, vt triplum rectangulum sub partibus æquale sit quadrato totius B.

Factum iam sit, & vna pars esto A. ergo altera erit B -- A. Et quoniam triplum rectangulum sub partibus æquale est quadrato totius B

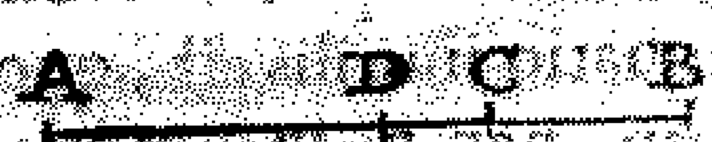
B in A 3 -- A q 3 æquabitur B q

Et omnibus per 3 diuisis, vt numerus quadratorum ad vnitatem deducatur. ergo

B in A -- A q æquabitur B q $\frac{1}{3}$

B Impossibilis est hæc Æquatio, quippe quæ non potest explicari, nam ad eam explicandam oportet à quadrato dimidiæ B quod est B q $\frac{1}{4}$ auferre B q $\frac{1}{3}$, quod quidem fieri non potest; maius enim non potest auferri a minore. Cum igitur Æquatio sit impossibilis; Problema quoque impossibile est; idque sic demonstrabitur.

Sit si fieri potest recta A B secta in C, ita vt triplum rectangulum A C B sub partibus æquale sit quadrato totius A B. ergo simplum rectangulum A C B sub æquale erit tertiæ parti quadrati A B, & ideo maius erit quarta parte eiusdem quadrati A B; hoc est maius erit quadrato dimidiæ



C A B, quæ sit A D. sed quadratum A B* æquale est rectangulo A C B, vna cum quadrato D C, ergo rectangulum A C B maius erit eodem rectangulo A C B, vna cum quadrato D C. quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt triplum rectangulum sub partibus æquale sit quadrato totius. itaque Problema impossibile est. quod erat ostendendum. *5 secundi

Simili ratione ostendetur omne Problema cuius Resolutio incidit in Æquationem impossibilem, impossibile esse.

Quomodo Problemata vana, seu nugatoria cognoscantur.

Caput tertium.

D Expositis quæ ad cognitionem Problematum impossibilium pertinent: sequitur vt dicam quomodo Problemata vana, seu nugatoria cognoscantur, ea enim Problematibus impossibilibus ex diametro opponuntur. nam Problema impossibile dicitur, cum id quod Problema iubet nulla ratione fieri potest. Problema autem vanum, seu nugatorium appellatur, cum id quod Problema fieri iubet quacumque ratione fiat Problemati satisfit, vel cum Problema infinitis modis construi potest.

Quotiescumque igitur Resolutio Problematis rite peracta incidit in Æquationem inutilem, argumentum est Problema vanum esse, ac nugatorium. Æquationem autem inutilem voco, cum in ea eadem magnitudines ijsdem ma-

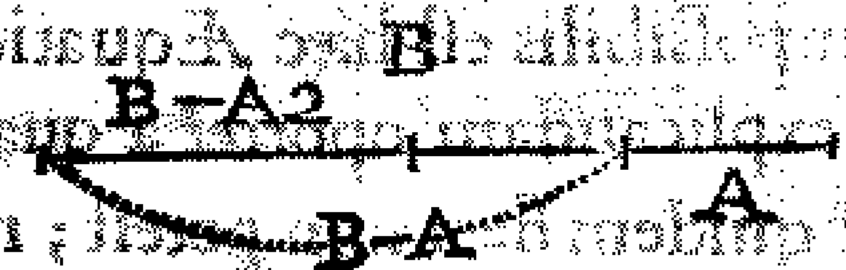
magnitudinibus adæquantur, vel etiam cum datæ magnitudines, datis tantum magnitudinibus expulso quæsito adæquantur; quia tunc nulla fit comparatio dati & quæsiti propter quem finem instituta est Æquatio. A

Problema I.

Datam recta lineam secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium, vnà cum quadrato partis minoris, æquale sit quadrato partis maioris.

Resolutio.

Sit data recta linea B, quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit & pars minor esto A, ergo maior erit B - A, atque differentia partium erit B - A 2. & quoniam rectangulum sub tota, & differentia partium, vna cum quadrato partis minoris, æquale sit quadrato partis maioris. B



B Q - B in A 2 + A Q æquabitur B Q + A Q - B in A 2

In hac Æquatione sunt ex vtraque parte eædem magnitudines. ergo ipsa Æquatio inutilis est, quod argumentum est Problema vanum esse, ac nugatorium. nempe vtcumque data recta linea secetur Problemati satisfieri; quod quidem verum est: demonstrauimus enim sub Theoremate primo libri primi, si recta linea secetur vtcumque rectangulum sub tota, & differentia partium, vnà cum quadrato partis minoris, æquale esse quadrato partis maioris. C

Sed illud ipsum ostendemus eadem ratione qua supra resolutum est.

Secetur recta A B vtcumque in C, & sit pars minor C B, cui æqualis sumatur C D, ergo differentia partium A C, C B erit A D. Dico rectangulum B A D vna cum quadrato C B æquale esse quadrato A C. Quoniam enim rectangulum B A D æquale est quadrato A B, minus rectangulo A B D, hoc minus rectangulo A B C bis, cum sit B D. dupla ipsius B C. Addatur vtrobique quadratum B C. ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato B C, æquale erit quadratis A B, B C, minus rectangulo A B C bis; sed & quadratum A C (cum recta A C sit differentia inter A B, B C)* æquale est quadratis A B, B C, minus rectangulo A B C bis, ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato B C, æquale erit quadrato A C, quod erat ostendendum.

*the. 5. primi D

Problema II.

Datam rectam lineam secare, vt quadrata partium æqualia sint quadrato differentiæ partium vna cum duplo sub partibus rectangulo.

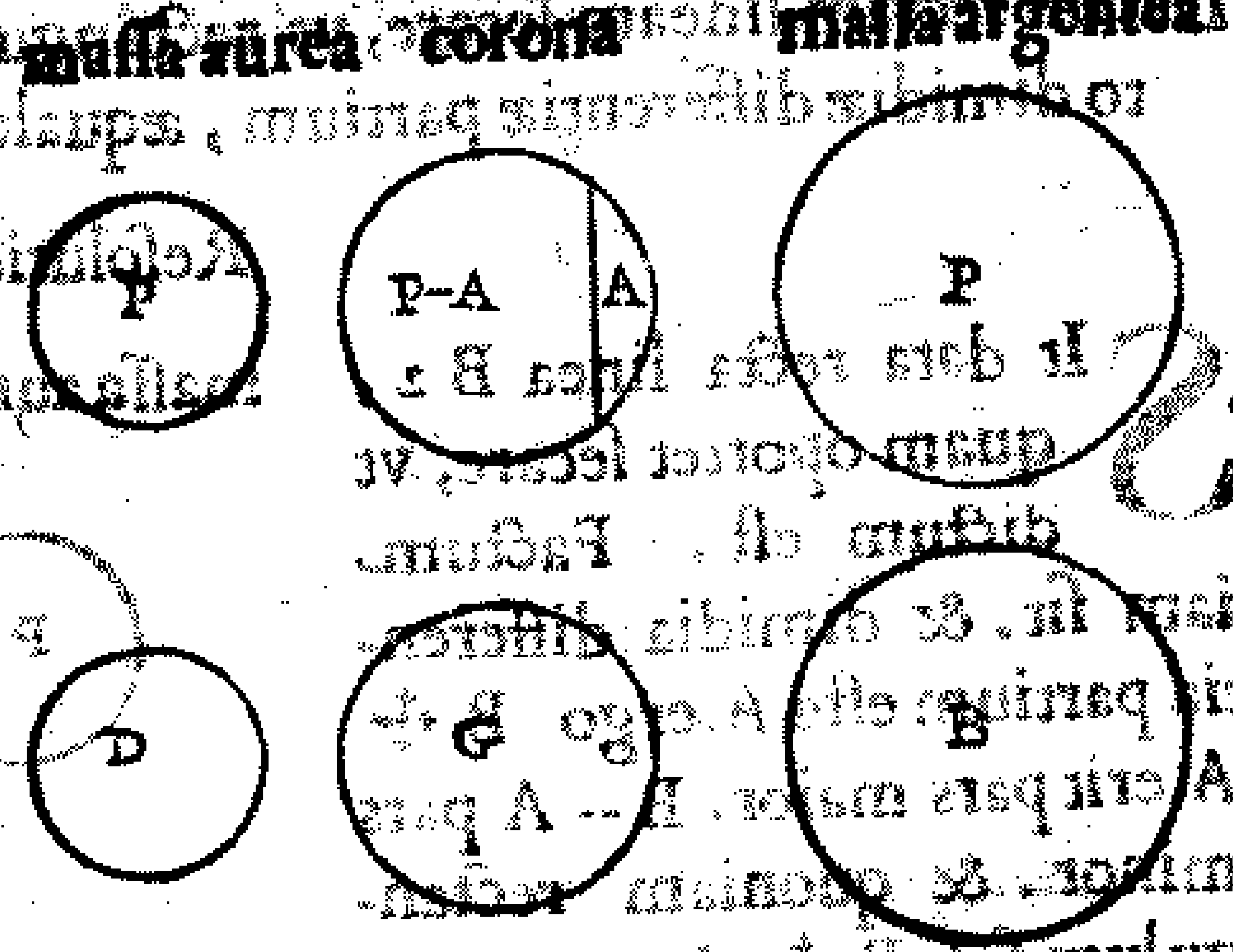
Re-

A

Resolutio.

Sit data recta linea B 2. quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit & dimidia differentia partium esto A ergo pars maior * erit B + A. pars vero minor B -- A.

massa aurea corona massa argentea



coi 2prob. libri primi

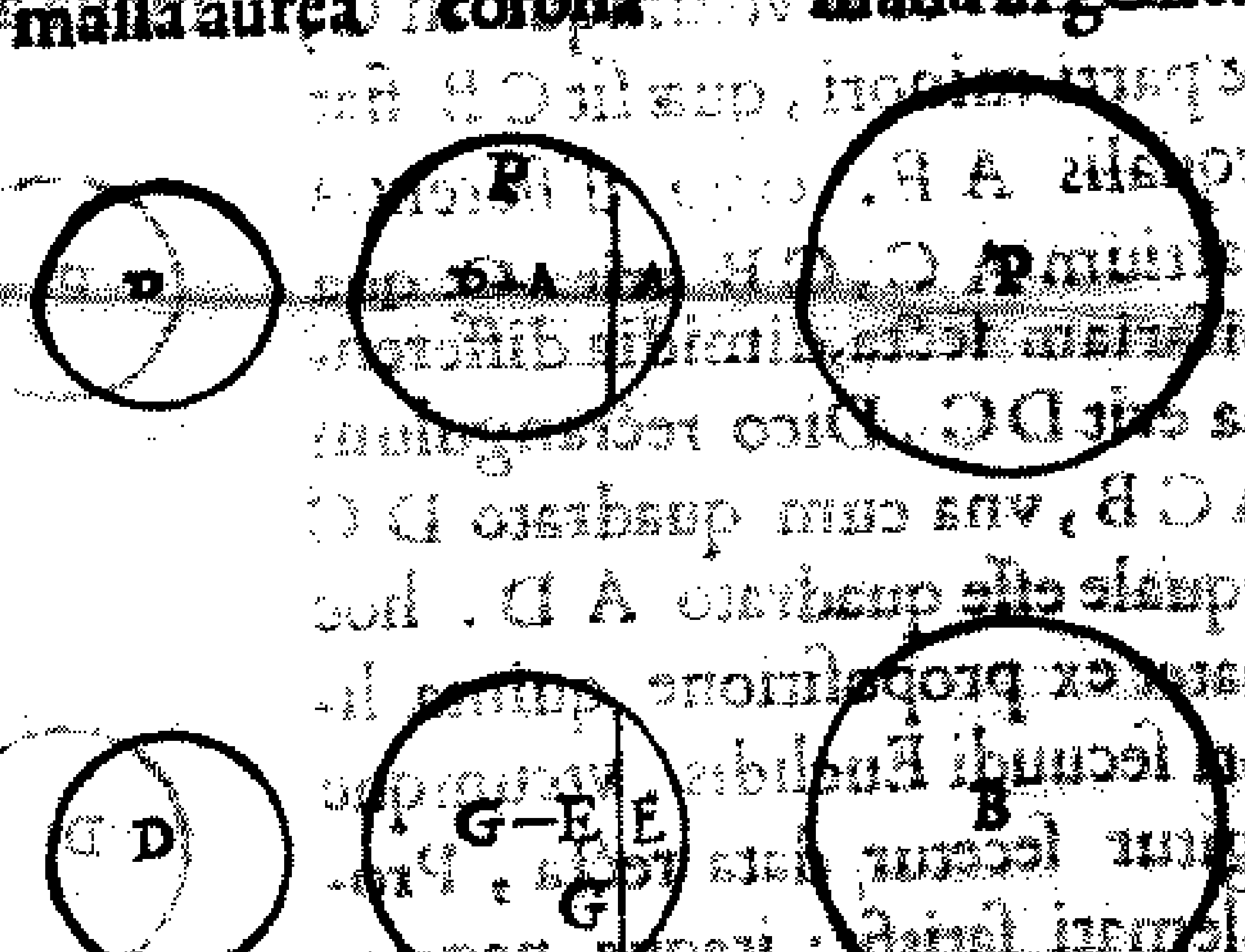
Et quoniam quadrata ex B + A & B -- A æqualia sunt quadrato ex A dupla, vna cum duplo rectanguli sub B +, & B -- A

B rectanguli sub B +, & B -- A

B Q 2 + A Q 2 æquabitur A Q 4 + B Q 2 - a Q 2 hoc est B Q 2 + A Q 2 æquabitur A Q 2 + B Q 2

Hæc Æquatio inutilis est, cum in ea eædem magnitudines iisdem magnitudinibus adæquentur. quod argumentum est Problema vanum esse, ac negatorium. idest vtcumque data recta secetur Problemati satisfieri, idque verum est. nam secta recta linea vtcumque, quadrata partium æqualia sunt quadrato differentiæ partium, vna cum duplo rectangulo sub partibus. Hoc licet ostensum sit sub Theoremate secundo lib. primi, tamen hic quoque ex ipsa Resolutione demonstrationem eliciam.

massa aurea corona massa argentea



C Secetur recta linea A B vtcumque in C. & parti minori, quæ sit C B fiat æqualis A E, ergo differentia partium A C, C B erit E C, quæ si secetur bifariam in D, erit dimidia differentia D C. Dico quadrata A C, C B æqualia esse quadrato E C, vna cum duplo rectanguli A C B. Quoniam enim A B secta est in partes æquales in D, & in partes inæquales in C

D quadratum A D * æquale rectangulo A C B, vna cum quadrato D C. & consequenter duplum quadrati A D æquale duplo rectanguli A C B, vna cum duplo rectanguli A C B, vna cum duplo quadrati A C, addito communi duplo quadrati D C, duplum quadratorum A D, D C æquale erit duplo rectanguli A C B; vna cum quadruplo quadrati D C, hoc est vna cum quadrato E C. sed duplum quadratorum A D, D C * æquale est quadratis A C, C B, ergo quadrata A C, C B æqualia erunt duplo rectanguli A C B vna cum quadrato E C. quod erat ostendendum.

5 secundi

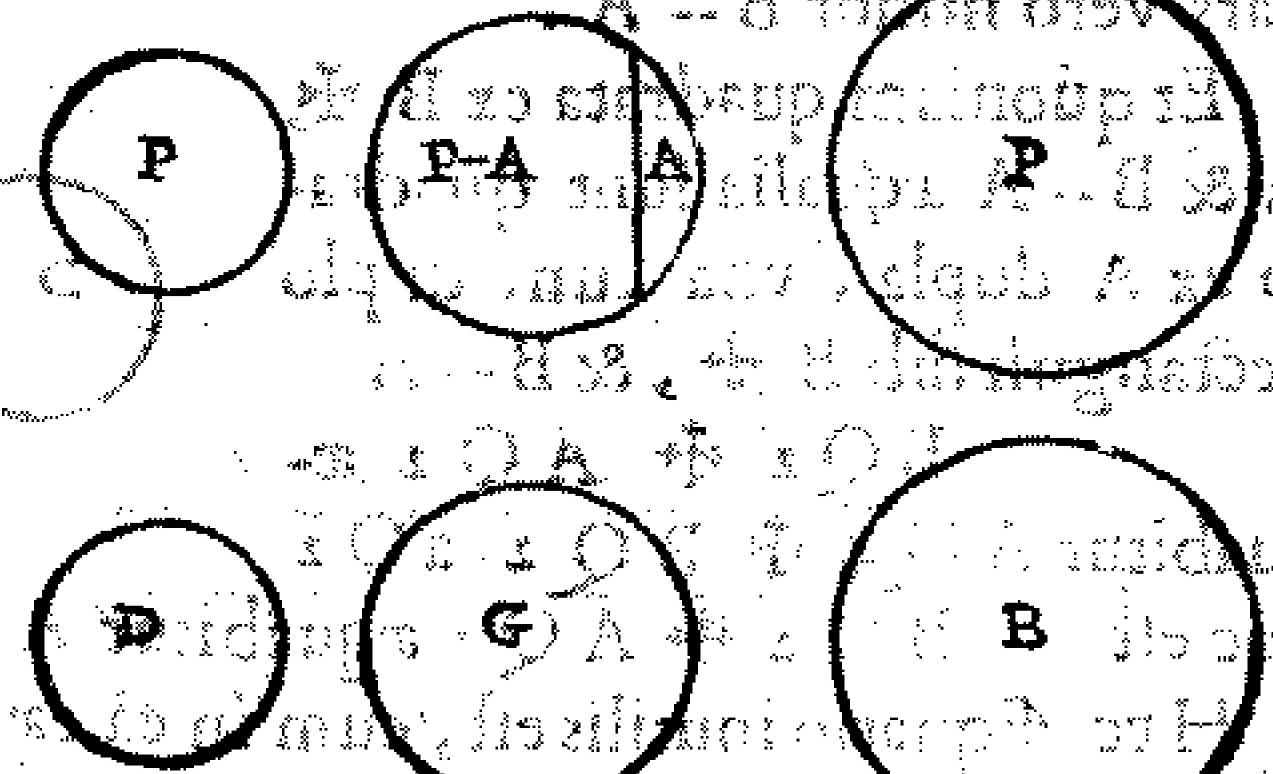
9 secundi

Problema III.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus vna cum quadrato dimidiæ differentiæ partium, æquale sit quadrato semissis datæ. A

Resolutio.

massa aurea corona massa argentea.



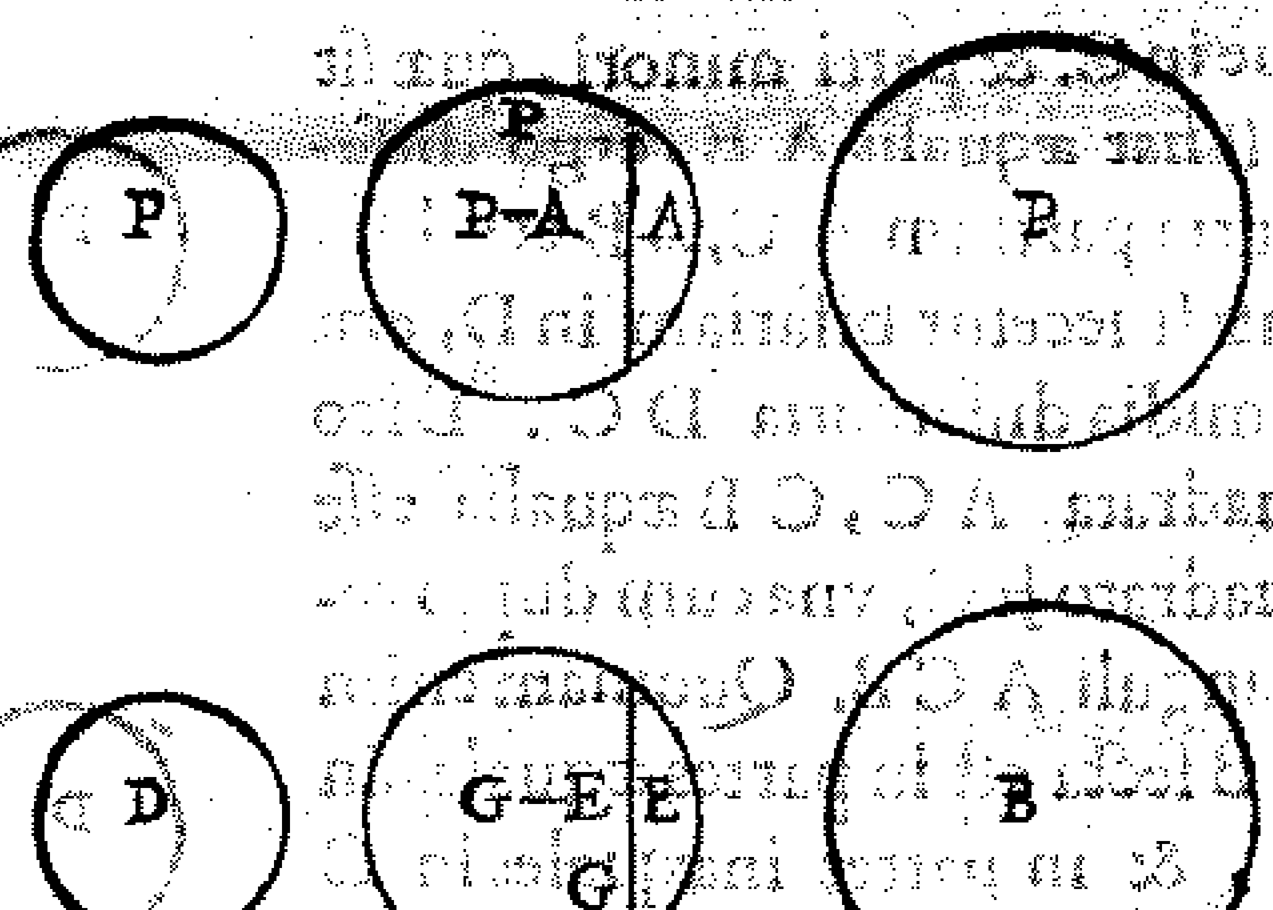
Sit data recta linea B 2, quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit. & dimidia differentia partium esto A. ergo * B + A
ex. 2. probl. 7 lib. primi
A erit pars maior. B -- A pars minor. & quoniam rectangulum sub B + A, & -- A, vna cum quadrato ex A æquale est quadrato ex B B

B Q -- A + A Q æquabitur B Q, hoc est B Q æquabitur B Q.

Cum igitur in hac Æquatione eadem magnitudo eidem magnitudini æquetur, ipsa Æquatio inutilis est, & ideo Problema vanum, ad negatorium. vtcumque enim data recta secetur Problemati satisfiet. idque sic demonstrabo.

Secetur A B vtcumque in C, & parti minori, quæ sit C B fiat æqualis A E. ergo differentia partium A C, C B. erit E C, qua bifariam secta, dimidia differentia erit D C. Dico rectangulum A C B, vna cum quadrato D C æquale esse quadrato A D. hoc patet ex propositione quinta libri secuudi Euclidis. vtcumque igitur secetur data recta, Problemati satisfit: itaque negatorium est huiusmodi Problema, quod erat ostendendum. C

massa aurea corona massa argentea



D

Problema IV.

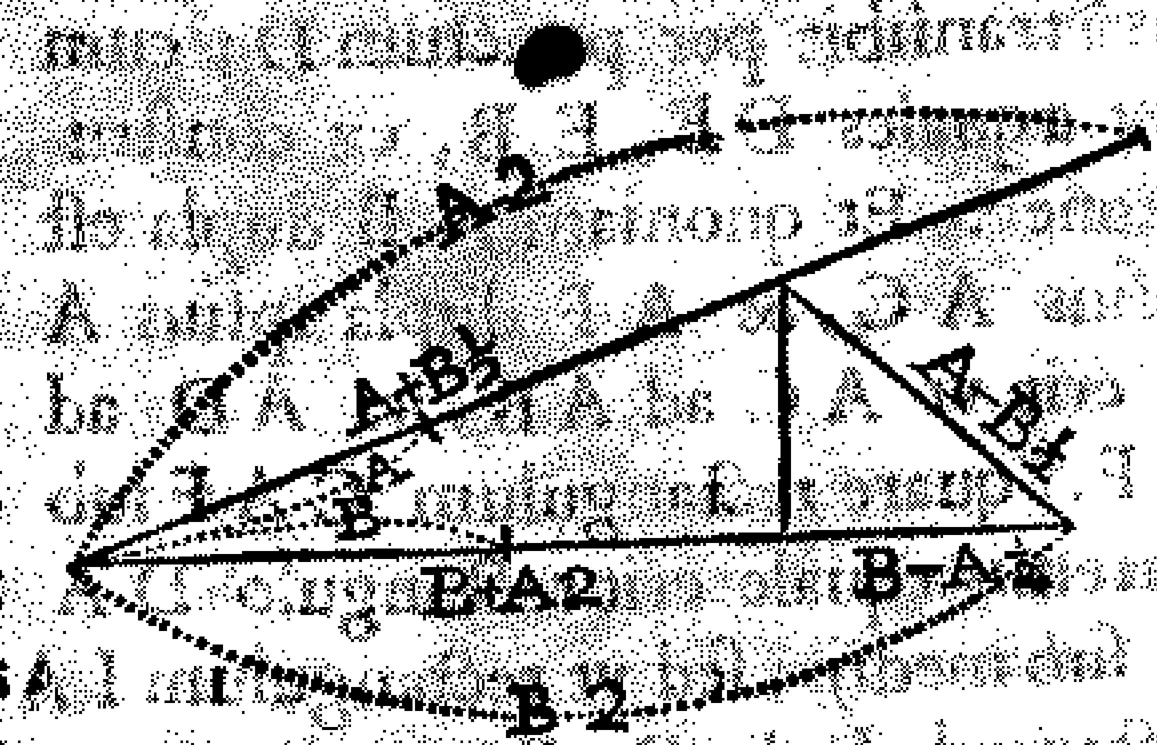
Super data base triangulum constituere, quod habeat differentiam crurum dimidiæ basi æqualem.

Re-

Reſolutio.

A

SIt data baſis B 2, ſuper qua oportet triangulum conſtituere, cuius crurum differentia ſit æqualis dimidiæ baſi. Factum iam ſit. ergo differentia crurum erit B. è vertice autem trianguli cadat perpendicularis, in baſim ſecans ipſam baſim in duo ſegmenta, quorum differentia eſto A. ergo ſegmentum maius erit $B + A \; \frac{1}{2}$, ſegmentum vero minus



B $B - A \; \frac{1}{2}$. & quoniam eſt, vt * differentia crurum trianguli ad differentiam ſegmentorum baſis, ita baſis ad aggregatum crurum, hoc eſt vt B ad A, ita B 2 ad A 2, ergo A 2 erit aggregatum crurum, ſed differentia eorundem crurum eſt B; ergo crus maius erit * $A + B \; \frac{1}{2}$ crus autem minus $A - B \; \frac{1}{2}$. & quoniam quadratum cruris maioris * æquale eſt quadratis, quæ fiunt à ſegmento maiori, & à perpendiculari. ſi à quadrato cruris maioris auferatur quadratum ſegmenti maioris, remanebit quadratum perpendicularis. à quadrato igitur ex $A + B \; \frac{1}{2}$ quod eſt $AQ + BQ \; \frac{1}{4} + B$ in A, auferatur quadratum ex $B + A \; \frac{1}{2}$ quod eſt $BQ + AQ \; \frac{1}{4} + B$ in A. remanebit $AQ \; \frac{1}{4}$ $BQ \; \frac{1}{4}$ pro quadrato perpendicularis.

Corol. ii prob. i lib. i

ibid.

xlvij primi

C Æque quoniam quadratum cruris minoris * æquale eſt quadratis, quæ fiunt à ſegmento minori, & à perpendiculari; ſi à quadrato cruris minoris auferatur quadratum ſegmenti minoris, remanebit quadratum perpendicularis, à quadrato igitur ex $A - B \; \frac{1}{2}$, quod eſt $AQ + BQ \; \frac{1}{4} - B$ in A, auferatur quadratum ex $B - A \; \frac{1}{2}$, quod eſt $BQ + AQ \; \frac{1}{4} - B$ in A; remanebit $AQ \; \frac{1}{4} - BQ \; \frac{1}{4}$ pro quadrato perpendicularis; ſed quadratum eiuſdem perpendicularis inuentum eſt eſſe $AQ \; \frac{1}{4} - BQ \; \frac{1}{4}$. ergo

ibid.

$$AQ \; \tfrac{1}{4} - BQ \; \tfrac{1}{4} \text{ æquabitur } AQ \; \tfrac{1}{4} \; BQ \; \tfrac{1}{4}.$$

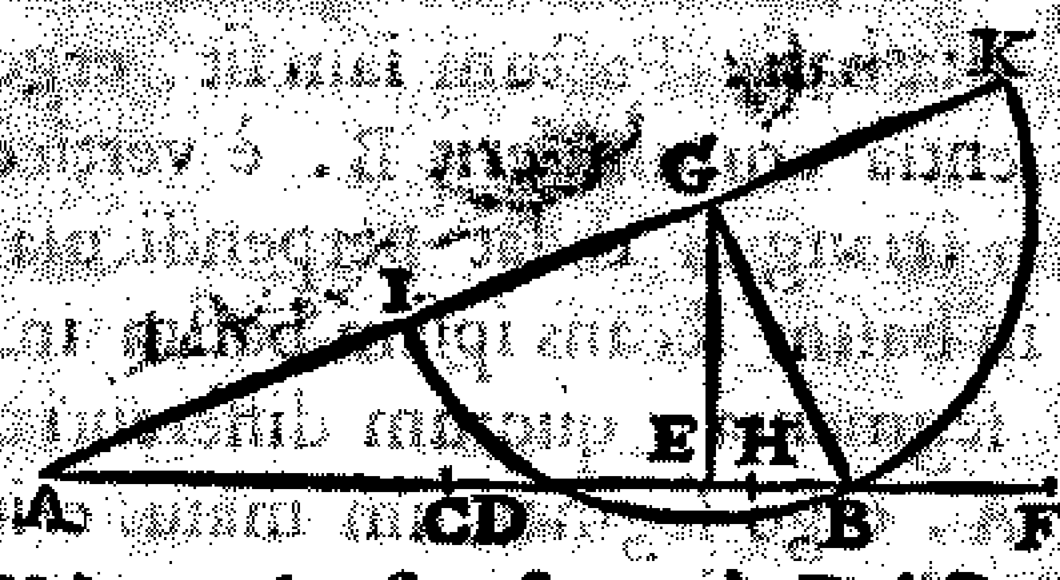
D Inutilis eſt igitur hæc Æquatio, dum ex vtraque parte eædem magnitudines exiſtant. atque adeo Problema vanum, ac nugatorium. nam ſuper eadem baſe innumera triangula conſtituentur, in quibus differentia crurum æqualis erit dimidiæ baſi, vt in hac quæ ſequitur compoſitione perſpicuum erit.

Compoſitio.

SIt data baſis A B, ſuper qua conſtituere oportet triangulum, vt differentia eius crurum ſit æqualis dimidiæ baſi. Secetur A B bifariam in C, & ſumatur A D maior, quam A C, & reliqua D B ſecetur bifariam, & ad rectos angulos in E à recta G E, & duplicetur A D in F, & ſecetur C F bifariam in H, & centro A interuallo A H deſcribatur arcus ſecans rectam E G in G, & connectantur G A, G B. Dico triangulum G A B, G A B, esse de quo quæritur. A

Centro enim G interuallo G D describatur circulus secans crus A G in I, productum vero in K. is circulus* transibit per punctum D; cum sint æquales D E, E B, ex constructione. Et quoniam A B dupla est ipsius A C, & A F dupla ipsius A D erit vt A C ad A B, ita A D ad A F. quare rectangulum C A F sub extremis æquale erit rectangulo D A B sub medijs; sed vt rectangulum I A K* æquale est rectangulo D A B. ergo rectangula I a k, C a F æqualia erunt, sed rectangulum quidem I a k æquale est quadrato a I, & rectangulo a I K, hoc est & rectangulo a I G bis; rectangulum vero C a F æquale est quadrato a C, & rectangulo a C F, hoc est & rectangulo A C H bis. ergo quadratum a I, & rectangulum a I G bis, æqualia erunt quadrato a C, & rectangulo a C H bis. B

3 tertij



Et quoniam æquales sunt a G, a H, ex constructione, erunt æqualia & eorum quadrata; sed quadrato a G æqualia sunt quadrata a I, I G, & rectangulũ a I G bis; quadrato autem a H, æqualia sunt quadrata a C, C H, & rectangulũ a C H bis, ergo quadrata a I, I G, & rectangulum a I G bis, æqualia erunt quadratis a C, C H. & rectangulo a C H bis, sed quadratum a I, & rectangulum a I G bis, ostensa sunt æqualia quadrato a C, & rectangulo a C H bis. ergo & reliquum quadratum I G reliquo quadrato C H æquale erit. vnde & recta I G æqualis rectæ C H, quare cum sint æquales a G, a H, erit & reliqua a I æqualis reliquæ a C. hoc est dimidiæ a B. Ad datam igitur basim a B constitutum est triangulum G a b, cuius crurum differentia æqualis est dimidiæ basi, quod erat faciendum. C

Scholium.

In compositione Problematis sumpta est in base A B, recta a D pro differentia segmentorum a E, E b ad libitum solummodo maior est, quam a C dimidia basis, quoniam differentia segmentorum basis trianguli maior est, quam differentia crurum, vt demonstrauimus in libro secundo Lem. primo ante Compositionem Problematis tertij. differentia autem crurum debet esse æqualis dimidiæ basi, ex iussu Problematis, & ita constitutum est triangulũ, quale Problema postulat. Itaque innumera triangula super eadem base A b possunt constitui, vt habeant eamdem conditionem, quare huiusmodi Problema vanum est ac nugatorium. D

Problema V.

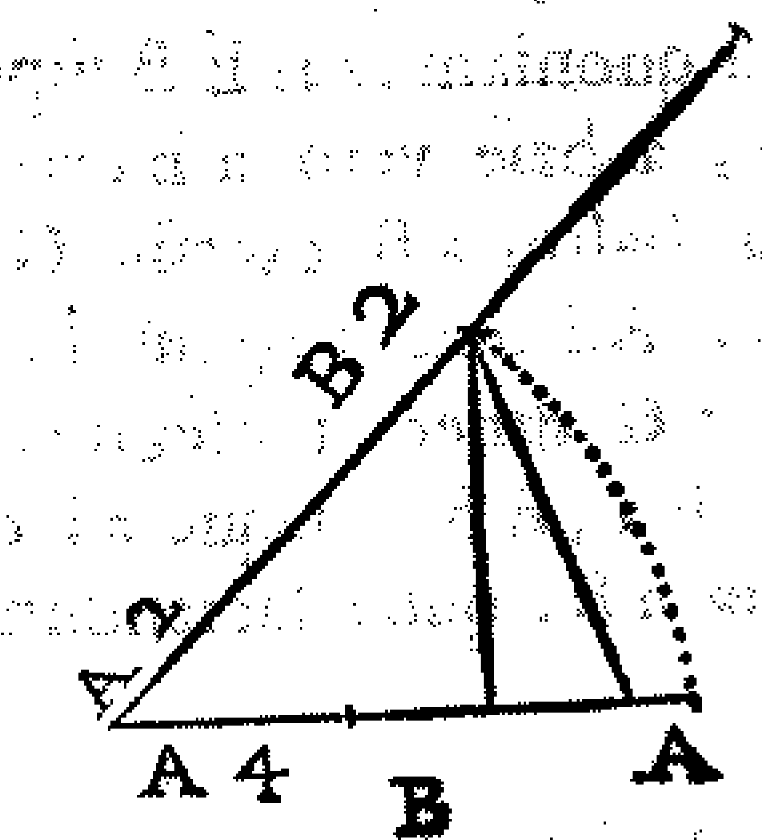
Super data base triangulum constituere, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiæ crurum, ipsaq. differentia crurum sit dupla excessus, quo crus maius superat basim.

Re-

A

Resolutio.

Sit data basis trianguli B, & oporteat iussum facere. Ponatur constitutum esse triangulum; & differentia qua crus maius superat basim esto A. ergo differentia crurum erit A 2; differentia vero segmentorum basis A 4. Et quoniam crus maius superat basim B excessu A, erit crus maius B + A, & consequenter crus minus B -- A; differunt enim crura per A 2, atque adeo aggregatum crurum erit B 2. sed re-
B ctangulum sub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem, * æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base, ergo



Th. 6 secundi

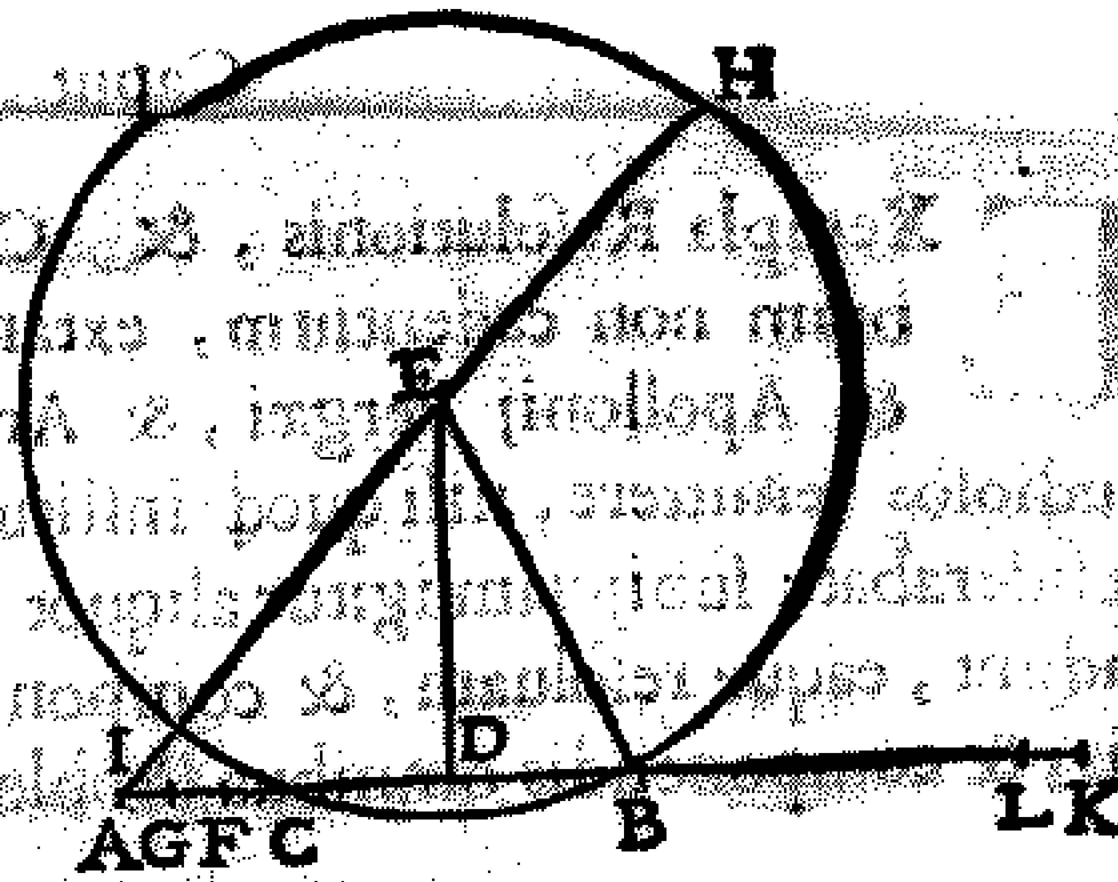
B in A 4 æquabitur B in A 4

Inutilis est hæc Æquatio cum in ea eædem magnitudines, ijsdem magnitudinibus æquentur. quare pronunciabimus Problema propositum esse nugatorium, quod quidem verum est. nam super eadem base innumera triangula possunt constitui habentia conditiones, quas Problema præscribit, vt in compositione quæ sequitur manifestum fiet.

C

Compositio.

Sit data basis AB, super qua constituendum est triangulum habens differentiam segmentorum basis duplam differentiæ crurum, atque differentiam crurum duplam excessus, quo crus maius superat basim. Abscindatur à data base AB quæcumq; portio AC, reliqua vero Cb secetur bifariam in D, & ex D erigatur perpendicularis indefinita DE, rursus secetur AC bifariam in F, similiter & a f
D secetur bifariam in G, & centro b interuallo bG describatur arcus secans perpendicularem DE in E, & connectantur EA, Eb. Dico in triangulo EAb differentiam segmentorum AD, Db duplam esse differentiæ crurum EA, Eb. atque differentiam crurum duplam excessus, quo crus maius EA superat basim Ab. Centro enim E interuallo Eb describatur circulus secans crus AE in I, ipsumq. productũ in H, & duplicetur a b in K, & sumatur k L æqualis a G. ergo reliqua b L æqualis erit b G, vel b E, atque adeo tota GL æqualis diametro IH, sed ipsa GL æqualis est Fk; cum sint GF, LK æquales. ergo & FK æqualis erit IH, est autem



co. 36 tertij & rectangulum I A H * æquale rectangulo C A B, hoc est duplo rectanguli A
the. 5 lib. 2 F a B, seu quod idem est rectangulo F a k, quare A I * æqualis erit a F. itaque A C differentia segmentorum A D, D B, dupla erit A I differentiæ crurum E A, E B.

Et quoniam crus E B superatur à crure quidem E A excessu A I, hoc est A F, à base vero a B excessu a G ex constructione. ideo crus E a superabit basim a B excessu G F, cuius dupla est a F, vel a I differentia crurum. Ad datam igitur basim a B constitutum est triangulum E a B, in quo a C differentia segmentorum a D, D B dupla est a I differentiæ crurum E a, E B, ipsaque a I dupla est excessus, quo crus maius E a superat basim a B. quod faciendum erat. B

Scholium.

In hac Problematis Compositione sumpta est in base a B recta a C pro differentia segmentorum a D, D B quanta libuit, & constitutum est triangulum conditiones habens, quas Problema exigit; itaque innumera triangula possunt super eadem base constitui, cum in data base a B sumpto puncto C vbicumque, cæterisque, vt supra peractis, Problematis satisfiat; quare Problema huiusmodi vanum est, ac nugatorium. Atque simili ratione ostendemus omne Problema, cuius resolutio rite peracta incidit in Æquationem inutilem vanum esse, ac nugatorium.

De Resolutione, & Compositione Problematum, quæ sub Algebram non cadunt. C

Caput quartum.

EXempla Resolutionis, & Compositionis Problematum sub Algebram non cadentium, extant multa in libris Pappi Alexandrini, & Apollonij Pergæi, & Archimedis; quare potui ad ea exempla studiosos remittere, nisi quod institutio mei operis hanc quoque sui partem desiderabat; subijciam igitur aliquot Problemata, quæ sub Algebram non cadunt, eaque resoluam, & componam, Methodo, qua veteres in resoluendis, & componendis omnibus Problematibus vtebantur. D

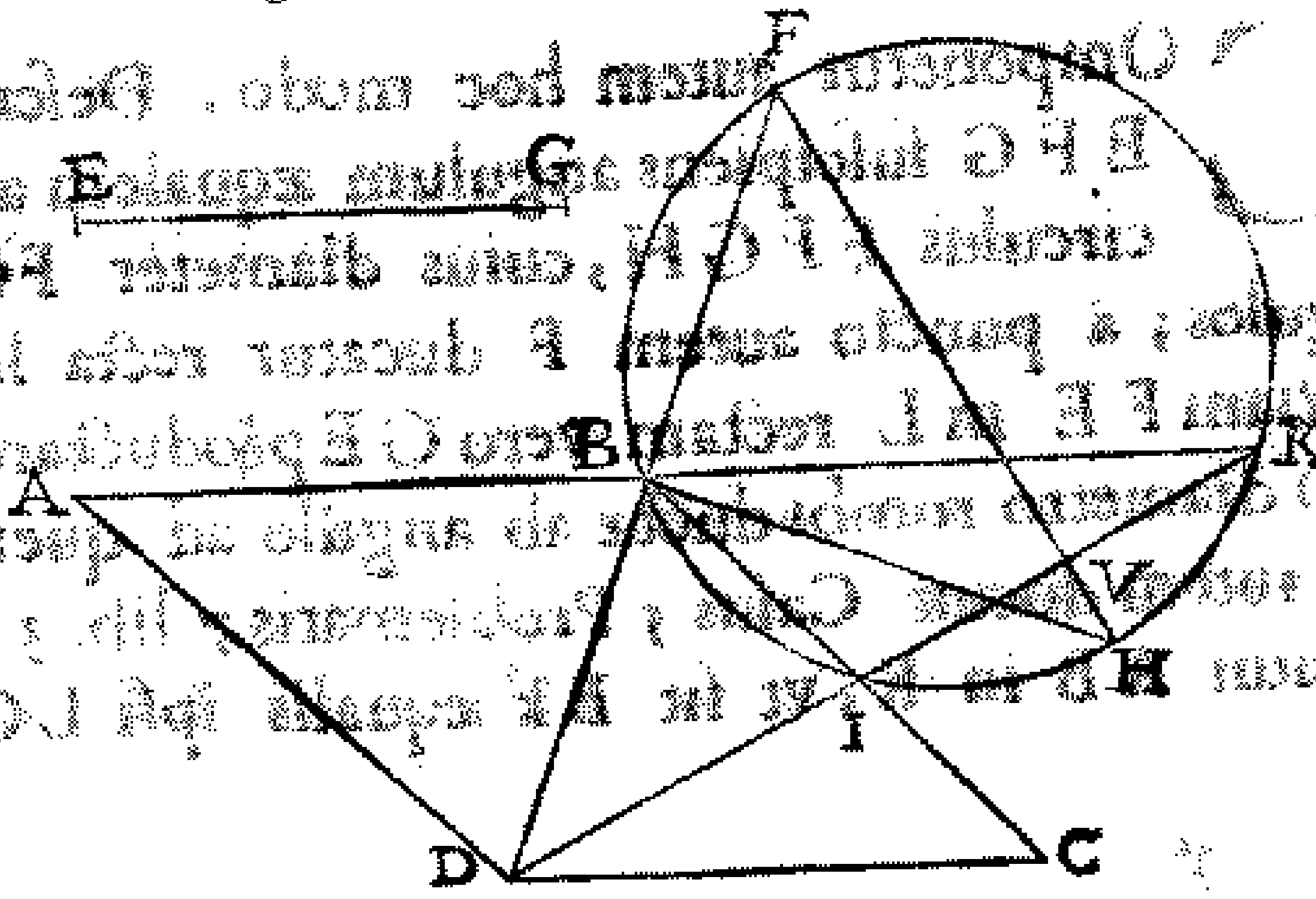
Problema I.

Rombo dato, & vno latere producto aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quæ ad oppositum angulum pertingat.

Resolutio.

SIt datus rombus A B C D, data autem recta linea E G, & producatur A B indefinite in k. Oportet sub angulo C b K aptare rectam lineam ipsi E G æqualem, ita vt ad oppositum angulum A D C pertingat.

A Sit iam factum ducta nimirum recta D I k sit I K æqualis E G, & circa triangulum B I K describatur circulus quem D B diameter rombi producta secet in F. deinde secetur angulus C B k bifariam à recta B H secante circulum in H, & connectatur F H.



Quoniam igitur B D diameter rombi secat angulum A B C bifariam, angulus D
B B C æqualis erit angulo A B D; sed & angulus F B k, æqualis est angulo A B D; sunt enim ad verticem, ergo angulus D B C æqualis erit angulo F B k; sed & anguli C B H, k B H sunt æquales, ex constructione. ergo per additionem æqualium æqualibus anguli F B H, D B H, æquales erunt, ac proinde recti; quare semicirculus erit F B, I H, atque adeo recta F H diameter circuli. & cum sint æquales anguli I B H, K B H, ex constructione; erunt æquales & circumferentiæ I H, H K quibus ipsi anguli insistunt, & consequenter æquales erunt & reliquæ circumferentiæ I F, k F, ac proinde æquales & anguli F H I, F H k æqualibus circumferentijs insistentes. est autem
C & recta I H æqualis rectæ H K, cum sint æquales circumferentiæ I H, H K, & V H communis vtrique triangulo I V H, K V H, ergo erunt * æquales, & I V, V k. quare diameter F H secat rectam I K in V ad rectos angulos. — in figura, sunt intelligendæ I H H K lineæ ductæ

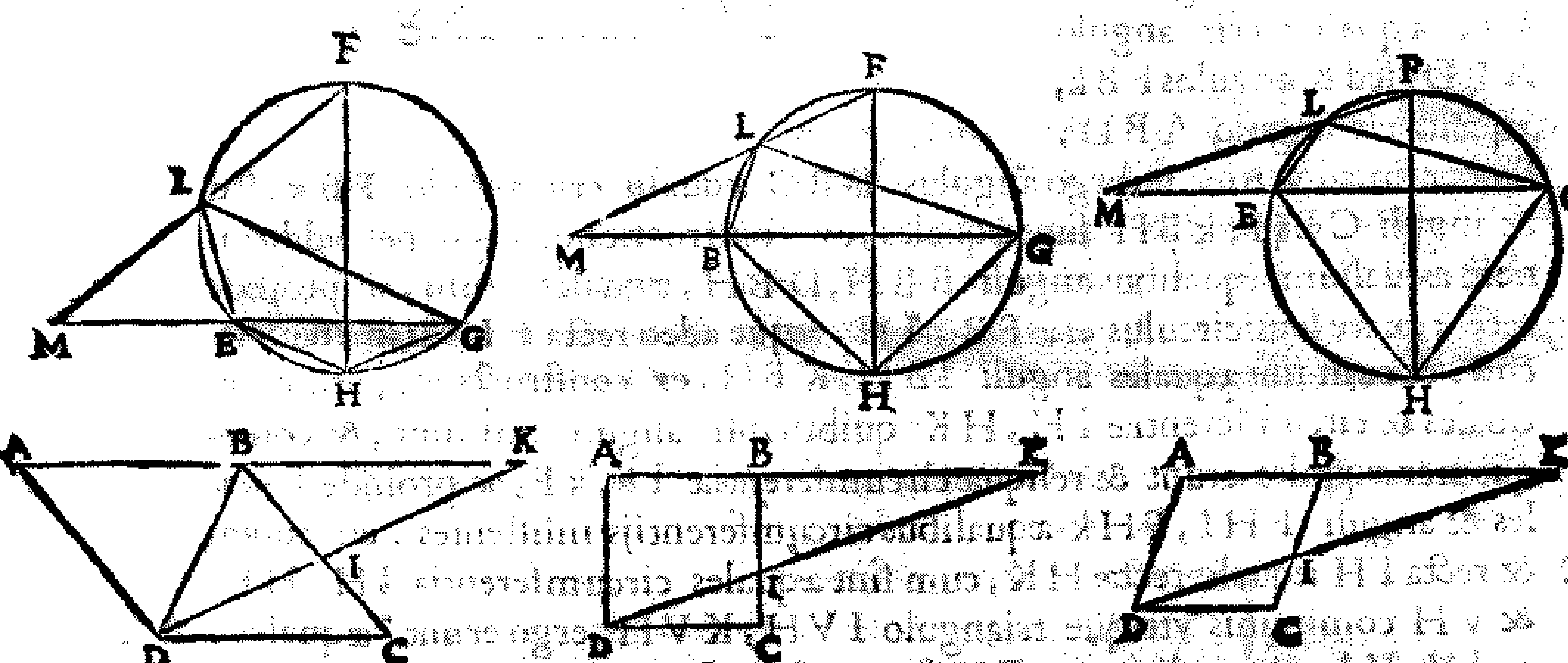
& quoniam recta I k data est magnitudine, cum sit æqualis datæ E G; intelligatur ipsa I K, positione quoque data; nulla positione rombi dati habita ratione, tanquam non esset positione datus, hoc modo liberum est datæ rectæ lineæ E G æqualem alteram I K. positione & magnitudine datam exponere. Quoniam igitur data est I k positione, & magnitudine, & datus angulus I B K magnitudine, cum sit angulus externus dati rombi, portio circuli I B k erit * positione, & magnitudine data; quare & totus circulus, sed & diameter F H * datur positione, siquidem secat rectam I k positione, & — def. 8. dat. — 29 dat.
D magnitudine datam bifariam, & ad angulos rectos, ergo * dabitur & punctum F, cum sit in circumferentia circuli positione dati. — 25 dat.

Ducatur autem à puncto F recta F B D secans circumferentiam in B; rectam vero k I productam in D, ita vt B D sit æqualis diametro rombi ductæ ab angulo, ad quem applicata pertingit; hoc autem fieri posse demonstrauimus lib. 3. Probl. 7 casu, ergo ipsa F D positione data erit atque * dabitur & punctum B, cum sit in circumferentia circuli positione dati, sed datur & punctum K, cum sit in extremitate rectæ I k positione, & magnitudine datæ, ergo dabitur & recta B K. — 25 dat.

Com-

Compositio. A

COmponetur autem hoc modo. Describatur in E G portio circuli E F G suscipiens angulum æqualem angulo C B K, & compleatur circulus E F G H, cuius diameter F H secet ipsam E G ad rectos angulos; à puncto autem F ducatur recta linea F L M secans circumferentiam F E in L rectam vero G E productam in M, ita vt L M sit æqualis B D diametro rombi ductæ ab angulo ad quem aptanda pertingere debet; hoc autem docuit Casus 5 Problematis 7 lib. 3, & connectatur L G, & producatur A B in K, vt sit B k æqualis ipsi L G. & connectatur D k secans



latus B C in I. Dico rectam I K æqualem esse datæ E G. Connectantur enim L E, E H, H G. Quoniam igitur portio circuli E F G suscipit angulum æqualem angulo C B K, angulus E L G æqualis erit angulo C B K. B

Et quoniam quadrilateri L E, H G in circulo anguli E H G, E L G oppositi æquales sunt duobus rectis, & æquales quoq; duobus rectis anguli A b C, C b K, erunt anguli A b C, C b K angulis E H G, E L G æquales, & ablatis æqualibus angulis C b K, E L G, reliqui A b C, E H G æquales erunt. sed angulum A b C secat b D diameter rombi bifariam; similiter & angulũ E H G secat bifariam diameter circuli F H, cum sint æquales anguli E H G, F H G æqualibus circumferentijs E F, F G insistentes. ergo anguli D b C, E H F æquales erunt. sed angulus E H F quadrilateri E H, F L in circulo æqualis est angulus M L E externo, & opposito. ergo & angulus D b C æqualis erit angulo M L E. quare additis æqualibus angulis C b K, E L G, totus angulus D b k toti angulo M L G æqualis erit; sed & latera D b, b k lateribus M L, L G æqualia sunt, alterum alteri, ex constructione, triangula igitur D b k, M L G æqualium erunt laterum, & angulorum. atque adeo angulus K, æqualis erit angulo L G M: sed & angulus I b k trianguli I b K æqualis est angulo E L G trianguli, E L G, vt demonstrauimus, & latus b k æquale la- C

teri

A teri L G, ex constructione, erit & basis I k basi E G æqualis. Sub angulo igi- 26 primi
tur C B k aptata est I k æqualis E G datæ, atque pertingit ad angulum A D C,
quod erat faciendum.

Problema II.

Rombo dato, & productis duobus lateribus angulum rombi continentibus inter ipsa latera aptare magnitudine datam rectam lineam, & quæ per oppositum angulum transeat. Oportet autem ipsam magnitudine datam non esse minorem ea recta linea, quæ per extremitatem diametri rombi ad rectos angulos ducta, inter producta latera interijcitur.

B

Resolutio.

Sit datus rombus A B, C D, data autem recta linea E G. Oportet inter producta latera B A, b C aptare rectam lineam æqualem ipsi E G, ita vt per punctum D transeat.

Sit iam aptata recta I D K æqualis E G, & circa triangulum I B K describatur circulus, quem B D diameter rombi producta secet in H; erunt igitur æquales anguli I B H, H B K. diameter enim rombi b D secat angulum C B A bifariam, quare æquales erunt & circumferentiæ I H, H k, quibus ipsi anguli insistunt, & æquales rectæ I H, H K. agatur autem diameter circuli H F secans rectam I K in V. cum

C igitur æquales sint circumferentiæ I H, H K erunt æquales & reliquæ circumferentiæ I F, K F. quare & anguli F H I, F H K ipsis circumferentijs insistentes, æquales erunt. est autem & I H æqualis H K, cum sint æquales circumferentiæ I H, H K, & V H communis est vtrique triangulo I V H, k V H, ergo erunt æquales & I V, V H: quare diameter F H secat rectam I K ad rectos angulos. Et quoniam I k data est magnitu- 26 tertij

D dine, cum sit æqualis datæ E G intelligatur ipsa I K positione quoque data, nulla positionis rombi dati habita ratione, ac si non esset positione datus.

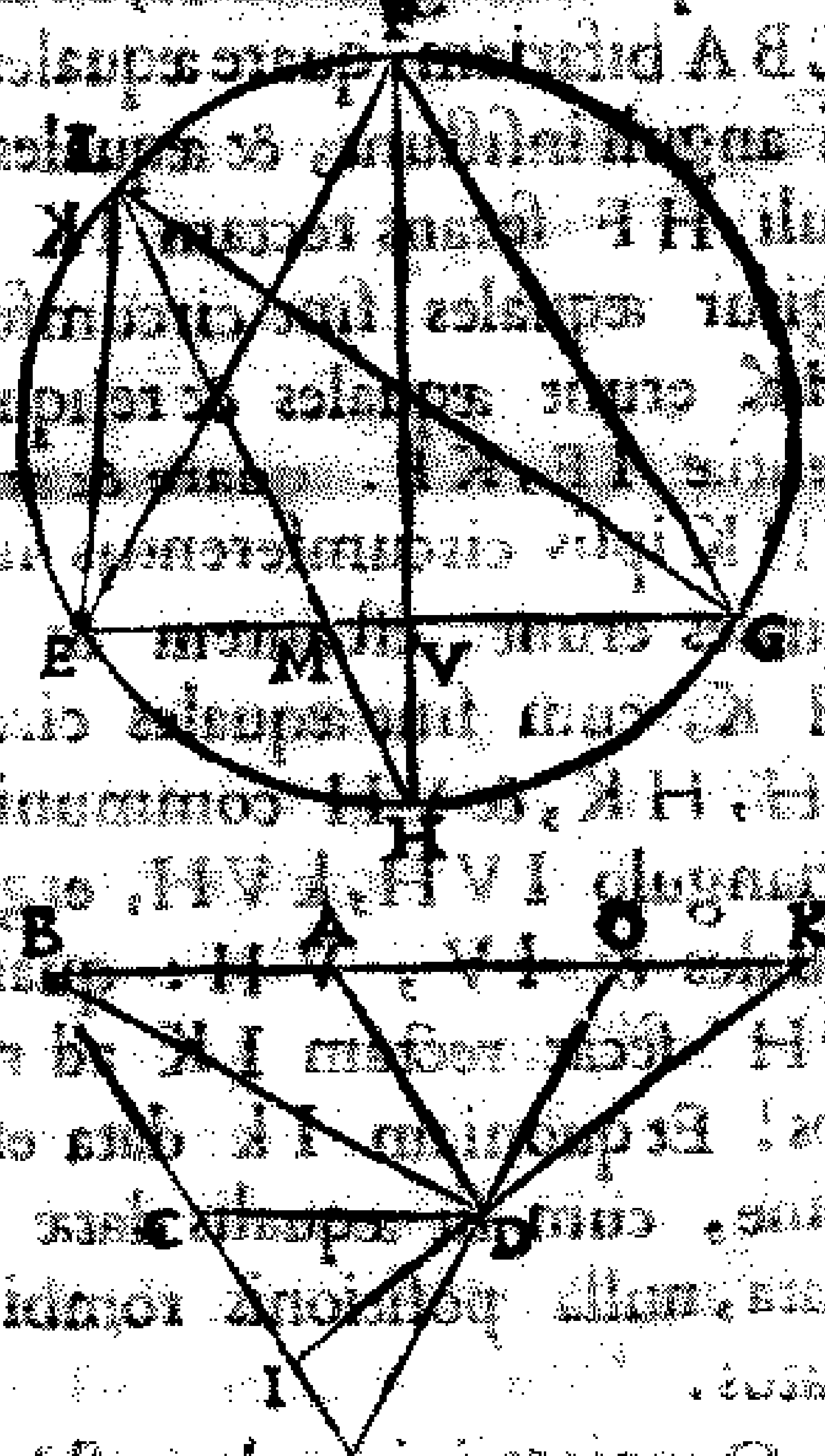
Quoniam igitur data est I k positione, & magnitudine, & datus angulus I B k magnitudine. cum sit angulus dati rombi portio circuli I B k; erit positione, & magnitudine data. quare & totus circulus, & diameter F H secans bifariam, & ad rectos angulos rectam I K positione, & magnitudine datam, ergo dabitur & punctum H, cum sit & circũferentia circuli positione dati. Ducatur autẽ à puncto H recta H D B secans rectã V I in D, circũferentiam vero I F in B, ita vt D b sit æqualis diametro rombi ductæ, ab an- def. 8 dat. 29 dat. xxv dat.

angulo ad quem aptata pertingit, quemadmodum docet ... quartus Problematis 7 lib. 3. ergo ipsi H B positione data erit, quare & dabitur & punctum B, cum sit in circumferentia circuli positione & magnitudine dati. sed datur & punctum k, cum sit extremitas rectæ I k positione & magnitudine datæ. ergo & recta B k positione & magnitudine data erit.

33 dat.

Compositio.

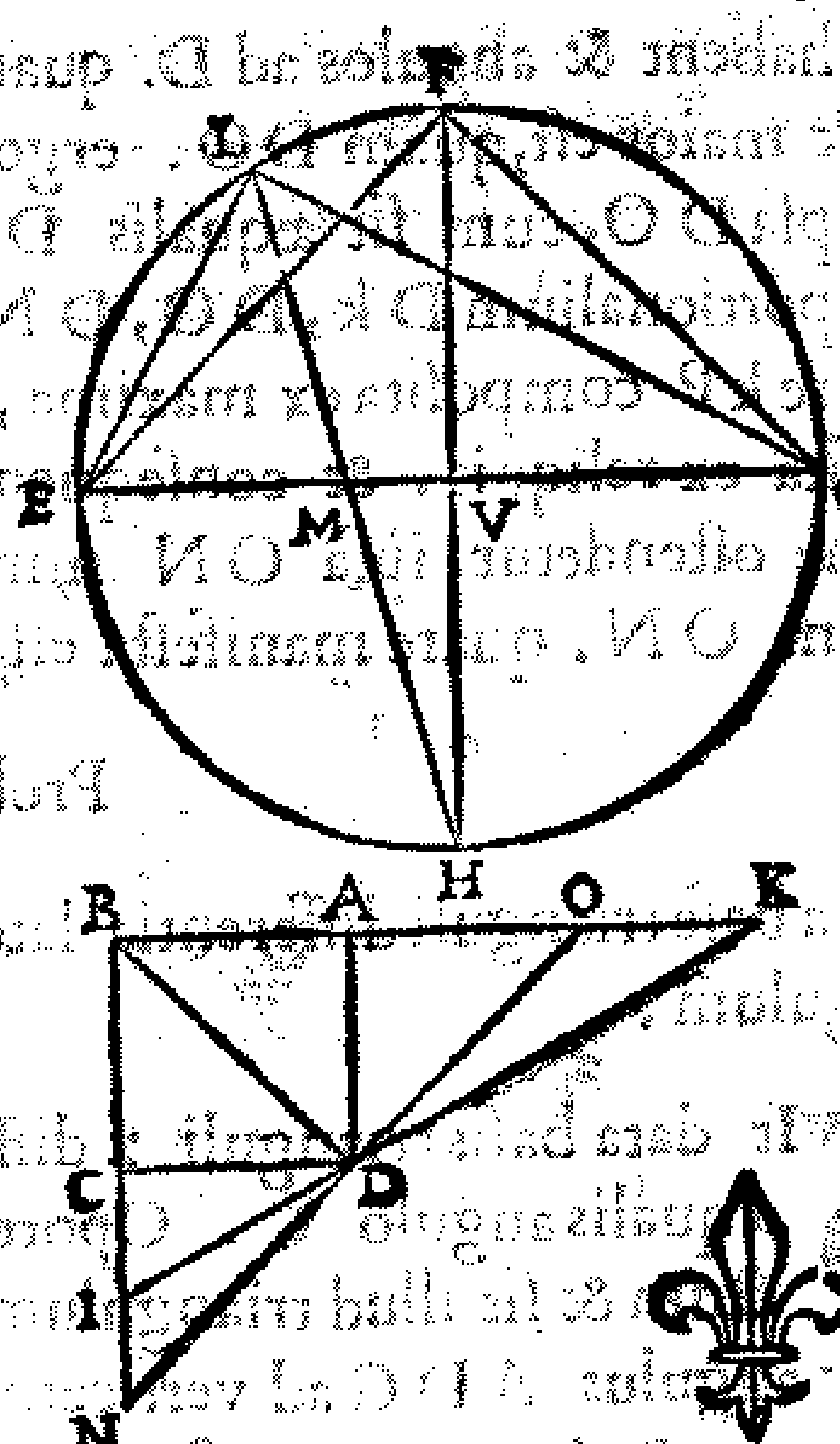
Componetur autem hoc modo. producatur rombi diameter B D, cui ad rectos angulos per punctum D ducatur recta N D O secans producta rombi latera in punctis N O, & si quidem O N sit æqualis E G, factum iam erit, quod proponebatur. si vero E G sit maior, quam O N, minor autem esse non potest sic determinatum est. describatur in E G portio circuli E L G suscipiens angulum æqualem angulo A B C, & compleatur circulus E L G H, cuius circumferentia E k G secetur bifariam in H, à quo puncto ducatur diameter H F secans rectam E G in V, eam secabit bifariam, & ad rectos angulos. ab eodem puncto H ducatur recta H M L, secans E V in M, circumferentiam vero E F in L, ita vt M L sit æqualis B D diametro rombi, quemadmodum docuit [illegible]sus 4 Probl. 7. lib. 3. ipsa autem D B rombi minor est quam V F, vt infra demonstrabimus, & connectatur L G, cui æqualis ponatur B k, & per punctum D ducatur recta K D I secans latus B C productum in I, & connectatur L E. quoniam igitur portio circuli E L G suscipit angulum æqualem angulo A B C, angulus E L G æqualis erit angulo A B C. sed angulum E L G secat L H bifariam, cum sint æquales circumferentiæ E H, H G. similiter & angulum A B C secat B D diameter rombi bifariam. ergo angulus H L G trianguli M L G æqualis erit angulo D B K trianguli B D k. est autem & latus L G lateri B K æquale, atque latus L M lateri B D ex constructione. ergo triangula M L G, D B k æqualium erunt laterum, & angulorum. itaque angulus L G M æqualis erit angulo B k D. Cum igitur trianguli L G E angulus L G E æqualis sit angulo b k I trianguli b k I, & angulus E L G æqualis angulo I b K, vt est demonstratum, atque latus L G æquale lateri b K, ex constructione; erit & E G ipsi I K æquale. itaque inter producta rombi latera b A, b C apta



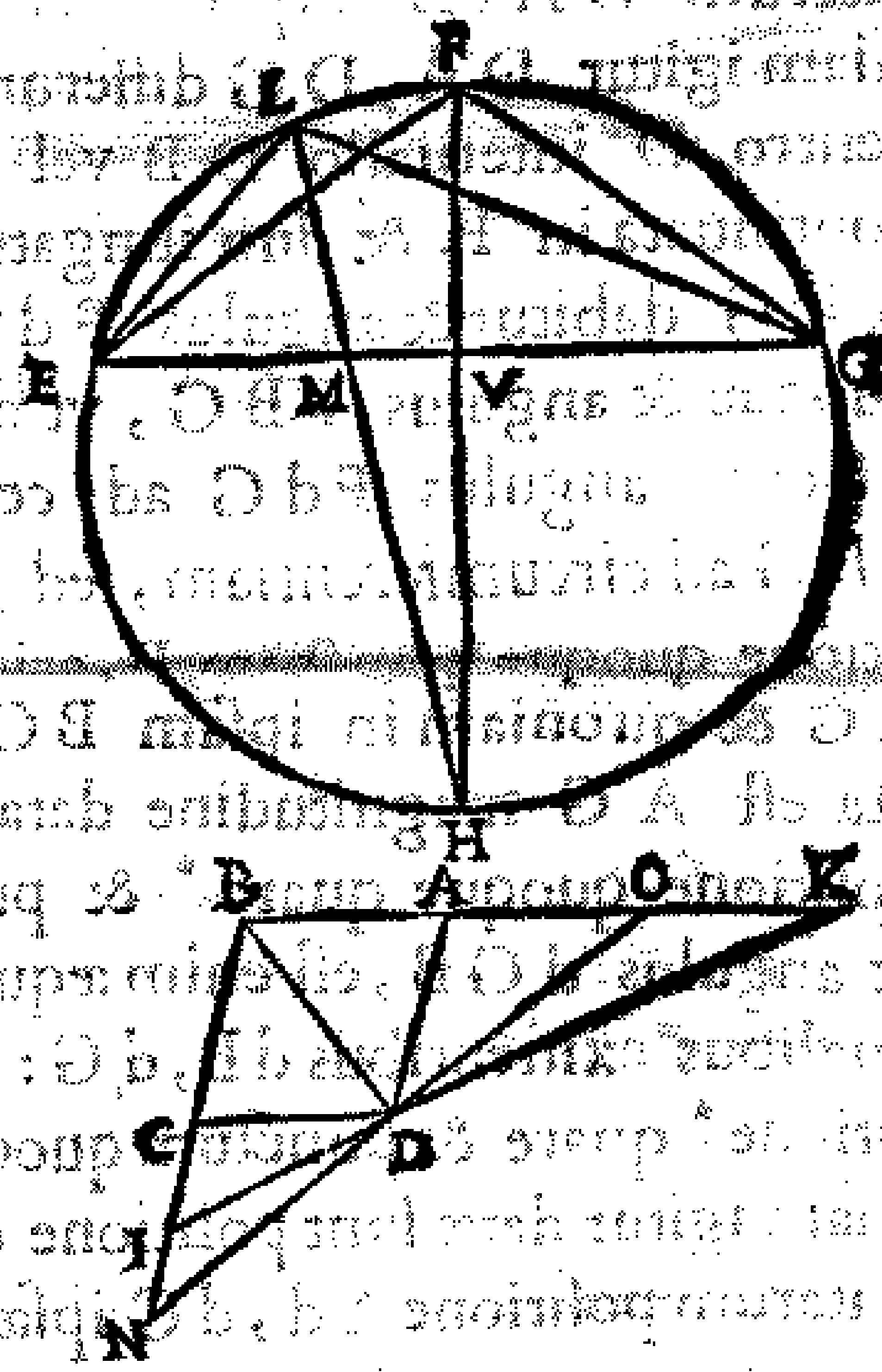
ta

A ta est recta linea kI æqualis datæ EG, eaque transit per punctum D. quod erat faciendum.

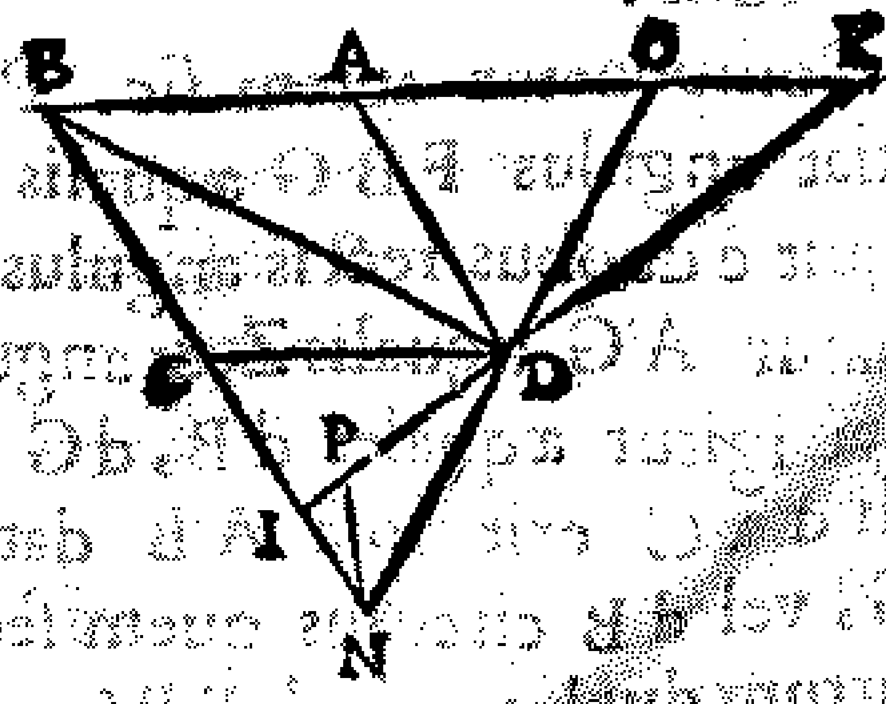
At vero BD minorem esse quam VF sic demonstrabimus. Connectantur EF, FG. Quoniam igitur portio circuli ELG suscipit angulum æqualem angulo NBA angulus EFG, æqualis erit angulo NBO; quare & dimidius dimidio, nempe angulus VFG angulo DBO, angulos enim EFG, NBO secant re-
B ctæ FV, BD bifariam, sed & angulus FVG æqualis est angulo BDO, cum sit vterque rectus: ergo & reliquus reliquo æqualis erit, quare similia erunt triangula BDO, FVG. vt igitur OD ad EB, ita erit GV ad VF; sed OD minor est, quam GV; cum ON dupla ipsius OD minor sit, quam GE dupla rectæ GV, ergo & DB minor erit, quam VF. quod erat ostendendum.



Determinauimus oportere rectam E
C G non esse minorem quam ON; ipsa enim ON minima est omnium, quæ per punctum E ductæ inter producta latera DA, BO interijciuntur, id quod ita sit manifestum.



Ducatur per punctum D alia vtcumque recta linea IDk. Quoniam igitur æquales sunt anguli DBN, DBO, & æquales quoque BDN, BDO, quia recti; erit & reliquus DNB, reliquo DOB æqualis. quare similia erunt trian-
D gula BDN, BDO, & æqualia quoque, cum latus BD commune sit vtrique. vnde ND æqualis erit ipsi DO, & quoniam angulus DNB ostensus est æqualis angulo DOB, qui maior est angulo K videliter interno, & opposito, erit & angulus DNB maior angulo k, ab angulo igitur DNB abscindatur angulus DNB æqualis angulo k æquiangula erunt triangula DPN, DOK, quoniam æqua-



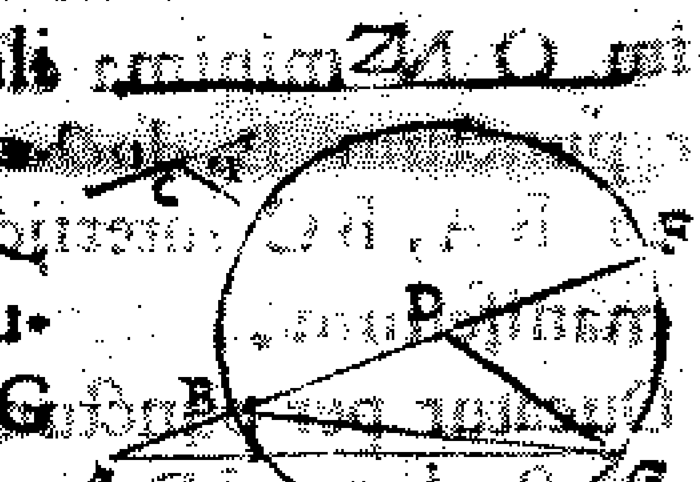
les

les habent & angulos ad D. quare vt D K ad D O, ita erit D N ad D P, sed A
D k maior est, quàm D O. ergo & D N maior erit, quàm D P. atque adeo & ipsa D O, cum sit æqualis D N, maior erit, quàm D P. itaque quatuor proportionalium D k, D O, D N, D P minima est D P, maxima vero D k. quare k P composita ex maxima, & minima maior erit, quam O N composita ex reliquis. & consequenter, I K L multo maior. Atque eadem ratione ostendetur ipsa O N minor omnibus alijs. Minima est igitur omnium O N. quare manifesta est Determinatio.

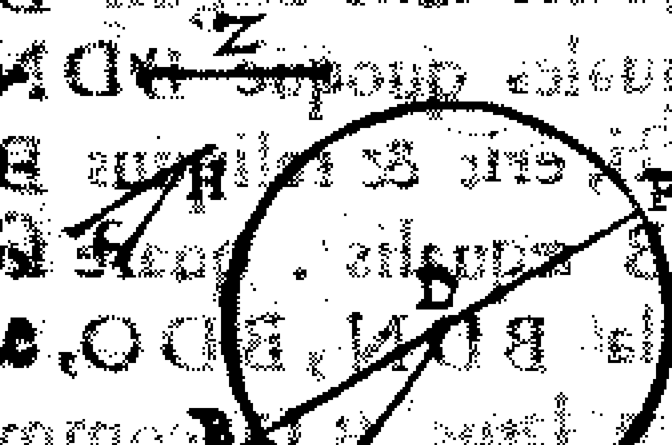
Problema III.

Data base trianguli differentia laterum & angulo verticis inuenire triangulum. B

Sit data basis trianguli z differentia laterum A B, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum. Ponatur iam factum & sit illud triangulum D A G cuius basis A G esto æqualis ipsi z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, ac denique differentia laterum D A, D G quæ sit A B esto positione, ac magnitudine data. Quoniam igitur D A, D G differunt per A B erunt D B, D G æquales, itaque centro D interuallo D B vel D G describatur circulus quem secet A D continuata in F, & duo iungatur D G. Quoniam igitur datus est angulus A D G dabitur & angulus F d G, vt reliquus è duobus rectis, ergo dabitur quoque & angulus F B G, vt dimidius anguli F d G C
est enim angulus F d G ad centrum duplus anguli F B G ad circumferentiam, sed positione data est B d. & po-



29 dat. sitione quoque punctum B, erit* igitur positione & B G & quoniam in ipsam B G à dato puncto A ducta est A G magnitudine data, dabitur * ipsa A G
31 dat. 25 dat. positione quoque quare * & punctum G, sed datur & angulus d G B, est enim æqualis angulo d G B, æqualibus existentibus d B, d G: ergo dabitur * G d po-
29 dat. 25 dat. sitione * quare & punctum quoque d dabitur. Quoniam igitur datæ sunt positione extremitates A, d, G, datarum positione A d, d G ipsæ quoque * magnitudine datæ erunt. D



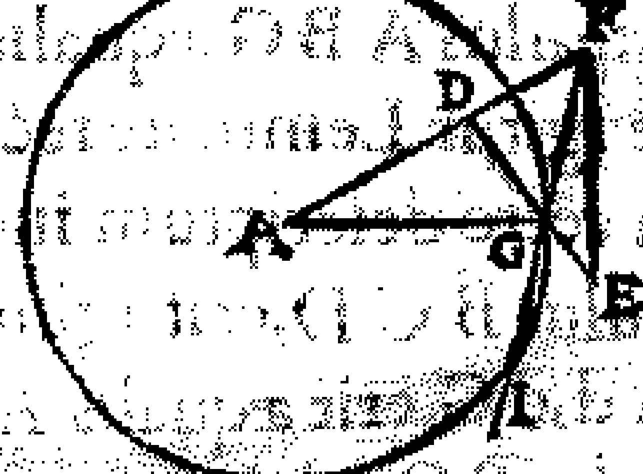
Componetur autem sic. Producatur A B in F, & fiat angulus F B G æqualis dimidio eius quem relinquit è duobus rectis angulus C: hoc est dimidio anguli H, & in B G ponatur A G æqualis Z, & angulo G B d æqualis constituatur angulus B G d erunt igitur æquales d B, d G quare differentia laterum d A, D G trianguli d A G erit ipsa A B data. Describatur ex d centro ad interuallum d G, vel d B circulus quem secet A F in F, erit igitur angulus F d G ad centrum duplus anguli F B G ad circumferentiam, sed eiusdem anguli F B G du-

A duplus est quoque & angulus H ex constructione, ergo angulus F D G angulo H æqualis erit, vnde & angulus A D G ad verticem trianguli æqualis angulo C: est autem & basis a G æqualis datæ Z ex constructione. Constructum est igitur triangulum d a G, quod facere oportebat.

Lemma.

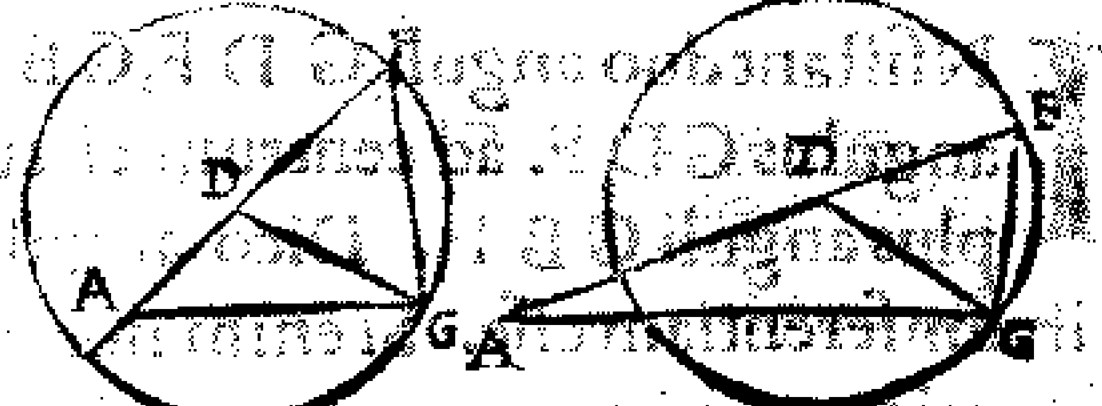
Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, basis vero semidiameter, & ducatur linea recta; non ex centro circuli, sed ab altera extremitate aggregati laterum, constituens cum eo angulum æqualem dimidio, qui est ad verticẽ trianguli, angulo, illa recta linea in circulum incidet.

B SIt triangulum D A G, cuius basis A G, & centro A interuallo A G describatur circulus, & producatur A D in F, vt sit D F æqualis B G aggregatum igitur laterum A D, D G erit A F: à puncto autem F ducatur F I, faciens angulum A F I, æqualem dimidio anguli A D G; Dico ipsam F I in circulum incidere, si enim non incidit, cadit extra qualis est F E. itaque continuetur D G, donec secet ipsam F E in E. Quoniam igitur externus angulus A D E trianguli d E F æqualis est duobus internis d F E, d E F, quorum vnus nempe D F E, ponitur dimidius ipsius A d E erit & reliquus d E F ipsius A d E dimidius æquales igitur erunt anguli d F E,



C d E F, & ideo æquales rectæ d F, d E quod est absurdum, ponitur enim d F æqualis d G. Recta igitur F I in circulum incidet, quod erat demonstrandũ.

Aliter sit triangulum d A G, cuius basis A G, & centro d interuallo d G, describatur circulus, secans A d productam in F, & iungatur F G, erit angulus A F g æqualis dimidio anguli A D G: hic enim est ad centrum ille ad circumferentiam. Si igitur ex A centro ad interuallũ A G circulus describatur ipsum tanget, vel secabit recta linea F G, ideoq. in ipsũ circulum incidet, quod erat demõstrãdũ.



D

Problema IV.

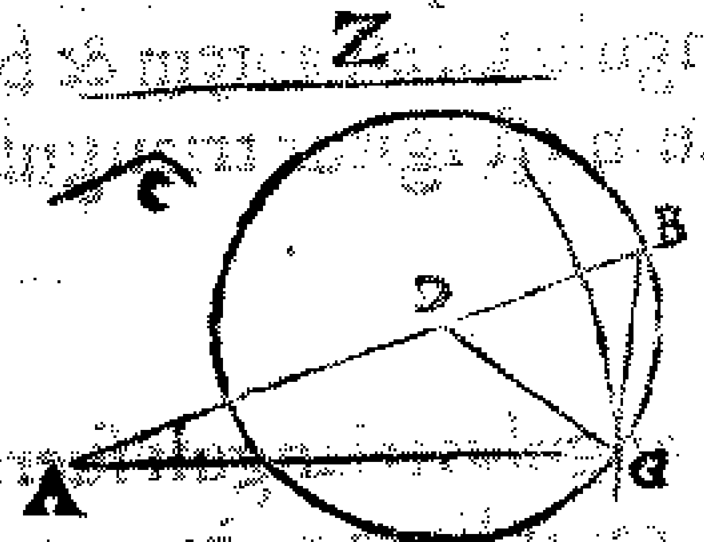
Data base trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire trianguluũ. Probl. 13 lib. ij

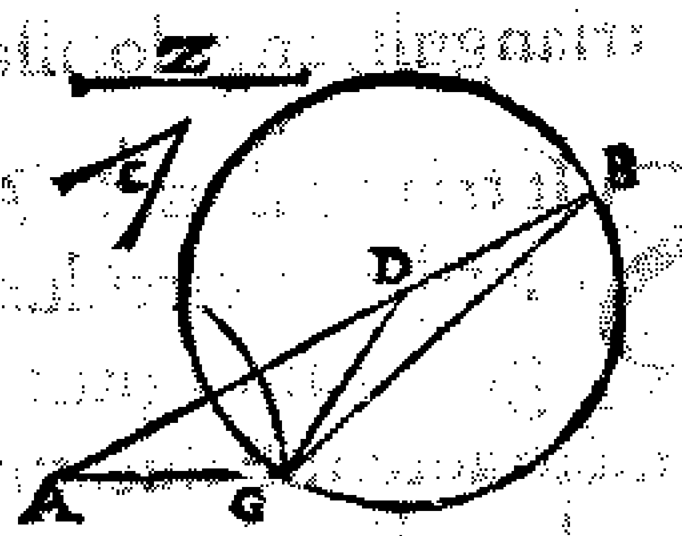
SIt data basis trianguli Z aggregatum laterum A B, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum d A G, cuius basis A G esto æqualis ipsi Z, aggregatum vero laterum A d, d G æquale ipsi A B, magnitudine, ac positione datæ; & angulus A d G ad verticẽ æqualis angulo C, iũgatur autẽ B g.

Quoniam igitur composita ex A d, d G æqualis est ipsi A B ablata cõmuni A d, reliqua d G, reliquæ d B æqualis erit, & ideo circulus ex d centro descri-

ptus ad interuallũ D g, transibit per B; describatur erit igitur angulus A d g ad A
centrum, duplus anguli B ad circumferẽtiam, sed datur angulus A D G, ergo dabitur & angulus B, & est
29 dat. positione A B, ergo * & B G positione erit, sed in ipsam B G à dato puncto A ducta est A G magnitudi-
xxxi dat. ne data, ergo dabitur * ipsa A G positione quoque, &
25 dat. datum * erit punctum G, & data * quoque positione
xxix dat. G D, datur enim angulus D g B, quia æqualis est dato D B G æqualibus existentibus D B, D G, quare & pũctum D dabitur. Quoniam igitur datæ sunt extremitates A, D, G, datarum positione A D, D G, ipsæ quoque magnitudine datæ erunt.



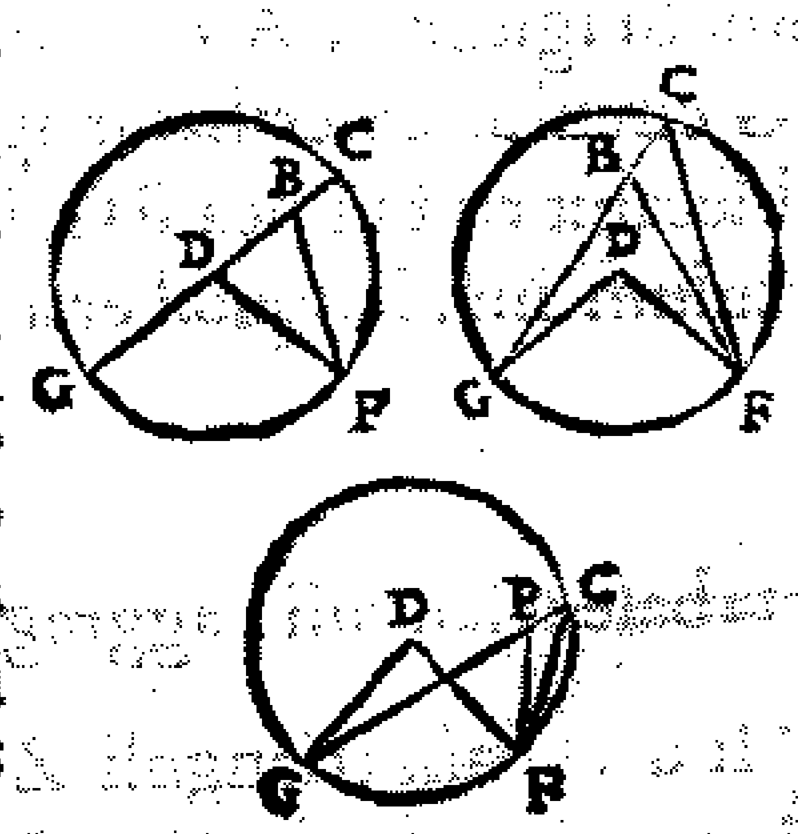


Componetur autem Problema hoc modo. Centro A, interuallo datæ Z æquali describatur circulus, & fiat angulus A B G æqualis dimidio anguli C ex antecedẽte igitur Lemmate recta B G incidet in circulum sub A cẽtro descriptum incidat in G, & iungatur A G, & fiat angulo B æqualis angulus B G D, erit igitur D G æqualis D B addita communi A D composita ex A d, d G, erit æqualis A B. Centro autẽ D interuallo d B, vel d G describatur circulus B G erit igitur angulus A d g ad centrũ duplus anguli B ad circũferentiã, sed & angulus C duplus est anguli B ex constructione, ergo angulus A d E angulo C æqualis erit, est autem & basis A G æqualis datæ Z ex constructione. Constructum est igitur triangulum D A G quale construendũ proponebatur. C

Lemma.

Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ circuli insisterint, duplus autem fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit.

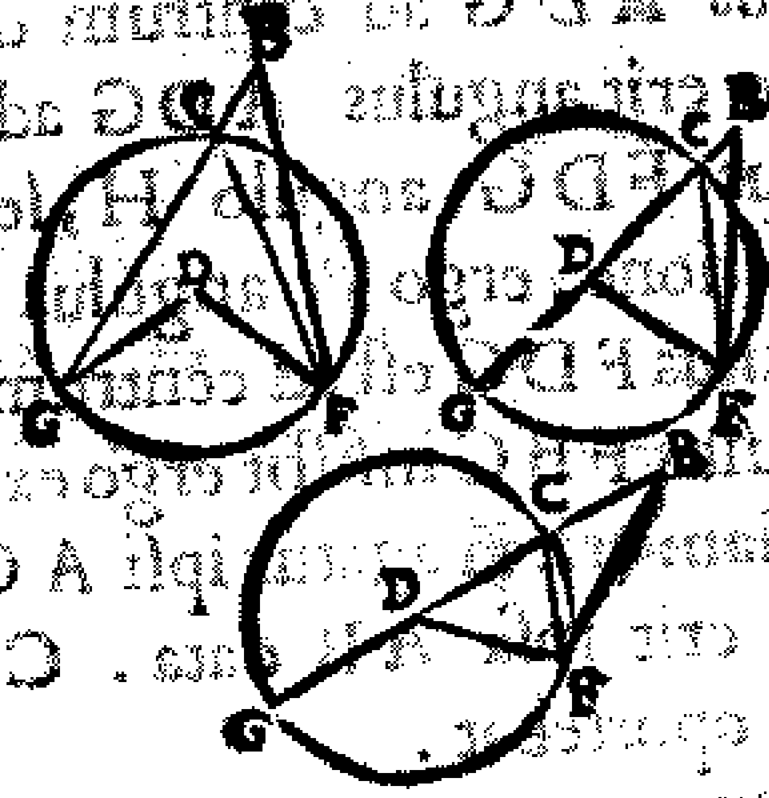
INsistant duo anguli G D F, G B F eidem circuli circumferentiæ G F, & si angulus G D F. ad centrum circuli, atque duplus anguli G B F. Dico angulum G B F ad circumferentiam esse. Si enim non est ad circumferentiam erit intra circulum, vel extra. Sit primũ si fieri potest intra circulum, & producatur B g vsque ad circumferentiam in C, & iungatur F C, erit igitur angulus G D F ad cẽtrum duplus anguli g C F ad circumferentiam, sed duplus est & anguli g B F ex hypotesi, ergo angulus g B F angulo g C F æqualis erit externus interno, quod est absurdum, angulus igitur g B F non est intra circulum. D



Deinde sit angulus g B F extra circulum ipsum igitur circulum secabit, vel vtraque rectarum G B, F B, vel saltem vna secet ipsa g B in puncto C, & iungatur F C erit igitur angulus g D F ad centrum duplus anguli G C F ad circumferentiam, sed duplus est & anguli B ex hypotesi,

cr-

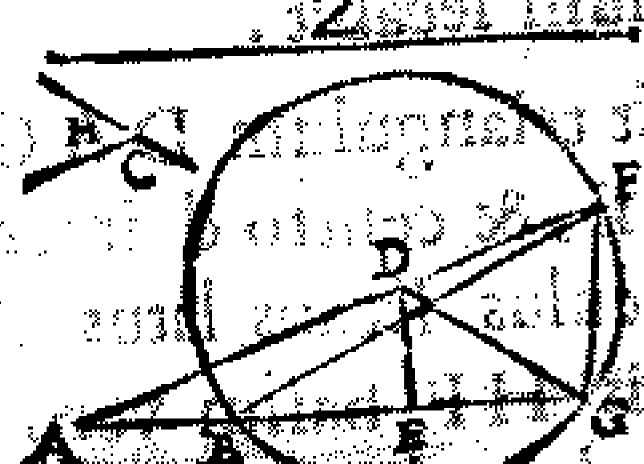
A ergo angulus G C F angulo B æqualis erit externus interno, quod est absurdum. angulus igitur D B F non est extra circulum, sed neque intra circulum, vt est ostensum, ergo ad circumferentiam erit, quod erat demonstrandum.



Problema V.

Data differentia segmentorum basis trianguli aggregato laterum, & angulo verticis inuenire triangulum.

B Sit data differentia segmentorum basis trianguli A B aggregatum laterum Z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.



Inuentum iam sit, & sit illud triangulum D A G, in quo perpendicularis D E, & centro D interuallo D G quod sit minus latus describatur circulus secans latus A D productum in F, 2 tertij
basim vero A G in B erunt* igitur B E, E G æquales, vnde differentia segmentorum A E, E G erit A b esto igitur ipsa A b positione, ac magnitudine data, composita vero ex lateribus A D, D G, hoc est ipsa A F esto
C æqualis Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & iungantur B F, F G. Quoniam igitur datur angulus A D G dabitur angulus F D G, vt reliquus è duobus rectis dabitur quoq; angulus F B G, vt dimidius anguli F D g angulus enim F D G ad centrum duplus est anguli F B G ad circumferentiam
positione igitur erit B F, quia positione est & A D, & quoniam datum est pun- xxix dat.
ctum A, à quo in B F ducta est A f magnitudine data dabitur* ipsa A f positio- 31 dat.
ne quoq; vnde dabitur* & punctum F, & quoniam datus est angulus A D g ad xxv dat.
centrum datus erit & angulus A f G circumferentiam, vt eius dimidius, atque
data* erit positione f G, vnde datum* erit & punctum G, & data* quoq; posi- xxix dat. 25 dat.
tione G D, quia datus est angulus D G f etenim æqualis est dato angulo D f g 25 dat.
ratione æqualium laterum D G, D f, quare datum* erit & punctum D. Quo- 25 dat.
D niam igitur datæ sunt extremitates A, D, G, datarum positione A D, D G, A G, ipsæ quoque magnitudine erunt.

Componetur autem hoc modo. Producatur A B in G, & fiat angulus G B F æqualis dimidio eius quem relinquit è duobus rectis angulus C, hoc est dimidio anguli h, & in B F ponatur A F æqualis Z, & fiat angulus A F G, æqualis dimidio anguli C, angulus vero F G D æqualis angulo A f G erunt igitur æquales d G, d F, addita communi A d composita ex lateribus A d, d G, trianguli d A G æqualis erit ipsi A f, hoc est Z datæ.

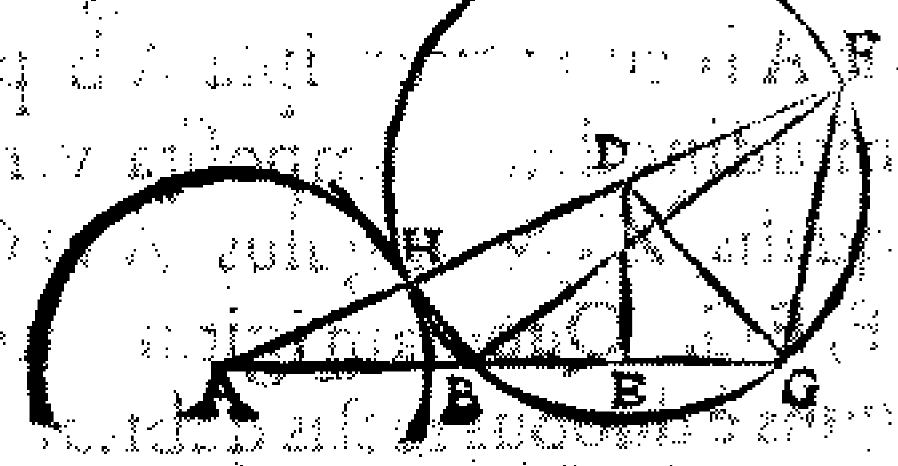
Deinde centro D interuallo D G, vel D f describatur circulus F E. Quoniá igitur angulus C duplus est anguli A F G ex constructione similiter & angugulus A D G ad centrum duplus eiusdem anguli A F G ad circumferentiam erit angulus A D G ad verticem dato angulo C æqualis, quare & angulus F D G angulo H, sed angulus H duplus est anguli F B G ex constructione, ergo & angulus F D G eiusdem anguli F B G duplus erit, sed angulus F D G est ad centrum, & insistit circumferentiæ F G, cui etiam & angulus F B G insistit ergo ex antecedente Lemmate angulus F B G ad circũferentiam erit iá agatur ipsi A G perpendicularis D E erunt igitur* æquales B E, E G erit ipsa A B data. Constructum est igitur triangulum D A G, vt facere oportebat. A

3 tertij

Lemma I.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia vero laterum semidiameter, & ducatur recta linea non ex centro circuli, sed ab altera extremitate differentiæ segmentorum basis constituens cum ea angulum æqualem dimidio; qui est ad verticem trianguli angulo, illa recta linea circulum secabit. B

SIt triangulum D A G, in quo perpendicularis d E secet basim A G in E, & centro d interuallo d G, quod sit minus latus describatur circulus secans latus A d productum in punctis H F basim vero A G in B; laterum igitur d A, d G differentia erit A H, differentia vero segmentorum A E, E G erit A B, iungantur autem B H, F G.



Quoniam igitur quadrilaterum F G, B H est in circulo anguli H B G, H F G ex aduerso duobus rectis sunt æquales, sed & anguli H B G, H B A æquales sunt duobus rectis, ergo anguli H B G, H F G angulis H B G, H B A æquales erunt, dempto communi angulo H B G reliquus H F G reliquo H B A æqualis erit, sed angulus H F G ad circumferentiam dimidius est anguli H D G ad centrum ergo & angulus H B A eiusdem anguli A D G dimidius erit. Dico igitur circulum sub A centro interuallo A H descriptum secari à B H: manifestum est autem ipsam B H in eum incideret. Quoniam punctum H est in circumferentia, si igitur eum non secat tangit, tangat si fieri potest contactus erit in H, & iungatur B F ergo* rectus erit angulus A H B, & ideo æqualis recto H B F qui est in semicirculo; quare parallelæ* erunt A F, B F, quod est absurdum: conueniunt enim in F. Non igitur B H tangit circulum, cuius centrum A sed secat, quod erat demonstrandum. C D

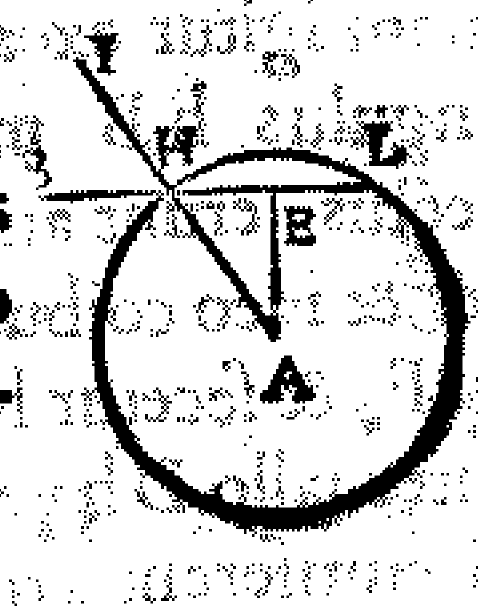
18 tertij
27 primi

Lemma II.

Secet circulus sub A centro recta linea B H L in punctis H L, & per punctus H quod sit propius ad B ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B minorem esse recto.

Di-

A Diuidatur enim H L bifariam in E, & iungatur A E rectus igitur erit angulus A E H, ac proinde angulus E H A recto minor: tres enim interni anguli trianguli A E H duobus rectis sunt æquales, sed angulus E H A æqualis est angulo I H B: sunt enim ad verticem, ergo & angulus I H B erit recto minor quod erat demonstrandum.



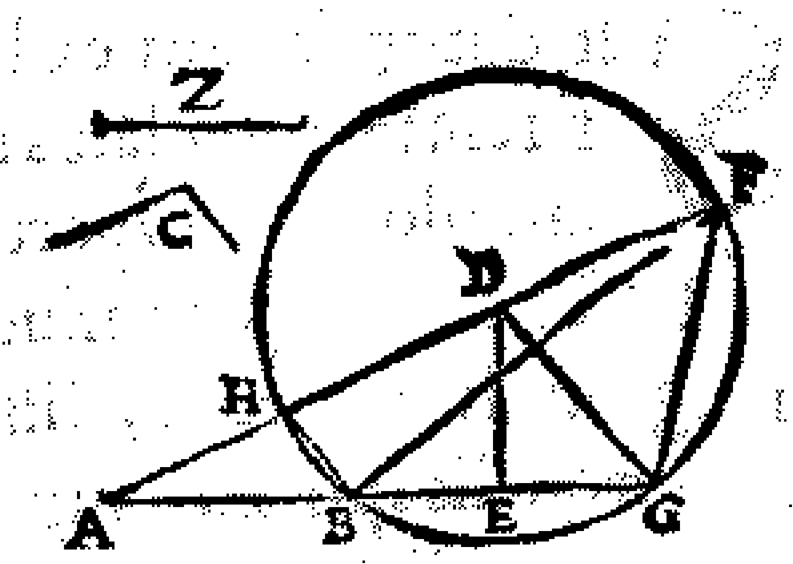
Problema VI.

Data differentia segmentorum basis trianguli differentia laterum & angulo verticis inuenire triangulum. Prob. 10 lib. 2

B Sit data differentia segmentorum basis trianguli A B differentia laterum Z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

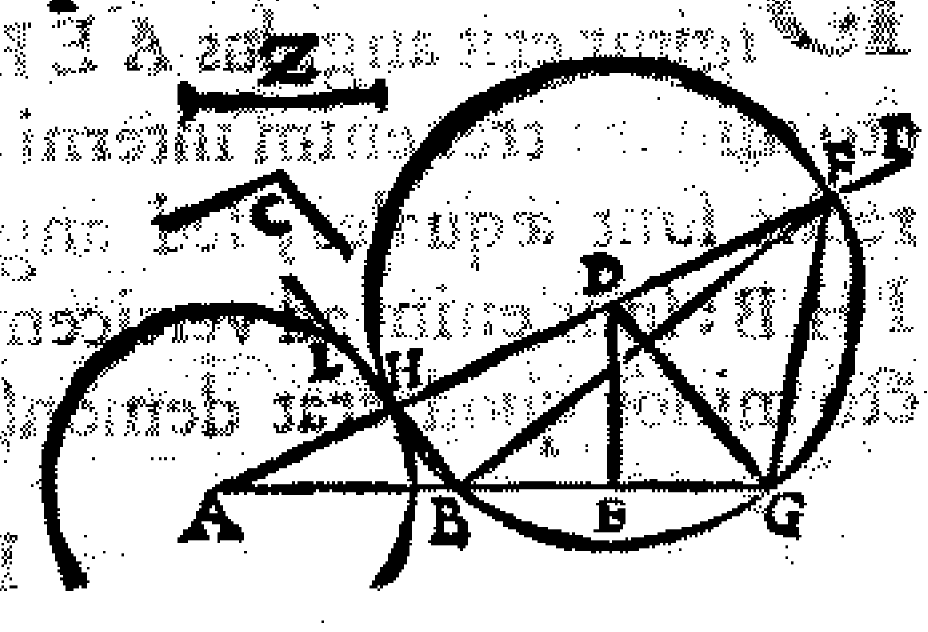
Factum iam sit & sit illud triangulum D A G, in quo perpendicularis D E & centro D interuallo D G, quod sit minus latus describatur circulus secans latus D A in H, basim vero A G in B differentia igitur segmentorum A E, E G erit erit A B, differentia vero laterum D A, D G erit A H. Esto igitur A B positione, atque magnitudine data ipsa vero A H esto æqualis datæ Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & producatur A D vsque ad circumferentiam in F, & iungantur H B, B F, F G. Quoniam igitur quadrilaterum F G, B H est in circulo, anguli H B G, H F G ex C aduerso duobus rectis erunt æquales, sed & anguli H B G duobus rectis sunt æquales, ergo anguli H B G, H F g angulis H B g, H B A æquales erunt, auferatur vtrinque angulus H B g, reliquus igitur H F g reliquo H b A æqualis erit, sed angulus A d g ad centrum duplus est anguli A F g ad circumferentiam, ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, sed datur angulus A D G, dabitur ergo & H B A, quare dabitur * B H positione, & quoniam à dato, puncto A in ipsam B H ducta est A H magnitudine data dabitur * A H positione quoque & propter datum angulum H B F est enim, rectus in semicirculo data * erit B F positione & datum * quoque pun-D ctum F & ideo data * magnitudine H F & quoniam æquales sunt H D, D F dabitur punctum D, sed datur & punctum G, ergo dabitur D G * positione & magnitudine, sed datur & punctum A, ergo & A D, A E positione * & magnitudine datæ erunt.

29 dat. 31 dat. 29 dat. 25 dat. 26 dat. ibid. ibid.



Componetur autem sic. centro A interuallo rectæ Z æquali describatur circulus, & fiat angulus A B H æqualis dimidio anguli C, ex antecedente igitur quod primo loco præmissum est Lemmate, B H secabit ipsum circulum secet in punctis H L, & per punctum H, quod sit proprius ad B ducatur recta linea A h I, ipsi autem B h ducatur perpendicularis B F. Quoniam

niam igitur ex antecedente quod secundo loco præmissum est Lemmate, A
angulus h B minor est recto & angulus F B h rectus, erunt ambo simul duobus rectis minores, & ideo coibunt rectæ lineæ A I, B F, coeant in F, & secetur h B bifariam in d, & centro D, interuallo D h vel D F, describatur circulus eius circumferentia transibit per B propter angulum h B F rectum. Deinde producatur A B donec secet circulum F B h in G, & iungantur D G, F G & ipsi A G ducatur perpendicularis D E erunt igitur æquales B E, E G, & ideo differentia segmentorum A E, E G erit ipsa A B data. Similiter quoniam æquales sunt D h, D G vt semidiametri differentia laterum A D, D G B
erit A h, cui æqualis est Z data ex constructione. Superest igitur vt angulus A D G ad verticem trianguli D A G æquetur angulo C, id autem ita fit manifestum. Quoniam enim quadrilaterum F G, B h est in circulo anguli h B G, h F G ex aduerso duobus rectis erunt æquales, sed & anguli h B G, h B A sunt æquales duobus rectis, ergo anguli h B G, h F G angulis h B G, H B A, æquales erunt: dempto communi angulo H B G, reliquus H F G reliquo H B A æqualis erit, sed anguli H F G ad circumferentiam duplus est angulus H D G ad centrum ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, sed & angulus C duplus est anguli H b A ex constructione, ergo angulus A D G angulo C æqualis erit, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum D a G quale construendum proponebatur. C



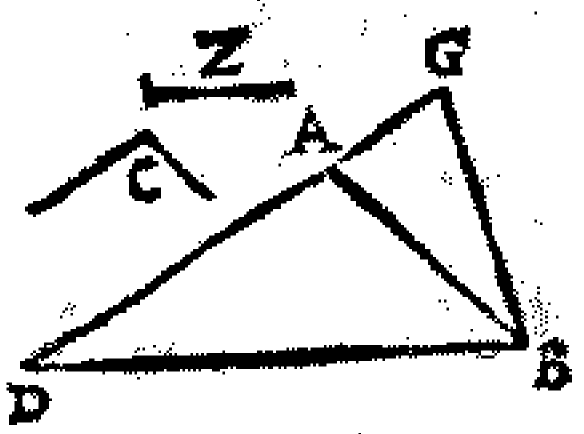
Problema VII.

Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & basim, inuenire triangulum.

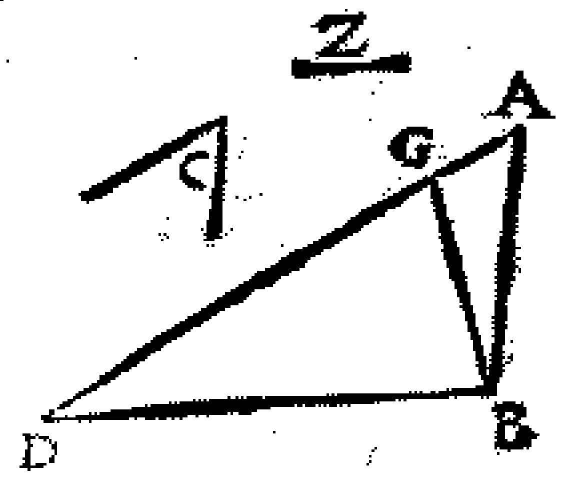
Sit datum vnum ex lateribus triangulum verticis ambientibus, a b: differentia inter latus reliquum & basim z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factũ iam sit & sit illud triangulũ a b D, cuius latus A b esto positione, ac magnitudine datum, differentia vero inter reliquum latus a D & basim D b esto æqualis ipsi z, & angulus D A B ad verticem æqualis angulo C. Pona- D
tur autem D G æqualis D B, differentia igitur ipsarum A D, D B erit A G & iungatur G B. Quoniam igitur datus est angulus D a B datus erit & angulus G a B, vt reliquus è duobus rectis, hic autem in prima figura ad primum Casum partinens, in secunda vero figura quæ ad secundum Casum pertinet angulus D A B idem est quod angulus G a b, quocumque igitur Casu
19 dat. datur angulus G a B est autem positione a B ergo* positione est & a g, sed
27 dat. & magnitudine ponitur enim æqualis ipsi z, ergo* punctum g datum erit
xxvi dat. sed datum est & B, ergo* g B positione erit & magnitudine, atque adeo dabitur
19 dat. angulus a g B quia datur* triangulum a g B specie & in secunda figura

da-



A dabitur quoq; & D g B vt reliquus è duobus rectis,itaque in vtraque figura dabitur angulus D B g.est enim ęqualis 29 dat.
ipsi D g B æqualibus existentibus D g , D B quare* B D 25 dat.
positione erit & ideo*positione quoq;& punctũ D,ac pro- 26 dat.
pterea * ipsæ B D , a D magnitudine quoque datæ erunt.



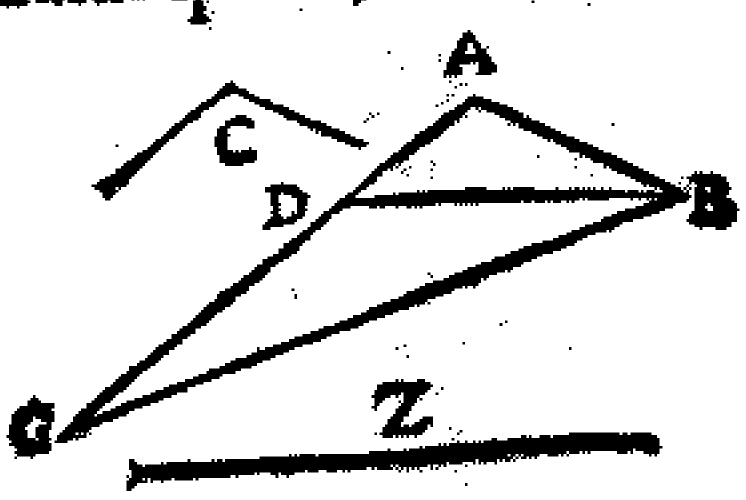
Componetur autem hoc modo. Constituatur angulo C æqualis angulus B a D, & ponatur ipsi z æqualis a g,& iungatur g B , & angulo D g B æqualis constituatur angulus G B D,& B D occurrat ipsi A D in D, erunt igitur D G, D B æquales, & ideo differentia inter la-
B tus a D, & basim d B trianguli a b d erit a g hoc est z data : est autem & angulus d a b ad verticem æqualis angulo c ex constructione, & latus a b ipsum datum Constructum est igitur triangulum a b d, vt facere oportebat.

Problema VIII.

Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, datoque aggregato reliqui lateris, & basis, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus a b composita vero ex reliquo latere & base z & angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

C Ponatur iam factum & sit illud triangulum a b d,cuius latus a b esto positione,ac magnitudine datum, composita vero ex reliquo latere a d,& base d b esto æqualis ipsi z,& angulus ad verticem a æqualis angulo C. Producatur autem a d in G. vt sit d G æqualis d b erit igitur a G æqualis compositæ ex a d ,
d b & iungatur G b. Quoniam igitur positione est a b & datus est angulus 29 dat.
A erit A G *positione data,sed data est & magnitudine ergo & * punctum G 27 dat.
datum erit datur autem & B dabitur * ergo G B positione & magnitudine atq; 26 dat.
adeo dabitur & angulus g,quia triangulum * A B G datur specie; est autem an- 39 dat.
gulo, G æqualis angulus G B D ratione æqualium.
D B, D g quare & ipse G B D datus erit, positione 29 dat.
igitur* erit B D quare & * punctum D. Quoniam 25 dat.
D igitur positione datarũ d b, d a,dati sũt termini A, D, B, ipsæ magnitudine quoque datæ erunt. Com-



ponetur autẽ sic angulo C constituatur æqualis angulus B A G,& ponatur A G æqualis ipsi z,& iuncta G B, constituatur quoque angulus F B D æqualis angulo G erunt igitur D B,D G æquales addita cõmuni D A composita ex latere A D,& base D B trianguli A B D æqualis erit ipsi a g hoc est z datæ:est autem & angulus ad verticem A æqualis angulo C ex constructioue & latus A B ipsum datum. Constructum est igitur triangulum A B D quod facere oportebat.

FINIS.